

QUELQUES REMARQUES SUR LES FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE AUTOMORPHES

Gaston-Mandata N'Guérékata

Introduction

En suivant Fréchet [2], nous avons, dans un travail récent [3], introduit la notion de fonction asymptotiquement presque automorphe (a.p.a.) définie comme suit dans un espace de Banach X :

Une fonction $f : [0, \infty) \rightarrow X$ continue (au sens de la topologie forte de X) est appelée a.p.a. si elle admet la décomposition (unique, voir théorème 2 [3]) suivante:

$$f(t) = g(t) + h(t) , \quad t \geq 0 ,$$

où $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow X$ est une fonction presque automorphe (p.a.) et $h : [0, \infty) \rightarrow X$ une fonction continue telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \theta$ (vecteur nul); $g(t)$ et $h(t)$ sont dites respectivement *terme principal* et *terme correctif* de $f(t)$.

Nous démontrerons d'abord quelques propriétés élémentaires de fonctions a.p.a. notamment:

- un théorème de composition (Théorème 1), et
- un théorème sur les primitives de fonctions a.p.a. (Théorème 3), qui provient d'un résultat bien connu pour les fonctions presque périodiques (voir par exemple [1], théorème I, page 53).

Enfin, nous démontrerons l'existence de solution p.a. de l'équation différentielle:

$$(*) \quad x'(t) = Ax(t) + f(t) ,$$

où A est un opérateur borné sur X et $f(t)$ une fonction p.a. sachant que la-dite équation possède une solution a.p.a. Ce résultat est le cas linéaire du Théorème 4 [3].

1. Théorème de composition

THÉORÈME 1. *Considérons les espaces de Banach X, Y . Soit $\phi : X \rightarrow Y$ une fonction continue sur un compact $B \supset \overline{\{f(t) : 0 \leq t < \infty\}}$ (l'adhérence topologique de $\{f(t) : t \in [0, \infty)\}$) où $f : [0, \infty) \rightarrow X$ est une fonction a.p.a. Alors la fonction $\phi(f(t)) : \phi \circ f : [0, \infty) \rightarrow Y$ est a.p.a.*

Avant de démontrer ce théorème, voyons d'abord le lemme suivant qui généralise le théorème VII [1]:

LEMME. *Si $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow X$ est une fonction p.a. et $\phi : X \rightarrow Y$ une fonction continue, alors la fonction $\phi(g(t)) : \mathbb{R} \rightarrow Y$ est p.a.*

La démonstration est simple et nous l'omettons.

DÉMONSTRATION du Théorème 1. Soit $f(t) = g(t) + h(t)$ la décomposition de $f(t)$. Alors par le lemme ci-dessus, $\phi(g(t))$ est p.a. Etant donné que la fonction $\phi(f(t)) : [0, \infty) \rightarrow Y$ est continue, la fonction $\Gamma(t) : [0, \infty) \rightarrow Y$ définie par

$$\Gamma(t) = \phi(f(t)) - \phi(g(t))$$

est aussi continue.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Comme ϕ est uniformément continue sur l'ensemble compact $B \supset \overline{\{f(t) : t \in [0, \infty)\}}$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_Y < \varepsilon, \text{ si } \|x - y\|_X < \delta_\varepsilon$$

avec $x, y \in B$.

Par ailleurs, l'hypothèse sur $h(t)$ nous permet de dire qu'il existe $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|f(t) - g(t)\|_X = \|h(t)\|_X < \varepsilon, \text{ si } t > t_0.$$

Maintenant, en prenant $t > t_0$, on obtient:

$$\|\Gamma(t)\|_Y = \|\phi(f(t)) - \phi(g(t))\|_Y < \varepsilon,$$

ce qui montre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = \theta.$$

La fonction $\phi(f(t))$ est donc a.p.a. avec $\phi(g(t))$ comme terme principal et $\Gamma(t)$ comme terme correctif.

Nous avons aussi:

THÉOREME 2. Si $(f_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de fonctions a.p.a. telle que $f_n(t) = g_n(t) + h_n(t)$ pour chaque n et

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$, uniforme en $t \in [0, \infty)$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = g(t)$, uniforme sur $\mathbb{R}$,

alors $f(t)$ est a.p.a.

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 5 [4], $g(t)$ est p.a. Considérons maintenant la fonction suivante

$$h(t) = f(t) - g(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Alors $h(t)$ est le terme correctif de $f(t)$. En effet, soit

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - g(t) - f_n(t) + f_n(t) \\ &= f(t) - f_n(t) + g_n(t) - g(t) + h_n(t). \end{aligned}$$

Alors on aura

$$(1) \quad \|h(t)\| \leq \|f(t) - g_n(t)\| + \|g_n(t) - g(t)\| + \|h_n(t)\| < \varepsilon ,$$

si $t > t_0 > 0$, t_0 fixé.

En effet, par a), il existe $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tel que

$$(2) \quad \|f(t) - f_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } n > N_1 \text{ et pour tout } t \geq 0 .$$

De même il existe $N_2 = N_2(\varepsilon)$ tel que

$$(3) \quad \|g_n(t) - g(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } n > N_2 \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R} .$$

Soit $n > N = \max(N_1, N_2)$. Par la propriété de $h_n(t)$, il existe $t_0 = t_0(\varepsilon, n) > 0$ tel que

$$(4) \quad \|h_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } t > t_0 .$$

En combinant (2), (3) et (4), on obtient (1) et le théorème est démontré.

