

UN ALGORITHME CUBIQUE POUR L'OPTIMISATION NON LINÉAIRE

Efim A. Galperin

Résumé

Un algorithme est proposé pour la solution des problèmes de l'optimisation non linéaires, non convexes et non différentiables.

1. Introduction

La méthode considérée n'utilise pas la notion du gradient et représente une amélioration de la méthode d'énumération globale d'une façon qui permet d'accélérer la convergence et d'éviter le "overflow" de la mémoire de l'ordinateur. L'idée de cet arrangement a été suggérée par la méthode de l'optimisation globale de Q. Zheng [1,2] basée sur la théorie de la mesure dont on peut voir des applications et certains détails dans [3,4]. Pour développer des algorithmes de cette classe, il faut introduire une procédure appropriée de partition, un opérateur de représentation de domaines et un opérateur d'exclusion de domaines. Les deux premières procédures sont évidentes dans la classe des algorithmes cubiques [5]. L'opérateur d'exclusion considéré ci-après est basé sur la condition de Lipschitz. Notre présentation ressemble à la méthode classique de partition successive d'un segment en deux parties.

2. Le problème

$$\min S(x) , \quad x \in C = \{x \mid 0 \leq x^i \leq c , \quad i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}_+^n . \quad (1)$$

On cherche:

$$s^0 = \min S(x) , \quad x \in C \subset \mathbb{R}_+^n \quad (2)$$

et

$$K^0 = \{x^0 \mid x^0 = \arg \min S(x) , \quad x \in C \subset \mathbb{R}_+^n\} . \quad (3)$$

3. Hypothèse

La fonction $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ est une procédure univoque et lipschitzienne, c.-à-d. elle satisfait à la condition:

$$|S(x) - S(x')| \leq L \|x - x'\| , \quad x \in C , \quad x' \in C , \quad L = \text{const.} \quad (4)$$

4. La procédure de partition

On considère la partition du cube fermé C en 2^n sous-cubes C_i fermés égaux, $i = 1, \dots, 2^n$, dont les arêtes sont de la longueur $c/2$, $c = \text{const.}$

5. L'opérateur de représentation

Chaque C_i sera représenté par son sommet $x_i = \{x_i^1, \dots, x_i^n\}$, $x_i^j = 0$ ou $c/2$, $i = 1, \dots, 2^n$, $j = 1, \dots, n$. Tous les $2^n x_i$ sont différents. Par exemple, si $n = 2$, $c = 2$ (un carré 2×2), alors il y a quatre C_i représentés par les sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

6. Constantes de l'exclusion

Le diamètre de chaque C_i est égal à:

$$d(C_i) = \max_{x, x' \in C_i} \|x - x'\| = c\sqrt{n}/2 . \quad (5)$$

La première constante d'exclusion est égale à:

$$r_1 = L \cdot d(C_i) = Lc\sqrt{n}/2 . \quad (6)$$

Si la partition est répétée pour chaque C_i , alors la deuxième constante est

$$r_2 = L \cdot d(C_i^2) = Lc\sqrt{n}/4 . \quad (7)$$

De même façon, la m -ième constante d'exclusion est égale à :

$$r_m = L \cdot d(C_i^m) = Lc\sqrt{n}/2^m . \quad (8)$$

Evidemment, $r_m \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$.

7. Opérateur d'exclusion

Etant donné une constante de comparaison s_0 , exclure tous cubes C_i pour lesquels

$$S(x_i) - s_0 > r_1 . \quad (9)$$

8. L'algorithme

On calcule $s_0 = S(0)$ pour le premier sommet $x_0 = 0$. On fait la première partition $C = UC_i$ et la première exclusion par (9). Pour les C_i restants, on définit :

$$K_1 = \{x \mid x \in C_i, S(x_i) - s_0 \leq r_1\} , \quad (10)$$

$$I_1 = \{i \mid S(x_i) - s_0 \leq r_1\} . \quad (11)$$

On calcule

$$s_1 = \min_{i \in I_1} S(x_i) . \quad (12)$$

Evidemment, $s_1 \leq s_0$. On fait la partition de chaque $C_i \subset K_1$ de la même façon et on répète les itérations en remplaçant s_0, r_1 dans (9)-(12) par s_1, r_2 , ensuite par s_2, r_3 , etc.

