

THÉORÈMES DE POINT FIXE ET PROCESSUS DE GALTON-WATSON

M. Cosnard et J. Demongeot

Résumé

Nous étudions les points fixes et les cycles de $(1-g)$ (où g est la fonction génératrice d'un processus de Galton-Watson). Nous en déduisons des résultats nouveaux sur la taille de la population à la $n^{\text{ième}}$ génération. Puis, en utilisant un théorème de point fixe pour un opérateur de renormalisation, nous précisons certaines propriétés dans les cas critique et surcritique. Pour terminer, nous appliquons ces résultats à des exemples simples (lois binomiale, géométrique et de Poisson).

Abstract

At first, studying fixed points and cycles of $(1-g)$ (where g is the generating function of a Galton-Watson process), we prove some new results about the size of the n^{th} generation. Next, using a fixed point theorem for a renormalization operator, we make precise certain properties in the critical and supercritical cases. Finally, we apply these results to simple cases (homogeneous binomial, geometric of poissonian reproduction distribution).

0. Introduction

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus de Galton-Watson de fonction génératrice g . Comme dans les travaux de S. Dubuc [10] et de E. Seneta [14], nous montrons que des

techniques itératives, pour des fonctions de $[0,1]$ dans lui-même, sont très utiles dans l'étude de la croissance des générations. Tout d'abord, grâce à l'étude des points fixes et des cycles de $(1-g)$, nous obtiendrons quelques propriétés concernant le comportement asymptotique de la taille de la $n^{\text{ième}}$ génération. Puis nous présenterons une nouvelle démonstration du lemme de base dans le cas critique. Cette démonstration utilise un théorème de point fixe et de nouveaux résultats découlent de ce point de vue: en particulier, nous préciserons la solution de l'équation fonctionnelle qui donne la transformée de Laplace de la loi de la limite de Z_n/m^n dans le cas surcritique (où m est la moyenne de la loi de reproduction).

1. Techniques itératives

Dans cette partie, nous présentons des résultats concernant les propriétés itératives de $(1-g)$ et un théorème de point fixe. Nous utiliserons ces résultats dans le chapitre suivant.

1.1. Propriétés cycliques de $(1-g)$

$(1-g)$ est une fonction strictement décroissante sur $[0,1]$ possédant un point fixe unique s_0 . Comme $(1-g)$ est injective, il est impossible qu'elle possède un cycle d'ordre supérieur à 2.

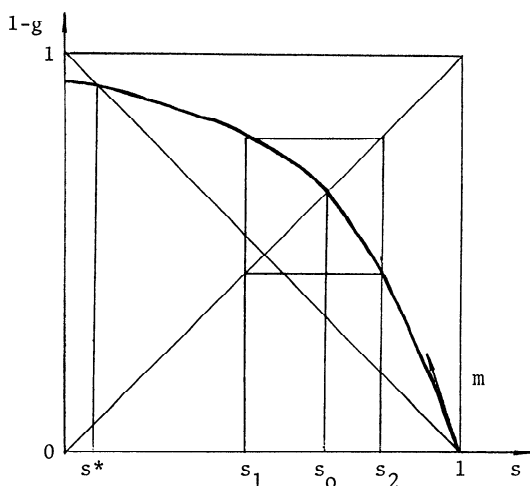


Figure 1. Graphe de $1-g$

PROPOSITION 1.1. Les conditions suivantes sont nécessaires à l'existence d'un cycle d'ordre 2 (s_1, s_2) pour $(1-g)$ c'est-à-dire tel que $(1-g)(s_1) = s_2$ et $(1-g)(s_2) = s_1$:

$$(1) \quad m \geq \frac{s_1}{1-s_2} > 1 ,$$

$$(2) \quad s_0 \geq \frac{1}{2} ,$$

$$(3) \quad s^* < s_1 < s_0 < s_2 < 1-s^*$$

où s^* est le point fixe de g (différent de 1) et m la moyenne de Z_0 .

