

COMPACITÉ DE L'OPÉRATEUR $A(x,D) - A(x,D)$ DANS L'ESPACE $F^{-1}(L^1(\mathbb{R}^n))$ ¹

S. Zaidman

Introduction

Dans l'article [4], on associe à tout "symbole" $a(x,\xi)$ deux opérateurs pseudo-différentiels, notés $A(x,D)$ et $A(x,D)$ et on établit que leur différence est un opérateur compact dans certains espaces hilbertiens. Une présentation détaillée se trouve dans [5], et une continuation est donnée dans [6].

Dans la présente note, nous prouvons un résultat de la même nature, les espaces de définition étant formés maintenant des distributions tempérées dont la transformation de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Les conditions imposées au symbole sont semblables, mais quand même différentes de celles données dans [4]-Appendix, où l'on annonce, avec des indications sur la démonstration, un résultat de compacité pour l'opérateur $A - A$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Théorème A.1 de [4]).

1. Considérons donc l'espace de Banach $\mathcal{B} = F^{-1}(L^1(\mathbb{R}^n))$ qui est formé des distributions tempérées T dont la transformée de Fourier $\tilde{T} = FT$ appartient à l'espace des fonctions intégrables $L^1(\mathbb{R}^n)$. La norme dans $\mathcal{B}$ est, par définition:

$$\|T\|_{\mathcal{B}} = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{T}(\xi)| d\xi = \|FT\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (1.1)$$

(voir [3] pour l'étude d'une classe d'espaces incluant $\mathcal{B}$).

¹ Ce travail a été effectué pendant que l'auteur bénéficiait d'une subvention du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie, Canada.

On se donne maintenant — en suivant essentiellement l'Appendix de [4] — une classe assez générale de symboles $a(x, \xi)$, qui sont des fonctions mesurables bornées, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, représentables comme transformation de Fourier inverse partielle

$$a(x, \xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \lambda} \tilde{a}(\lambda, \xi) d\lambda \quad (1.2)$$

la fonction $\tilde{a}(\lambda, \xi)$ étant mesurable, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ et vérifiant une majoration uniforme

$$|\tilde{a}(\lambda, \xi)| \leq k(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

où $k(\lambda)$ est intégrable (Lebesgue) sur $\mathbb{R}^n$.

Il en résulte la continuité de la fonction $a(x, \xi)$ par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$ ainsi que la relation

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x, \xi) = 0^1. \quad (1.4)$$

On associe maintenant à tout symbole $a(x, \xi)$ deux opérateurs linéaires $A(x, D)$ et $A(x, D)$, de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$, dont la définition est donnée par les formules suivantes:

$$A(x, D)u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} G(\xi) d\xi \quad (1.5)$$

où

$$G(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{a}(\xi - \eta, \xi) \tilde{u}(\eta) d\eta, \quad u \in \mathcal{B},$$

$$A(x, D)u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \eta} a(x, \eta) \tilde{u}(\eta) d\eta. \quad (1.6)$$

On a évidemment l'inégalité

$$\|G(\xi)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.7)$$

¹ Le cas plus général où $a(x, \xi) = a(\infty, \xi) + a'(x, \xi)$ et $a'(x, \xi)$ est défini comme plus haut n'intéresse pas dans cet article, où l'on étudie seulement la différence $A - A$ (voir Remarque, p. 542 de [6]).

Donc, pour $u \in \mathcal{B}$, $A(x,D)u \in \mathcal{B}$ aussi, et on a

$$\|Au\|_{\mathcal{B}} = \|F(Au)\|_{L^1} = \|G\|_{L^1} \leq \|k\|_{L^1} \|u\|_{\mathcal{B}}. \quad (1.8)$$

