

CONTINUITÉ DES CARACTÈRES DANS LES ALGÈBRES UNIFORMÉMENT A-CONVEXES

Mohamed Oudadess¹

Abstract

Let E be a commutative unitary complete uniformly A -convex algebra. We show that every character (resp. positive functional on) of E is bounded. If E is Fréchet, it is locally m -convex by a theorem of E.A. Michael (cf. [10]), and every character is continuous.

Moreover we obtain the result that the spectrum of every element of E is compact.

Dans cet article, nous donnons une réponse positive au problème de Michael (cf. [1] ou [10]) dans certaines algèbres localement multiplicativement convexes (a.l.m.c.). En fait, nous démontrons que tout caractère d'une algèbre localement uniformément A -convexe (a.l.u. A -convexe) commutative unitaire complète est borné. Si cette dernière est de Fréchet, c'est une a.l.m.c., d'après un théorème de Michael, et dans ce cas, tous ses caractères sont continus.

A.C. Cochran et d'autres chercheurs se sont intéressés aux algèbres localement A -convexes (a.l. A -convexes) mais ils ne disent rien sur la continuité des

¹ Boursier du projet conjoint M.A.I.Q.-A.C.D.I. "Centres pédagogiques régionaux Maroc"

caractères. A.C. Cochran a mis en évidence, sur chaque a.l.A-convexe (E, τ) , une topologie d'a.l.m.c. notée $m(E)$ (cf. [5]), telle que les espaces de caractères continus soient les mêmes pour τ et $m(E)$; mais elle ne permet pas de décider de la continuité d'un caractère en particulier.

Adoptant le point de vue de M. Akkar, nous examinons la structure des a.l.u.A-convexes, ce qui nous permet de montrer que le spectre de tout élément est compact et que tout caractère est borné pour de telles algèbres unitaires complètes. Nous obtenons aussi que toute forme positive est bornée.

1. Préliminaires

DÉFINITION. Une algèbre localement convexe E est dite *A-convexe* si sa topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in E$, il existe $M(\lambda, x) > 0$ et $N(\lambda, x) > 0$ tels que

$$p_\lambda(x \cdot y) \leq M(\lambda, x) \cdot p_\lambda(y), \text{ pour tout } y \in E,$$

et

$$p_\lambda(y \cdot x) \leq N(\lambda, x) \cdot p_\lambda(y), \text{ pour tout } y \in E.$$

Elle est dite *uniformément A-convexe* si pour tout $x \in E$, il existe $M(x) > 0$ et $N(x) > 0$ tels que $p_\lambda(x \cdot y) \leq M(x) \cdot p_\lambda(y)$ et $p_\lambda(y \cdot x) \leq N(x) \cdot p_\lambda(y)$, pour tout $y \in E$ et tout $\lambda \in \Lambda$. Elle est dite *localement multiplicativement convexe* si

$$p_\lambda(x \cdot y) \leq p_\lambda(x) \cdot p_\lambda(y) \text{ pour tous } x, y \in E \text{ et tout } \lambda.$$

EXEMPLES.

1) $E = C[0, 1]$, l'algèbre des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ munie de la norme L^1 , est une algèbre A-normée (c.-à-d. la multiplication est séparément continue). E n'est pas complète.

2) Soit $E = C_b(\mathbb{R})$, l'algèbre des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $E_0 = C_b^0(\mathbb{R})$, l'algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et tendant

vers 0 à l'infini. Pour tout $\phi \in E_0$, considérons la semi-norme p_ϕ sur E définie par

$$p_\phi(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x) \cdot f(x)|.$$

$(E; (p_\phi)_\phi)$ est une a.l.u.A-convexe qui n'est pas une a.l.m.c. (cf. [4] ou [1]). Elle est complète.

3) Soit E une algèbre de Banach commutative et $M(E)$, l'algèbre des multiplicateurs sur E , c'est-à-dire (si on suppose E sans ordre, c.-à-d. $x \cdot E = \{0\} \Rightarrow x = 0$) l'algèbre des opérateurs T linéaires bornés de E tels que

$$T(x) \cdot y = x \cdot T(y), \text{ pour tous } x, y \in E.$$

La topologie β sur $M(E)$ définie par les A-semi-normes $p_x(T) = \|Tx\|$, $x \in E$, fait de $M(E)$ une a.l.u.A-convexe complète, non en général une a.l.m.c.