Remarquons que $(1-g)$ peut posséder plus d'un cycle. Par exemple, tout $s \neq s_0$ est membre d'un cycle d'ordre 2 si :

$$g(s) = 2 - s - 2\sqrt{1-s} .$$

En effet, nous avons $(1-g)^{\circ 2}(s) = s$, pour tout s de $[0,1]$.

De plus, $g(s) = \frac{4}{7}s + \frac{3}{7}s^3$ admet deux cycles d'ordre 2.

W.A. Copell [4] a montré qu'une application continue de $[0,1]$ dans lui-même engendre des suites d'approximations successives convergentes si et seulement si elle ne possède pas de cycle d'ordre 2. D'où la proposition suivante:

PROPOSITION 1.2. Une condition suffisante pour que $(1-g)$ admette un cycle d'ordre 2 est qu'il existe s' dans $[0,1]$ tel que $((1-g)^{\circ n}(s'))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers s_0 .

En pratique, cette condition est inutilisable. Cependant, des travaux de R.S. Stepelman [15] et de M. Cosnard [5] dans lesquels il est montré que $(1-g)'(s_0) < -1$ implique que s_0 est répulsif, nous déduisons le résultat suivant:

PROPOSITION 1.3. Chacune des conditions suivantes est suffisante pour que $(1-g)$ admette un cycle d'ordre 2 attractif:

$$i) \quad g'(s_0) > 1 ,$$

$$ii) \quad (1-g)'(s_0) < -1 ,$$

$$iii) \quad g'(s_0) - g(s_0) - s_0 > 0 ,$$

$$iv) \quad p_1 > p_0 , \quad p_2 \geq \frac{1+p_1}{2} \text{ et } \forall i > 1 , \quad p_{i+1} > \frac{p_i}{i+1} .$$

Remarquons que la condition iv) est vérifiée si l'on prend:

$$g(s) = 3e^{s-1} - 1 - s \quad \text{ou} \quad g(s) = \frac{1+s}{32} + \frac{9s^2}{16} + \frac{3s^3}{(16-8s)} .$$

1.2. Un théorème de point fixe pour g dans le cas critique

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans lui-même telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1 .$$

Nous dirons que f admet un développement asymptotique d'ordre $1+k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), s'il existe $a \neq 0$ et une application continue T telle que:

$$T(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1] , \quad f(x) = x + ax^{1+k} + x^{1+k}T(x) .$$

Nous appelons $P_{a,k}$ l'ensemble de ces fonctions.

Définissons maintenant un opérateur R_α de $P_{a,k}$ dans lui-même.

Soit $\alpha = (\frac{1}{2})^{1/k}$ et $\forall F \in P_{a,k}$,

$$R_\alpha F(x) = \frac{1}{\alpha} F^{\circ 2}(\alpha x) , \quad \forall x \in [0,1] ,$$

où $F^{\circ 2}$ est la fonction composée de F par elle-même: R_α est une application continue de $P_{a,k}$, muni de la norme uniforme, dans lui-même. Nous supposons dans la suite que a est un réel négatif.

Les deux résultats qui suivent sont tirés d'un travail de M. Cosnard [8].

PROPOSITION 1.4. Soient $a \in \mathbb{R}_-^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha = (\frac{1}{2})^{1/k}$. R_α possède dans $P_{a,k}$ le point fixe suivant:

$$f_{a,k}(x) = \frac{x}{(1-kax^k)^{1/k}} .$$

Soit F un élément de $P_{a,k}$. $R_\alpha^{\circ n}$ est la suite des approximations successives engendrée par R_α :

$$R_\alpha^{\circ n} F = R_\alpha(R_\alpha^{\circ n-1} F) .$$

La convergence de cette suite est régie par le:

THÉOREME 1.5. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\frac{1}{2})^{1/k}$ et $F \in P_{a,k}$. $R_\alpha^{\circ n} F$ converge uniformément, quand n tend vers l'infini, vers le point fixe de R_α :

$$\forall x \in [0,1], \quad R_\alpha^{\circ n} F(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} \frac{x}{(1-k\alpha x)^{1/k}}.$$