En ce qui concerne maintenant l'opérateur $A(x,D)$, on peut établir facilement (voir [7]) la formule de représentation équivalente

$$A(x,D)u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{a}(\xi-\eta, \eta) \tilde{u}(\eta) d\eta] d\xi, \quad u \in \mathcal{B} \quad (1.9)$$

et donc, de nouveau, la majoration

$$\|Au\|_{\mathcal{B}} \leq \|k\|_{L^1} \|u\|_{\mathcal{B}}. \quad (1.10)$$

2. Dans cette section, on démontre une condition suffisante de compacité (relative) dans l'espace $\mathcal{B}$. Un résultat bien connu, sur la caractérisation de la compacité relative d'un sous-ensemble K de l'espace $\mathcal{B}$, consiste dans les trois conditions:

- a) $\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{k}(\xi)| d\xi \leq C, \quad \forall k \in K;$
- b) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \geq R} |\tilde{k}(\xi)| d\xi = 0, \quad \text{uniformément pour } k \in \mathcal{B};$
- c) $\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{k}(\xi+\tau) - \tilde{k}(\xi)| d\xi = 0, \quad \text{uniformément pour } k \in \mathcal{B}.$

(Ici, $\tilde{k} = Fk$ - la transformée de Fourier de $k \in K$).

Nous allons montrer comment, en utilisant ce résultat, on peut en déduire le suivant.

LEMME de compacité. Soit K un sous-ensemble de $\mathcal{B}$, vérifiant les conditions suivantes:

- a) Pour tout nombre réel $R > 0$, on a que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{|\xi| \leq R} |\tilde{u}(\xi+h) - \tilde{u}(\xi)| d\xi = 0 \quad (2.1)$$

uniformément pour $u \in K$.

$\beta)$ Il existe une fonction continue $\phi(t)$, $0 \leq t < \infty \rightarrow \mathbb{R}^+$, telle que $\phi(t) \geq \gamma > 0$, $\forall t \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty$, et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|\xi|) |\tilde{u}(\xi)| d\xi \leq C, \text{ pour tout } u \in K. \quad (2.2)$$

Alors K est relativement compact dans B .

DÉMONSTRATION. Premièrement, on trouve que $\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(\xi)| d\xi \leq C$, pour $u \in K$ (conséquence de β).

Ensuite, $\forall M > 0$, $\exists R_M$ telle que si $t \geq R$, on a $\phi(t) \geq M$. Il suit que $M \int_{|\xi| \geq R} |\tilde{u}(\xi)| d\xi \leq C$, pour $u \in K$, pourvu que $R > R_M$, ce qui entraîne b).

Finalement, il s'agit de prouver que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \geq R+1} |\tilde{u}(\xi+\tau) - \tilde{u}(\xi)| d\xi = 0$ uniformément pour $u \in K$.

Remarquons premièrement que, pour $\tau \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi + \tau| \geq R\}$ est mesurable dans $\mathbb{R}^n$ - la fonction, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \rightarrow |\xi + \tau|$ étant continue.

Ensuite, si $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq R+1$ et $\tau \in \mathbb{R}^n$ avec $|\tau| \leq 1$, on a $|\xi + \tau| \geq |\xi| - |\tau| \geq R$; l'ensemble $\{\xi; |\xi| \geq R+1\}$ est contenu dans $\{\xi; |\xi + \tau| \geq R\}$; par conséquent on aura

$$\int_{|\xi| \geq R+1} |\tilde{u}(\xi+\tau)| d\xi \leq \int_{|\xi+\tau| \geq R} |\tilde{u}(\xi+\tau)| d\xi = \int_{|\xi| \geq R} |\tilde{u}(\xi)| d\xi$$

(pourvu que $|\tau| \leq 1$).

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \geq R+1} |\tilde{u}(\xi+\tau) - \tilde{u}(\xi)| d\xi &\leq \int_{|\xi| \geq R} |\tilde{u}(\xi)| d\xi + \int_{|\xi| \geq R+1} |\tilde{u}(\xi)| d\xi \\ &\leq 2 \int_{|\xi| \geq R} |\tilde{u}(\xi)| d\xi \end{aligned}$$

qui converge à 0 pour $R \rightarrow \infty$, uniformément pour $u \in K$.

Cela prouve le Lemme de compacité.