4) Soit $E = K(\mathbb{R})$, l'algèbre des fonctions continues et à support compact, munie de la topologie de la convergence compacte. C'est une a.l.u.A-convexe qui est aussi une a.l.m.c.

5) Soit $E = C([0,1])$, l'algèbre des fonctions continues sur $[0,1]$ munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts dénombrables de $[0,1]$. C'est une a.l.u.A-convexe qui est aussi une a.l.m.c.

2. Théorème de structure et applications

Nous donnons d'abord un théorème de structure qui établit un lien entre les a.l.u.A-convexes complètes et les a.l.m.c. de Fréchet. C'est en un certain sens une généralisation du résultat de E.A. Michalel, à savoir qu'une a.l.A-convexe de Fréchet est une a.l.m.c.

THÉORÈME 1. *Toute a.l.u.A-convexe complète E est bornologiquement limite inductive de telles algèbres E_i de Fréchet (c.-à-d. une partie B de E est*

bornée si et seulement si elle est contenue dans un E_i et y est bornée); donc d'a.l.m.c. de Fréchet.

PREUVE. Soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de semi-normes définissant la topologie de E et soit $(B_i)_{i \in I}$ une base de bornologie de E . Fixons un borné B_i de cette famille. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $M_\lambda > 0$ tel que

$$p_\lambda(x) \leq M_\lambda, \text{ pour tout } x \in B_i,$$

soit

$$p_\lambda(B_i) = \sup\{p_\lambda(x) ; x \in B_i\}.$$

Pour tout entier n , posons $\Lambda_n^i = \{\lambda \in \Lambda : p_\lambda(B_i) < n\}$. On a $\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n^i$.

Posons $q_n^i(x) = \sup\{p_\lambda(x) ; \lambda \in \Lambda_n^i\}$; q_n^i est une semi-norme généralisée, semi-continue inférieurement. De plus, on a:

$$\begin{aligned} q_n^i(x \cdot y) &= \sup\{p_\lambda(x \cdot y) ; \lambda \in \Lambda_n^i\} \\ &\leq \sup\{M(x) \cdot p_\lambda(y) ; \lambda \in \Lambda_n^i\} = M(x) \cdot q_n^i(y). \end{aligned} \quad (1)$$

Posons $E_i = \{x \in E / q_n^i(x) < \infty, \text{ pour tout } n\}$. Compte-tenu de (1), E_i est une sous-algèbre de E et comme $q_n^i(x) \leq n$, pour tout $x \in B_i$, on a B_i contenu dans E_i .

L'injection canonique $E_i \rightarrow E$ est continue car, pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $n(\lambda)$ tel que $\lambda \in \Lambda_{n(\lambda)}^i$, donc pour tout $x \in E_i$, on a $p_\lambda(x) \leq q_{n(\lambda)}^i(x)$.

Il est clair que $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. I devient ordonné filtrant par $i \leq j$ si et seulement si $B_i \subset B_j$; et l'on vérifie que $E_i \subset E_j$, l'injection étant continue.

Maintenant, si E est complète, E_i l'est aussi. En effet: si $(x_j)_{j \in J}$ est un ordonné filtrant de Cauchy dans E_i , il l'est aussi dans E , donc il converge vers $x \in E$. Or, pour tout n , $(q_n^i(x_j))_j$ est bornée dans E_i ; donc il existe $M > 0$ tel que

$$q_n^i(x_j) < M \text{ pour } j \geq j_0. \quad (2)$$

Et comme q_n^i est semi-continue inférieurement, on peut passer à la limite dans (2) et obtenir $q_n^i(x) \leq M < \infty$. Donc $x \in E_i$. On montre de façon analogue que $(x_j)_j$ converge vers x dans E_i .

Nous nous intéressons maintenant au rayon spectral ρ dans E . Rappelons que $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spx}\}$, où Spx est le spectre de x dans E .