Appliquons ces résultats à la fonction génératrice g d'un processus de Galton-Watson dans le cas critique. Nous avons:

$$g(1) = 1; \quad g'(1) = 1; \quad g''(1) = -2a > 0.$$

Par conséquent, $1-g(1-s)$ appartient à $P_{a,1}$:

$$F(s) = 1-g(1-s) = s + as^2 + s^2 T(x) \quad \text{avec} \quad T(0) = 0.$$

L'application du Théorème 1.5 donne le:

COROLLAIRE 1.6. Soit g la fonction génératrice d'un processus de Galton-Watson dans le cas critique avec $g''(1) = -2a > 0$. Alors:

- i) $\forall s \in [0,1], \quad R_{\frac{1}{2}}^{\circ n} (1-g(1-s)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} \frac{s}{(1-as)}$
- ii) $\forall s \in [0,1], \quad g^{\circ 2^n}(s) - \left(1 - \frac{1-s}{(1-2^n a(1-s))}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} 0$

2. Etude de la croissance de la population au moyen des propriétés cycliques de $(1-g)$

Dans cette partie, nous supposons que $(1-g)$ admet un cycle d'ordre 2, noté (s_1, s_2) où $s_1 < s_2$. Nous supposons aussi que $Z_0 = 1$ et les événements conditionnels $Z_{n-1} = p$ ne seront considérés que lorsqu'ils seront non négligeables (ce qui est, par exemple, toujours le cas si la loi de reproduction charge tous les entiers).

PROPOSITION 2.1. Conditionnellement à Z_{n-1} , la loi de Z_n/k_1 est telle que:

- 1) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_n/k_1 \leq p | Z_{n-1} = p) \leq c_1^p$.
 2) Si l'on a de plus $s_1 \geq s_2^2$:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z_n/k_2 \geq p | Z_{n-1} = p) \leq \frac{1 - c_2^p}{(c_2^{p/2} - \varepsilon^p)^2}.$$

Les constantes k_1 , k_2 , c_1 , c_2 sont données par :

$$k_1 = \text{Log}(1 - s_2) / \text{Log } s_1 ;$$

$$k_2 = \text{Log}(\varepsilon \sqrt{1 - s_2}) / \text{Log } s_2, \quad \varepsilon \text{ tel que: } \varepsilon \sqrt{1 - s_2} < 1 - s_1 ;$$

$$c_1 = (1 - s_1) / \left(1 - s_2\right)^{\text{Log } s_2 / \text{Log } s_1} ;$$

$$c_2 = (1 - s_1)^2 / (1 - s_2) .$$

DÉMONSTRATION. 1) Des propriétés classiques de Z_n (voir par exemple K.B. Athreya et P.E. Ney [2]), nous déduisons que :

$$\begin{aligned} (1 - s_1)^p &= (g(s_2))^p = E\left(s_2^{Z_n} | Z_{n-1} = p\right) \\ &= E\left(\left(\frac{Z_n}{s_1}\right)^{\text{Log } s_2 / \text{Log } s_1} | Z_{n-1} = p\right) \\ &\leq \left(E\left(s_1^{Z_n} | Z_{n-1} = p\right)\right)^{\text{Log } s_2 / \text{Log } s_1} \\ &= \left(1 - s_2\right)^{p \text{ Log } s_2 / \text{Log } s_1}, \end{aligned}$$

cette dernière inégalité résultant de l'inégalité de Jensen, appliquée à la fonction concave croissante

$$\phi(x) = x^{\text{Log } s_2 / \text{Log } s_1}.$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Markov, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
P\left(s_1^{Z_n} \geq s_1^{pk_1} \mid Z_{n-1} = p\right) &\leq \frac{E\left(\phi\left(s_1^{Z_n}\right) \mid Z_{n-1} = p\right)}{\phi\left(s_1^{pk_1}\right)} \\
&\leq \frac{(1 - s_1)^p}{\left(s_1^{p \log(1-s_2)/\log s_1}\right)^{\log s_2/\log s_1}} \\
&\leq \left(\frac{1 - s_1}{(1 - s_2)^{\log s_2/\log s_1}}\right)^p.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons 1), l'inégalité de Jensen nous assurant que $c_1 < 1$.