3. Nous soumettons les symboles $a(x, \xi)$ à certaines conditions restrictives (semblables, mais quand même différentes) des conditions qu'on trouve dans [4] - Appendix, ce qui permettra de prouver notre résultat principal, c'est-à-dire la compacité de l'opérateur $A(x, D) - \tilde{A}(x, D)$ de B dans B . Précisément, nous supposons que (la fonction $k(\lambda)$ étant celle qui apparaît dans (1.3))

$$i) \quad (1 + |\lambda|)k(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^n) .$$

ii) Il existe une fonction continue $\varphi(t)$, $0 \leq t < \infty \rightarrow (0, \infty)$, vérifiant $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ et de façon que l'inégalité

$$|\tilde{a}(\lambda, \xi) - \tilde{a}(\lambda, \tau)| \leq (1 + |\xi - \tau|)\varphi(|\xi|)k(\lambda) , \quad \lambda \in \mathbb{R}^n , \quad \xi \in \mathbb{R}^n , \quad \tau \in \mathbb{R}^n$$

iii) On a que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x| |a(x, \xi)| \, dx < \infty$$

et que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{|\xi| \leq \Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |a(x, \xi+h) - a(x, \xi)| \, dx \, d\xi = 0$$

pour tout $\Lambda > 0$.

On est maintenant en mesure d'énoncer le

THÉOREME. Si le symbole $a(x, \xi)$ vérifie i)-ii)-iii), l'opérateur associé $A(x, D) - \tilde{A}(x, D)$ transforme tout ensemble borné dans B dans un ensemble relativement compact de B .

DÉMONSTRATION. Posons $T = A - \tilde{A}$ et soit Ω un ensemble borné dans B : on a

donc $\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(\xi)| d\xi \leq C$, $\forall u \in \Omega$. On prouve que l'ensemble $K = T(\Omega)$ vérifie $\alpha)$ et $\beta)$ du Lemme de compacité.

Premièrement, nous allons établir séparément qu'on a les limites:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{|\xi| \leq \Lambda} |\widetilde{Au}(\xi+h) - \widetilde{Au}(\xi)| d\xi = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{|\xi| \leq \Lambda} |\widetilde{\bar{A}u}(\xi+h) - \widetilde{\bar{A}u}(\xi)| d\xi = 0$$

pour tout $\Lambda > 0$ et uniformément pour $u \in \Omega$.

On utilise les formules, précédemment justifiées, selon lesquelles on a

$$\widetilde{Au}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{a}(\xi-\eta, \xi) \tilde{u}(\eta) d\eta$$

et

$$\widetilde{\bar{A}u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{a}(\xi-\eta, \eta) \tilde{u}(\eta) d\eta, \text{ et cela } \forall u \in F^{-1}(L^1(\mathbb{R}^n)).$$

On en déduit que

$$\widetilde{Au}(\xi+h) - \widetilde{Au}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} [\tilde{a}(\xi+h-\eta, \xi+h) - \tilde{a}(\xi-\eta, \xi)] \tilde{u}(\eta) d\eta$$

et

$$\widetilde{\bar{A}u}(\xi+h) - \widetilde{\bar{A}u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} [\tilde{a}(\xi+h-\eta, \eta) - \tilde{a}(\xi-\eta, \eta)] \tilde{u}(\eta) d\eta, \quad \forall u \in \mathcal{B}.$$

En vue d'une majoration de la première expression, on commence avec l'identité évidente:

$$\tilde{a}(\xi+h-\eta, \xi+h) - \tilde{a}(\xi-\eta, \xi) = \tilde{a}(\xi+h-\eta, \xi+h) - \tilde{a}(\xi-\eta, \xi+h) + \tilde{a}(\xi-\eta, \xi+h) - \tilde{a}(\xi-\eta, \xi).$$