9. Théorème

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = s^0, \quad (13)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} K_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j = K^0. \quad (14)$$

DÉMONSTRATION. C est compact dans R_+^n , donc il existe x^0 tel que $S(x^0) = s^0 = \min S(x)$. La suite s_j est monotone et bornée inférieurement par s^0 , alors elle tend vers une limite $\bar{s} \geq s^0$. Il existe $\bar{x}$ tel que $S(\bar{x}) = \bar{s}$. Comme $r_m = \frac{Lc\sqrt{n}}{2^m} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$, donc si l'on suppose que $\bar{s} > s^0$, alors le petit cube C_i^k contenant le point $\bar{x}$ sera exclu dans une certaine étape pour k assez élevé, et on arrive à $\lim s_j < \bar{s}$ quand $j \rightarrow \infty$, en contradiction avec sa définition.

L'opérateur de représentation assure que tous sommets de bases consécutives restent dans le processus jusqu'à leur exclusion. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \max_{x \in C_i} S(x) - \min_{x \in C_i} S(x) &\leq L \|\arg \max_{x \in C_i} S(x) - \arg \min_{x \in C_i} S(x)\| \\ &\leq L \cdot \max_{x, x' \in C_i} \|x - x'\| \\ &= L \cdot d(C_i) = r_1, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$S(x_{i_1}) - s_0 > r_1 \geq \max_{x \in C_i} S(x) - \min_{x \in C_i} S(x) \geq S(x_{i_1}) - \min_{x \in C_i} S(x)$$

et donc $s_0 < \min_{x \in C_i} S(x)$ pour tout cube C_i exclu par (9), alors l'opérateur d'exclusion ne peut pas éliminer un point de minimum global. Cela justifie (13).

Ensuite, $K_m \subset K_\ell$ pour tout $m > \ell$ par construction. Comme un ou des points de minimum global ne peuvent pas être éliminés dans un sous-cube exclu, alors $x^0 \in K_j$, $\forall j$, et donc $x^0 \in K^0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset$. D'autre part, si $\tilde{x} \in K^0$, alors

$\tilde{x} \in K_j$, $\forall j$, d'où $S(x) - s_{m-1} \leq r_m$, $\forall m$, et donc

$$s^0 = \min_{x \in X} S(x) \leq S(\tilde{x}) \leq s_{m-1} + r_m \rightarrow s^0$$

car $r_m \rightarrow 0$, $s_m \rightarrow s^0$ quand $m \rightarrow \infty$. Alors, $S(\tilde{x}) = s^0$ pour $\forall \tilde{x} \in K^0$ et donc K^0 selon (14) est l'ensemble de points de minimum. $\square$

10. Conclusion

Un algorithme est proposé pour la solution des problèmes de la programmation mathématique définis sur un cube fermé. Cet algorithme n'emploie pas les notions du gradient, ni du sous-gradient, ni de la convexité du domaine. D'autre part, ces notions peuvent être apportées dans la procédure pour accélérer sa convergence. Certaines autres considérations peuvent être introduites [5] pour résoudre des problèmes d'optimisation approximative sur des domaines non fermés et non cubiques.

L'auteur remercie l'arbitre de ses aimables remarques, et l'un de ses collègues de l'Université de Nice pour son aide linguistique.

Références

- [1] ZHENG, Q., JIANG, B. and ZHUANG, S., *A method for finding the global extremum*, Acta Mathematicae Applagatae Sinica, 2 (1978), 161-174 (in Chinese).
- [2] ZHENG, Q., *On optimality conditions of a global extremum*, Numerical Mathematics — A Journal of Chinese Universities, 3 (1981), 273-275 (in Chinese).
- [3] GALPERIN, E.A. and ZHENG, Q., *Nonlinear observation via global optimization methods*, Proc. of the 1983 Conference on Information Sciences and Systems, The Johns Hopkins University, Baltimore, U.S.A., 1983.
- [4] GALPERIN, E.A. and ZHENG, Q., *Nonlinear observation via global optimization methods — the measure theory approach*, SIAM J. Control, à paraître.

- [5] GALPERIN, E.A., *Cubic algorithms for nonlinear optimization*, Bulletin of the American Mathematical Society, à paraître.

*Université de Paris VII
Paris, France*

*Manuscrit reçu le 14 juillet 1983.
Révisé le 12 octobre 1983.*