2) Nous avons:

$$\begin{aligned}
P(Z_n \geq pk_2 \mid Z_{n-1} = p) &= P\left(s_2^{Z_n} \leq s_2^{pk_2} \mid Z_{n-1} = p\right) \\
&= P\left((1 - s_1)^p - s_2^{Z_n} \geq (1 - s_1)^p - s_2^{pk_2} \mid Z_{n-1} = p\right) \\
&\leq P\left(|s_2^{Z_n} - (1 - s_1)^p| \geq (1 - s_1)^p - s_2^{pk_2} \mid Z_{n-1} = p\right).
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, car:

$$(1 - s_1)^p = E\left(s_2^{Z_n} \mid Z_{n-1} = p\right)$$

et

$$E\left(\left(s_2^{Z_n}\right)^2 \mid Z_{n-1} = p\right) = (g(s_2^2))^p \geq (g(s_2))^2 p = (1 - s_1)^2 p$$

d'où, si $s_2^2 \leq s_1$, nous avons:

$$1 - s_2 = g(s_1) \geq g(s_2^2) \geq (1 - s_1)^2 \text{ et donc } c_2 \leq 1.$$

Nous pouvons alors écrire:

$$\begin{aligned}
& P\left(\left| \frac{Z_n}{s_2} - (1 - s_1)^P \right| \geq (1 - s_1)^P - s_2^{pk_2} \mid Z_{n-1} = p\right) \\
& \leq \frac{g(s_2^2)^P - (1 - s_1)^{2P}}{\left((1 - s_1)^P - s_2^{pk_2}\right)^2} \leq \frac{(1 - s_2)^P - (1 - s_1)^{2P}}{\left((1 - s_1)^P - s_2^{pk_2}\right)^2} \leq \frac{1 - c_2^P}{(c_2^{P/2} - \varepsilon^P)^2} .
\end{aligned}$$

La condition $s_2^2 \leq s_1$ est vérifiée dans le voisinage d'une valeur de bifurcation (voir sous-section 4.1). Le majorant ci-dessus est à comparer à celui obtenu en appliquant l'inégalité de Markov à Z_n :

$$P(Z_n \geq pk_2 \mid Z_{n-1} = p) \leq \frac{E(Z_n \mid Z_{n-1} = p)}{pk_2} = \frac{mp}{pk_2} = \frac{m}{k_2} .$$

Il n'est meilleur que si m est grand et p faible, car si ε est petit, le majorant se comporte comme $c_2^{-P} - 1$, qui est rapidement plus grand que 1.

La première propriété implique que, si Z_{n-1} est suffisamment grand, la loi conditionnelle de Z_n/k_1 charge asymptotiquement moins $[0, Z_{n-1}]$ qu'une loi géométrique de paramètre c_1 .

PROPOSITION 2.2. Si $s_1 \geq \frac{1}{2}$, la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$Y_n = \begin{cases} \frac{Z_n}{s_1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{Z_n}{s_2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est une surmartingale convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire V .

DÉMONSTRATION. Elle est immédiate, en remarquant que :

$$E\left(\frac{Z_{2n}}{s_1} \mid Z_{2n-1} = p\right) = g(s_1)^P = (1 - s_2)^P \leq s_2^P$$

car $s_2 \geq$

La Proposition 2.2 reste vraie en échangeant les rôles de s_1 et de s_2 . Comme la proposition précédente, celle-ci dit intuitivement que l'accroissement $Z_{2n+1} - Z_{2n}$ n'est ni très petit, ni très grand.