Remarquons aussi que $a(x, \xi)$ est intégrable dans $\{x, |x| \leq 1\}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Pour $|x| \geq 1$, on a $|a(x, \xi)| \leq |x| |a(x, \xi)|$ et donc $\int_{\mathbb{R}^n} |a(x, \xi)| dx < \infty$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Comme $\tilde{a}(\lambda, \xi)$ est aussi la transformation de Fourier (partielle au sens de $S'(\mathbb{R}^n)$) de $a(x, \xi)$, on trouve que

$$\tilde{a}(\lambda, \xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \lambda} a(x, \xi) \, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

(au sens habituel). On pourra donc écrire la représentation suivante:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\xi+h-\eta, \xi+h) - \tilde{a}(\xi-\eta, \xi+h) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot (\xi+h-\eta)} a(x, \xi+h) \, dx \\ &\quad - (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot (\xi-\eta)} a(x, \xi+h) \, dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot (\xi-\eta)} [e^{-ix \cdot h} - 1] a(x, \xi+h) \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant la majoration $|e^{-ix \cdot h} - 1| \leq |x| |h|$ (voir [6], p. 537), on obtient l'inégalité

$$|\tilde{a}(\xi+h-\eta, \xi+h) - \tilde{a}(\xi-\eta, \xi+h)| \leq C|h| \int_{\mathbb{R}^n} |x| |a(x, \xi+h)| \, dx \leq C_1|h|.$$

Ensuite on a aussi que

$$\tilde{a}(\xi-\eta, \xi+h) - \tilde{a}(\xi-\eta, \xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot (\xi-\eta)} [a(x, \xi+h) - a(x, \xi)] \, dx$$

et donc la majoration

$$|\tilde{a}(\xi-\eta, \xi+h) - \tilde{a}(\xi-\eta, \xi)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |a(x, \xi+h) - a(x, \xi)| \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

De ces inégalités, on peut déduire des majorations pour l'intégrale

$$\int_{|\xi| \leq \Lambda} |\widetilde{Au}(\xi+h) - \widetilde{Au}(\xi)| \, d\xi.$$

En fait, on a:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{Au}(\xi+h) - \widetilde{Au}(\xi)| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{a}(\xi+h-\eta, \xi+h) - \widetilde{a}(\xi-\eta, \xi+h)| |\widetilde{u}(\eta)| \, d\eta \\
&\quad + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{a}(\xi-\eta, \xi+h) - \widetilde{a}(\xi-\eta, \xi)| |\widetilde{u}(\eta)| \, d\eta \\
&\leq C_1 |h| \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{u}(\eta)| \, d\eta + C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |a(x, \xi+h) - a(x, \xi)| \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{u}(\eta)| \, d\eta \right) \\
&\leq C_2 (|h| + \int_{\mathbb{R}^n} |a(x, \xi+h) - a(x, \xi)| \, dx), \quad \forall u \in \Omega
\end{aligned}$$

(Ω étant un ensemble borné de B), et donc immédiatement, pour tout $\Lambda > 0$,

$$\int_{|\xi| \leq \Lambda} |\widetilde{Au}(\xi+h) - \widetilde{Au}(\xi)| \, d\xi \leq C_2 |h| \int_{|\xi| \leq \Lambda} d\xi + C_2 \int_{|\xi| \leq \Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |a(x, \xi+h) - a(x, \xi)| \, dx d\xi.$$

L'expression à droite tend vers 0 si $h \rightarrow 0$, ce qui entraîne la convergence cherchée (uniforme dans $u \in \Omega$) pour l'intégrale à gauche.