2. Primitives de fonctions a.p.a.

THÉORÈME 3. Soit $f(t)$ une fonction a.p.a. et considérons

$F : [0, \infty) \rightarrow X$ définie par $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ (intégrale au sens de Bochner).

Supposons que

a) l'ensemble $\{\int_0^t g(s) ds : t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans X ($g(t)$ est le terme principal de $f(t)$),

b) $\int_0^\infty h(s) ds$ existe dans X .

Alors $F(t)$ est a.p.a.; son terme principal est $\int_0^t g(s) ds + \int_0^\infty h(s) ds$ et le terme correctif $-\int_t^\infty h(s) ds$.

REMARQUE. Si X est un espace de Banach uniformément convexe, nous pouvons remplacer l'hypothèse a) par

a') $\{\int_0^t g(s) ds\}_{t \in \mathbb{R}}$ est borné dans X ,

et le théorème reste valide.

DÉMONSTRATION. L'hypothèse a) permet de dire que la fonction $\int_0^t g(s) ds : \mathbb{R} \rightarrow X$ est p.a. ([5], théorème 1.2). Comme $\int_0^\infty h(s) ds = \text{constante} \in X$, la fonction $\int_0^t g(s) ds + \int_0^\infty h(s) ds$ est p.a. dans X . La fonction continue $H(t) = -\int_t^\infty h(s) ds$, $t \geq 0$, satisfait évidemment la propriété

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \theta.$$

$$\text{Enfin } F(t) = \int_0^t g(s) ds + \int_0^\infty h(s) ds - \int_t^\infty h(s) ds.$$

La démonstration est achevée.

3. Théorème 4

THÉORÈME 4. Si l'équation différentielle dans X :

$$(*) \quad x'(t) = Ax(t) + f(t),$$

où A est un opérateur borné et $f(t)$ une fonction p.a., possède une solution a.p.a. $u(t) = g(t) + h(t)$ et $g'(t)$ existe sur $\mathbb{R}$, alors elle possède une solution p.a.

DÉMONSTRATION. Soit $u(t) = g(t) + h(t) : [0, \infty) \rightarrow X$ une solution a.p.a. de l'équation (*). Alors

$$(1) \quad u'(t) = Ag(t) + Ah(t) + f(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Maintenant, puisque A est bornée,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Ah(t) = A \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \theta$$

et $Ag(t)$ est p.a. (voir [4], page 586). Donc

$$u'(t) \text{ est a.p.a.}$$

Or,

$$(2) \quad u'(t) = g'(t) + h'(t) \quad \text{et} \quad g'(t) \quad \text{est p.a.} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = \theta$$

([3], théorème 3).

En combinant (1) et (2), on obtient

$$(3) \quad g'(t) - Ag(t) - f(t) = Ah(t) - h'(t), \quad t \in [0, \infty)$$

dont le membre de droite tend vers θ lorsque t tend vers l'infini; comme le membre de gauche est p.a., alors on a:

$$(4) \quad g'(t) - Ag(t) - f(t) = 0, \quad t \in [0, \infty)$$

(voir la démonstration du théorème 2 [3], pages 74 et 75).

Montrons maintenant que l'équation (4) est vérifiée si $t < 0$. Soit $-\infty < t < 0$ et considérons $(n_k')_{k=1}^{\infty}$ une sous-suite de $(n_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $t > -n_k'$, $\forall k$. Nous pouvons en extraire une sous-suite $(n_k'')_{k=1}^{\infty}$, telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(t + n_k'') = G(t),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(t - n_k'') = g(t),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + n_k'') = F(t),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(t - n_k'') = f(t).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} g'(t + n_k'') &= \lim_{k \rightarrow \infty} [Ag(t + n_k'') + f(t + n_k'')] \quad \text{car} \quad t + n_k'' > 0, \quad \forall k \\ &= AG(t) + F(t) \end{aligned}$$

et

$$g'(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} AG(t - n_k'') + F(t - n_k'') = Ag(t) + f(t), \quad \text{car} \quad g'(t) \quad \text{est p.a.}$$

Nous avons démontré que $g'(t) = Ag(t) + f(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Références

- [1] AMERIO, L. and PROUSE, G. , *Almost-Periodic Functions and Functional Equations*, Van Nostrand, Reinhold Co., New York, Toronto, 1971.
- [2] FRÉCHET, M., *Les fonctions asymptotiquement presque périodiques*, Rev. Sc., Nos 7-8, Juillet-Août, 1941.
- [3] N'GUÉREKATA, G.-M., *Sur les solutions presque automorphes d'équations différentielles abstraites*, Ann. sc. math. Québec, Vol. V, no 1, 1981, 69-79.
- [4] ZAIDMAN, S., *Almost automorphic solutions of some abstract evolution equations*, Istituto Lombardo Accad. di Scienze e Lettere, Rendiconti, Classe di scienze (A), Vol. 110, 1976, 578-588.
- [5] ZAKI, M., *Almost automorphic solutions of certain abstract differential equations*, Ann. Mat. pura ed appl., Serie 4, Vol. 101, 1974, 91-114.

Université de Bangui
Faculté des Sciences
B.P. 908, Bangui
République Centrafricaine

Manuscrit reçu le 20 décembre 1982.
Révisé le 6 janvier 1982.