Si le cycle (s_1, s_2) est attractif, alors quel que soit s de $[0,1]$, les suites $((1-g)^{\circ n}(s))^{\bar{Z}_n}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $((1-g)^{\circ n+1}(s))^{\bar{Z}_{n+1}}_{n \in \mathbb{N}^*}$ possèdent le même comportement asymptotique que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

PROPOSITION 2.3. Soient t_n et t'_n les suites définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_1 = g^{\circ n}(t_n), \quad s_2 = g^{\circ n}(t'_n).$$

Si W (resp. W') est la limite presque sûre de la martingale $(t_n^{\bar{Z}_n})$ (resp. $(t'_n)^{\bar{Z}_n}$) alors il existe un réel positif k tel que: si $1 < m < +\infty$,

$$s_1 = E(W) = 1 - E(W^{km}), \quad s_2 = E(W^k) = 1 - E(W^m)$$

où k est défini par:

$$1 > k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{Log } t'_n / \text{Log } t_n)$$

ce qui implique que $W' \stackrel{p.s.}{=} W^k$.

DÉMONSTRATION. L'existence de W et de W' est prouvée dans K.B. Athreya et P.E. Ney [2] et celle de k est assurée par le théorème de Khinchine relatif à l'unicité des constantes de normalisation. Les deux relations ne font ensuite que traduire à la limite les propriétés:

$$s_1 = (1-g)(s_2) \quad \text{et} \quad s_2 = (1-g)(s_1)$$

et le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{Log } t_n / \text{Log } t_{n-1}) = 1/m$.

Suivant les valeurs de k et de m , les relations précédentes permettent, par application de l'inégalité de Markov, de préciser la loi de W .

3. Etude des propriétés asymptotiques de g au moyen du théorème de point fixe

3.1. Cas critique

Si $m = 1$, l'application directe du Théorème 1.5 nous conduit à une nouvelle interprétation en terme de point fixe d'opérateur du Lemme de Base de Kesten, Ney et Spitzer [12]. La démonstration initiale repose sur le fait que:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{g(s) - s}{(1 - s)^2} = \frac{g''(1)}{2} = -a.$$

C'est une propriété voisine qu'exploite de manière directe la Proposition 1.4 concernant le point fixe de l'opérateur de renormalisation.

PROPOSITION 3.1. 1) Dans le cas critique, le comportement asymptotique de $g \circ 2^n$ est le même que celui d'une loi géométrique de même variance, c'est-à-dire telle que:

$$g(s) = f_a(s) = 1 - \frac{1 - s}{1 - a(1 - s)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i s^i$$

où

$$p_0 = 1 - b/(1 - c), \quad \forall i \geq 1, \quad p_i = bc^{i-1}$$

$$b = (1 - c)^2; \quad c = \frac{a}{a - 1}.$$

2) Le comportement de la loi géométrique est donné par:

$$\forall s \in [0, 1], \quad f_a^{\circ 2^n}(s) = 1 - \frac{1 - s}{1 - 2^n a(1 - s)}$$

3) Si la loi de Z_0 possède des moments et des p_i tels que:

$$i) \quad \forall i; \quad 1 \leq i \leq m, \quad E \left(\prod_{j=1}^m (Z_0 - j) \right) = g^{(i)}(1) \leq f_a^{(i)}(1) < +\infty;$$

$$ii) \quad \forall i; \quad 0 \leq i \leq n, \quad p_i = \frac{1}{i!} g^{(i)}(0) \leq \frac{1}{i!} f_a^{(i)}(0);$$

alors ces inégalités sont encore valables pour les moments et les $p_{i,n}$

correspondant à Z_n .

4) La propriété 3) reste vraie si nous remplaçons le signe $\leq$ par le signe $\geq$ entre $g^{(i)}$ et $f_a^{(i)}$.

DÉMONSTRATION. 1) et 2) résultent directement du Théorème 1.5 et du Corollaire 1.6. 3) et 4) proviennent de

$$(\forall i, 0 \leq i \leq m, G^{(i)} \leq F^{(i)}) \Rightarrow (\forall i, 0 \leq i \leq m, (R_{\frac{1}{2}}G)^{(i)} \leq (R_{\frac{1}{2}}F)^{(i)}) .$$

Notons que, dans [1], M. Adès, J.P. Dion et G. Labelle ont établi une relation entre la fonction génératrice ψ de la loi de Poisson et la fonction génératrice f de la loi géométrique de même moyenne λ dans le cas surcritique ($\lambda > 1$), en étudiant la fonction H_λ telle que:

$$\psi = H_\lambda^{-1} \circ f \circ H_\lambda .$$

Ceci implique en particulier que:

$$\psi^{\circ n} = H_\lambda^{-1} \circ f^{\circ n} \circ H_\lambda .$$

Ici, dans le cas critique ($\lambda = 1$), nous avons:

$$\|\psi^{\circ 2^n} - f^{\circ 2^n}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 .$$

Nous avons donc établi, dans un cas non étudié dans [1], une connexion entre la loi de Poisson et la loi géométrique.