Maintenant, la majoration de l'intégrale similaire relative à l'opérateur A est légèrement plus facile à obtenir. Comme plus haut, on aura la représentation:

$$\widetilde{a}(\xi+h-\eta, \eta) - \widetilde{a}(\xi-\eta, \eta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} [e^{-ix \cdot (\xi+h-\eta)} - e^{-ix \cdot (\xi-\eta)}] a(x, \eta) \, dx$$

donc la majoration

$$\begin{aligned}
|\widetilde{a}(\xi+h-\eta, \eta) - \widetilde{a}(\xi-\eta, \eta)| &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix \cdot h} - 1| |a(x, \eta)| \, dx \\
&\leq C_1 |h| \int_{\mathbb{R}^n} |x| |a(x, \eta)| \, dx \leq C_2 |h|;
\end{aligned}$$

il en découle l'inégalité

$$|\widetilde{Au}(\xi+h) - \widetilde{Au}(\xi)| \leq C^1 |h| \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{u}(\eta)| \, d\eta \leq C_2 |h|,$$

pour $u \in \Omega$ et enfin, comme plus haut,

$$\int_{|\xi| \leq \Lambda} |\widetilde{Au}(\xi+h) - \widetilde{Au}(\xi)| \, d\xi \leq C_2 |h| \int_{|\xi| \leq \Lambda} d\xi \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0, \quad \forall \Lambda > 0.$$

On a terminé ainsi la vérification de la condition α) du Lemme de compacité. Maintenant, on vérifie β) avec $\phi(t) = \frac{1}{\varphi(t)}$.

Premièrement, remarquons que $\phi(t)$ étant > 0 pour tout $t \geq 0$, $\phi(t)$ sera définie et > 0 aussi $\forall t \geq 0$; elle est continue, tout comme $\varphi(t)$; aussi $\phi(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc $\phi(t) > 1$ pour $t \geq t_1$. Soit $\gamma_1 = \inf_{0 \leq t \leq t_1} \phi(t)$. on a que $\gamma_1 > 0$, et on pose $\gamma = \inf(1, \gamma_1)$; γ est > 0 et $\phi(t) \geq \gamma$, $\forall t \geq 0$. Nous allons donc établir une majoration

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|\xi|) |\widetilde{(A-A)u}(\xi)| \, d\xi \leq C, \quad \forall u \in \Omega.$$

Le terme sous le signe intégral est

$$\phi(|\xi|) \left| \int_{\mathbb{R}^n} [\widetilde{a}(\xi-\eta, \xi) - \widetilde{a}(\xi-\eta, \eta)] \widetilde{u}(\eta) \, d\eta \right|$$

qu'on peut majorer par

$$\phi(|\xi|) \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |(\xi-\eta)|) \phi(|\xi|) k(\xi-\eta) |\widetilde{u}(\eta)| \, d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi-\eta|) k(\xi-\eta) |\widetilde{u}(\eta)| \, d\eta.$$

Alors, on a que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(|\xi|) |\widetilde{Tu}(\xi)| \, d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi-\eta|) k(\xi-\eta) |\widetilde{u}(\eta)| \, d\eta \, d\xi \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\lambda|) k(\lambda) \, d\lambda \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{u}(\eta)| \, d\eta \right) \leq C \end{aligned}$$

pour $u \in \Omega$. C.Q.F.D.

Références

- [1] ANDREOTTI, A., *Operatori Pseudo-Differenziali*, Note di Sergio Spagnolo, Università degli Studi di Pisa, 1966-1967.

- [2] FRIEDRICHS, K.O., *Pseudo-Differential Operators; An Introduction*, Revised Edition, New York University, April 1970.
- [3] HÖRMANDER, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, New York Inc., 1969.
- [4] KOHN, J.J., NIRENBERG, L., *An algebra of pseudo differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 18 (1965), 269-305.
- [5] ZAIDMAN, S., *Pseudo-differential operators*, Ann. Mat. Pura ed Appl. (IV), Vol. XCII (1972), 345-399.
- [6] ZAIDMAN, S., *Certaines classes d'opérateurs pseudo-différentiels*, Journ. Math. Anal. Appl., Vol. 30, No 3, June 1970, 522-563.
- [7] ZAIDMAN, S., *Some inequalities for Kohn-Nirenberg pseudo-differential operators*, Ann. sc. math. Québec, Vol. II, No 1, 1978, 143-165.

Département de mathématiques et
de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, P. Qué.
H3C 3J7

Manuscrit reçu le 20 octobre 1982.
Révisé le 3 mars 1983.