PROPOSITION. *Dans une a.l.u.A-convexe commutative complète, tout élément est de rayon spectral fini.*

PREUVE. D'après le Théorème 1, E est réunion d'a.l.m.c. de Fréchet E_i . Soient $x \in E$ et E_i telle que $x \in E_i$. On a $S'_{E_i} \text{px} \subset S'_{E_i} \text{px}$; et il suffit donc de montrer que Spx_{E_i} est borné. Appelons τ_i la topologie de E_i définie par les q_n^i . D'après (1) du Théorème 1, (E_i, τ_i) est aussi uniformément A-convexe. La norme d'algèbre $\|\cdot\|$ mise en évidence par Cochran dans [5] vérifie ici

$$q_n^i(x) \leq \|x\|, \text{ pour tout } x \text{ et tout } n. \quad (*)$$

(E_i, τ_i) étant une a.l.m.c. complète, on a

$$\text{Spx}_{E_i} = \{\chi(x) \mid \chi \text{ caractère continu de } E_i\}.$$

D'après (*), si χ est continu pour τ_i , il est aussi continu pour $\|\cdot\|$ et donc se prolonge en un caractère continu $\hat{\chi}$ de l'algèbre de Banach complétée de $(E, \|\cdot\|)$. Et l'on a donc $|\chi(x)| \leq \|x\|$, pour tout χ , d'où le résultat.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat annoncé sur les caractères.

THÉORÈME 2. *Tout caractère d'une a.l.u.A-convexe commutative unitaire complète est borné.*

PREUVE. Par le théorème, nous sommes ramenés aux a.l.m.c. de Fréchet uniformément A-convexes E_i . Par la proposition, tout élément de E_i est de rayon spec-

tral fini. Mais alors ce sont des Q-algèbres (cf. [10] ou [12]). Et l'on sait que dans ce cas, tout caractère est borné.

Le fait que le spectre de tout élément soit borné a suffi pour obtenir le Théorème 2. En fait, on a un meilleur résultat, à savoir que le spectre de tout élément est compact. Et c'est là une différence fondamentale avec les a.l.A-convexes même localement multiplicativement convexes.

THÉORÈME 3. Soit E une a.l.u.A-convexe commutative unitaire complète. Alors, pour tout $x \in E$, Sp_x est compact.

PREUVE. On a vu que E est une réunion filtrante croissante d'a.l.m.c. de Fréchet E_i . D'après la Proposition 1, $E_i = B(E_i) = \{x \in E_i : \rho_i(x) < \infty\}$, donc E_i est une Q-algèbre. Mais alors le spectre $\text{Sp}_i x$ de tout élément est compact (cf. [10] ou [8] ou [9]). Maintenant, comme la réunion des E_i est filtrante croissante, on a, pour tout $x \in E$, $\text{Sp}_x = \bigcap_{i \in I(x)} \text{Sp}_i x$, où $I(x) = \{i \in I : x \in E_i\}$. D'où Sp_x compact.

REMARQUES.

1) Bien qu'il existe des a.l.u.A-convexes admettant des caractères continus, ce qui justifie les résultats ci-avant, on peut se demander si c'est le cas pour toute a.l.u.A-convexe commutative unitaire (E, τ) .

A.C. Cochran a mis en évidence (cf. [5]) une topologie d'a.l.m.c. $m(E)$, telle que les caractères continus soient les mêmes pour τ et $m(E)$. Donc le problème est ramené à une a.l.m.c. unitaire. Comme il y a bijection entre les caractères (algébriques) et les idéaux maximaux, il existe toujours au moins un caractère non nul. Soit E_1 l'a.l.m.c. séparée associée à $(E, m(E))$ et $\hat{E}$ l'a.l.m.c. commutative unitaire complète, complétée de E_1 .

$\hat{E}$ admet au moins un caractère continu non nul (cf. [12]) qui donne naissance à un caractère continu non nul sur $(E, m(E))$ donc sur (E, τ) .

2) Sachant que, pour une a.l.u.A-convexe, tout caractère est borné, on peut se demander si tout caractère est continu. La réponse est non.

E.A. Michaël a donné dans [10], l'exemple suivant, d'une a.l.m.c. pour laquelle tout caractère est borné mais admettant des caractères discontinus (nous en donnons la version de [1] (ou de [2])). Or il se trouve que cette a.l.m.c. est aussi uniformément A-convexe.

Soit T un espace topologique pseudo-compact, localement compact et non compact. Soit $E = C(T)$ l'algèbre des fonctions continues sur T , munie de la topologie de la convergence compacte.