3.2. Cas surcritique

Considérons l'application $h(x) = x^{1/m}$, où $m \neq 1$. Nous avons alors: $(g \circ h)'(1) = 1$ et nous sommes ramenés au cas critique.

Avec les notations de la Proposition 2.3, si ϕ est la transformée de Laplace de la loi de W , nous avons:

$$\forall s \in [0,1], \quad \phi(s) = E(s^W) = g \circ \phi \circ h(s) .$$

Notons que ce résultat est la conséquence du résultat suivant, énoncé dans Athreya et Ney ([2], p. 25): comme Z_n/m^n converge presque partout vers W , nous avons

$$\forall s \in [0,1], \quad g^{\circ n} \circ h^{\circ n}(s) = E \left[\left(s^{1/m^n} \right)^{Z_n} \right] \rightarrow E(s^W) = \phi(s) .$$

PROPOSITION 3.2. La fonction ϕ est telle que:

$$\forall s \in [0,1], \quad \phi(s) \geq s .$$

DÉMONSTRATION. Après application de l'inégalité de Jensen, nous obtenons, si $m > 1$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$h^{\circ n} \circ g^{\circ n} \geq (h \circ g)^{\circ n} \geq (g \circ h)^{\circ n} \geq g^{\circ n} \circ h^{\circ n} .$$

Comme $g \circ h$ appartient à un certain $P_{a,k}$, k dépendant du degré de la première dérivée $(g \circ h)^{(k)}$ qui vérifie:

$$k \geq 1 ; \quad \forall j ; \quad 2 \leq j \leq k, \quad (g \circ h)^{(j)} = 0, \quad (g \circ h)^{(k+1)} = (k+1)!a .$$

Nous connaissons donc le comportement asymptotique de $(g \circ h)^{\circ 2^n}$: $\forall s \in [0,1]$,

$$(g \circ h)^{\circ 2^n}(s) - 1 + \frac{1-s}{(1-2^{n/k} a_k (1-s)^k)^{1/k}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} 0 .$$

Remarquons que: $\forall s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{\circ -2^n} \circ \left(h^{\circ 2^n} \circ g^{\circ 2^n} \right) \circ h^{\circ 2^n}(s) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{\circ -2^n} \circ ((g \circ h))^{\circ 2^n} \circ h^{\circ 2^n}(s) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1 - s^{1/m^{2^n}}}{\left(1 - 2^{n/k} a_k \left(1 - s^{1/m^{2^n}} \right)^k \right)^{1/k}} \right]^{m^{2^n}} = s . \end{aligned}$$

REMARQUE. Notons que ce résultat renforce celui prouvé par S. Dubuc dans [10].

4. Application à des cas simples

Dans cette partie, nous appliquons les techniques itératives, présentées en première partie, à des cas particuliers.

4.1. Existence de valeurs de bifurcation pour des lois classiques

Dans tous les cas qui suivent, l'application des propositions de la première partie permet d'affirmer qu'il existe une valeur de bifurcation pour le paramètre des lois étudiées, valeur frontière commune de deux régions paramétriques. Dans l'une, $(1 - g)$ admet un point fixe attractif s_0 et pas de cycles. Dans l'autre, $(1 - g)$ admet un cycle attractif (s_1, s_2) entourant un point fixe répulsif s_0 .

4.1.1. Familles d'au plus deux enfants

Si nous supposons que:

$$\forall k \geq 3, \quad p_k = 0,$$

alors la valeur de bifurcation est donnée par:

$$p_2 = p_0 + 2\sqrt{p_0}.$$

Si $p_2 = p_0 + 2\sqrt{p_0}$, $(1 - g)$ admet un cycle attractif d'ordre 2. Une condition nécessaire pour que cette condition soit satisfaite est que:

$$p_0 \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 0,1334.$$

4.1.2. Loi géométrique

Nous avons $p_0 = 1 - b/(1 - c)$ et $p_i = bc^{i-1}$, $\forall i \geq 1$ avec:

$$0 \leq c \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq b \leq 1 - c.$$

Si $b + c < 1$, $(1 - g)$ a un point fixe attractif et, dans le cas limite, $b + c = 1$, $(1 - g)$ admet une infinité de cycles d'ordre 2.

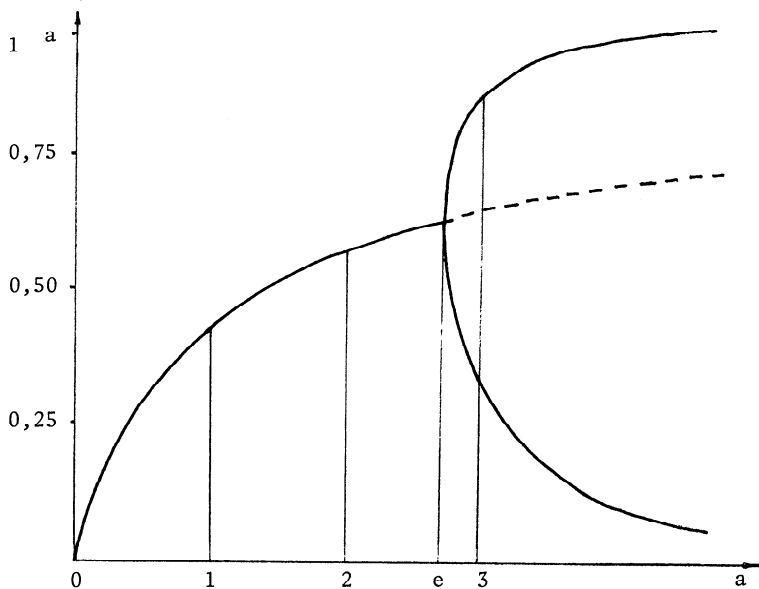
4.1.3. Loi de Poisson

La valeur de bifurcation est e . Si λ est strictement supérieur à e , $(1 - g)$ admet un cycle attractif d'ordre 2. Dans la Table 1 et la Figure 2, nous montrons l'évolution de s^* et de (s_1, s_2) en fonction de λ .

λ	s^*	s_1	s_2
0,5	0,296533		
1,0	0,432857		
2,0	0,573697		
e	0,632120559		
2,8	0,637548	0,469660258	0,773486623
3,0	0,650031	0,335260	0,863880
3,5	0,677060	0,179991	0,943303
10	0,825447	0,000456	0,999954

Table 1

Les valeurs de s^* et de (s_1, s_2) sont listées pour différentes valeurs de λ . Remarquons que, pour $\lambda \leq e$, s^* est attractif et (s_1, s_2) n'existent pas. Pour $\lambda \geq e$, s^* existe toujours mais est répulsif, (s_1, s_2) apparaissent et forment un cycle attractif.

Figure 2. Diagramme de bifurcations de $1 - g(x) = 1 - e^{a(x-1)}$.

4.1.4. Loi binômiale $B(n,p)$

La valeur de bifurcation est $p = (n+1)^{n-1}/n^n$. Pour une valeur de p supérieure, $(1-g)$ admet un cycle d'ordre 2 attractif. On peut observer, dans les conditions de tendance de la loi binômiale vers la loi de Poisson, que la valeur de bifurcation tend vers e .