Pour tout compact K de T et tous f, g de E , on a

$$p_K(f \cdot g) = \sup_{t \in K} |f(t) \cdot g(t)| \leq p_K(f) \cdot p_K(g).$$

Mais comme T est pseudo-compact, tout $f \in C(T)$ est borné par $M(f) = \sup_{t \in T} |f(t)|$, et l'on a

$$p_K(f \cdot g) \leq M(f) \cdot p_K(g) \text{ pour tout } K \text{ et tout } g.$$

Ainsi $E = C(T)$ est une a.l.m.c. commutative unitaire complète qui est aussi uniformément A-convexe.

Or, son espace $M^\#$ des caractères (qui sont tous bornés) est en bijection avec le compactifié de Stone-Čech $\beta(T)$ de T , alors que l'espace $M(E)$ de ses caractères continus est en bijection avec T .

3. Formes positives

Une algèbre topologique involutive E est une algèbre topologique munie d'une involution continue. Une forme linéaire sur E est dite positive si $f(x^* \cdot x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

THÉOREME 4. Soit E une a.l.u.A-convexe complète involutive et unitaire. Alors E est réunion filtrante (avec injections continues) d'une famille d'a.l.u.A-convexes de Fréchet involutives $(E_i)_{i \in I}$ telle qu'une partie B de E est bornée si et seulement si elle est contenue dans un E_i et y est bornée.

PREUVE. On reprend la démonstration du Théorème 1 en tenant compte du fait que l'infolution sur E est continue si et seulement si sa topologie peut être définie par une famille $(p_\lambda)_\lambda$ de semi-normes uniformément A-convexes telles que $p_\lambda(x^*) = p_\lambda(x)$, pour tout λ et tout x .

THÉOREME 5. Soit E une a.l.u.A-convexe complète involutive. Alors toute forme positive sur E est bornée.

PREUVE. Le résultat découle du Théorème 4 grâce au Théorème 11.1 de [7]. Ce dernier affirme que sur une algèbre topologique métrisable complète involutive unitaire, toute forme positive est continue (donc bornée).

4. Limite inductive d'a.l.u.A-convexes

L'existence de limites inductives d'a.l.u.A-convexes découle de la Proposition 1 de [11], et l'on a le

THÉOREME 6. Tout caractère d'une limite inductive d'a.l.u.A-convexes complètes est borné.

Bibliographie

- [1] AKKAR, M., Sur la structure des algèbres localement multiplicativement convexes, C.R. Acad. Sc. Paris, 279 (1974), Série A, 241-244.
- [2] AKKAR, M., Etude spectrale et structures d'algèbres topologiques et bornologiques complètes, Thèse Sc. Math., Université de Bordeaux, 1976.
- [3] BOURBAKI, N., Espaces vectoriels topologiques, Eléments de Math., Livre 5, Hermann.

- [4] COCHRAN, A.C., KEOWN, R., WILLIAMS, C.R., *On a class of topological algebras*, Pacific J. Math. 34 (1970), 17-25.
- [5] COCHRAN, A.C., *Representations of A -convex algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 473-479.
- [6] COCHRAN, A.C. *Inductive limit of A -convex algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973), 489-496.
- [7] DALES, H.G., *Automatic continuity: a survey*, Bull. London Math. Soc. 10 (1978), 129-183.
- [8] HUSAIN, T. and RIGELHOF, R., *Representations of M_q^* -algebras*, Math. Ann. 180 (1969), 180-297.
- [9] HUSAIN, T. and WARSI, S.A., *A note on A -convex Q -algebras*, Bull. Soc. Royale Sc. Liège, Nos 5-8, (1976), 163-165.
- [10] MICHAËL, E.A., *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Providence, A.M.S. (1952), Mem. of the Amer. Math. Soc., 11.
- [11] WARNER, S., *Inductive limits of normed algebras*, Transactions of Amer. Math. Soc. 82 (1956), 190-216.
- [12] ŻELAZKO, W., *Selected Topics in Topological Algebras*, Lectures Notes, Series 31 (1971), Matematisk Institut Aarhus Universitet, Aarhus.

Département de mathématiques et
de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, P. Qué.
H3C 3J7

Manuscrit reçu le 20 octobre 1982.