4.2. Exemple de convergence dans le cas surcritique

Si nous supposons que g est la fonction génératrice d'une loi géométrique, nous avons:

$$g(x) = 1 - \frac{m(1-x)}{2-x}.$$

On peut alors remarquer que

$$g^{\circ n}(x) = \frac{1-m+(1-m^{n+1})(1-x)}{1-m+(1-m^n)(1-x)}.$$

Si nous posons $h(x) = x^{1/m}$, nous obtenons

$$g^{\circ n} \circ h^{\circ n}(x) = \frac{1-m+(1-m^{n+1})(1-x^{1/m^n})}{1-m+(1-m^n)(1-x^{1/m^n})}.$$

Si $m < 1$, $g^{\circ n} \circ h^{\circ n}(x)$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Dans le cas surcritique:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{\circ n} \circ h^{\circ n}(x) = 1 - \frac{(m-1)\text{Log } x}{m-1-\text{Log } x} = \phi(x)$$

et ϕ est solution de $\phi = g \circ \phi \circ h$.

Dans ce cas, la Proposition 3.2 est vérifiée.

5. Conclusion

Nous avons ainsi montré comment il était possible d'appliquer des résultats concernant les propriétés itératives de la fonction génératrice g d'un

processus de Galton-Watson ou de $(1 - g)$. L'existence de points fixes ou de cycles pour ces fonctions nous a permis de préciser des propriétés classiques sur le comportement asymptotique dans les cas critiques et surcritiques et sur la taille de la $n^{\text{ième}}$ génération conditionnellement à la taille de la $(n-1)^{\text{ième}}$. L'application directe à des lois classiques simples montre qu'en pratique, ces résultats sont faciles à utiliser.

Remerciements

Nous remercions le Professeur N. Gastinel pour ses remarques judicieuses qui sont à l'origine de cette étude et l'arbitre pour sa lecture attentive de la première version de ce travail.

Bibliographie

- [1] ADES, M., DION, J.P. et LABELLE, G., *Sur l'itération des fonctions génératrices de probabilité*, Ann. Sc. Math. Québec, 5 (1981), 17-34.
- [2] ATHREYA, K.B. et NEY, P.E., *Branching Processes*, Springer Verlag, Berlin (1972).
- [3] COLLET, P. et ECKMANN, J.P., *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Progress in Physics 1 (1980).
- [4] COPPEL, W.A., *The solution of equations by iteration*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 51 (1952), 41-43.
- [5] COSNARD, M., *Caractérisations de la convergence locale de la méthode des approximations successives*, RAIRO Anal. Num., 11 (1977), 225-240.
- [6] COSNARD, M., *On the behavior of successive approximations*, SIAM J. Num. Anal., 16 (1979), 300-310.
- [7] COSNARD, M. et DEMONGEOT, J., *Itérations dans un processus de Galton-Watson*, Biométrie et génétique, Legay et Al., éditeurs (1980).

- [8] COSNARD, M., *Etude du comportement d'itérations d'un opérateur de renormalisation*, C.R. Acad. Sc., 293 (1981), 619-621.
- [9] DUBUC, S., *Problèmes relatifs à l'itération de fonctions suggérés par les processus en cascade*, Ann. Inst. Fourier, 21 (1971), 171-251.
- [10] DUBUC, S., *La fonction de Green d'un processus de Galton-Watson*, Studia Math., 34 (1970), 69-87.
- [11] GUMOWSKI, I. et MIRA, C., *Dynamique chaotique*, CEPADUES Editions, Toulouse (1980).
- [12] KESTEN, H., NEY, P. et SPITZER, F., *The Galton-Watson process with mean one and finite variance*, Theor. Prob. and Appl., 11 (1966), 513-540.
- [13] OSTER, G. et GUCKENHEIMER, J., *Bifurcation phenomena in population models*, Hopf Bifurcation and its Applications, Marsden et McCracken, éditeurs (1976).
- [14] SENETA, E., *Normed-convergence theory for supercritical branching processes*, Stoch. Proc. Appl., 3 (1976), 35-43.
- [15] STEPELMAN, R.S., *A characterization of local convergence for fixed point iterations in $\mathbb{R}$* , SIAM J. Num. Anal., 12 (1975), 887-894.

Laboratoire I.M.A.G.
 Université de Grenoble
 Boîte Postale 63
 38402 St-Martin d'Hères Cédex

Manuscrit reçu le 22 septembre 1982.
 Révisé le 22 décembre 1982.