

SUR L'EXISTENCE PAR COMPARAISON DES VALEURS PROPRES POSITIVES POUR DES OPÉRATEURS NON LINÉAIRES

G. Isac

1. Introduction

L'étude de l'existence des valeurs propres positives pour un opérateur non linéaire qui laisse invariant un cône convexe est un problème important de l'analyse non linéaire.

Des nombreuses applications, dans la théorie des équations non linéaires, dans la théorie des bifurcations, dans l'étude de la stabilité, dans l'économie mathématique, etc., demandent de plus en plus de nouveaux résultats sur ce problème.

Pour comprendre l'importance du résultat de cette note, on présente premièrement les étapes importantes dans l'étude de ce problème.

Les références indiquées dans cet ouvrage ne sont pas complètes mais elles sont représentatives.

Des informations bibliographiques supplémentaires se trouvent en consultant notre bibliographie.

a) Le premier résultat qui démontre que la positivité d'un opérateur linéaire dans l'espace R^n implique l'existence des valeurs propres positives, est le résultat obtenu par O. Perron en 1907 [34]. Contributions aussi importantes sur l'existence et les propriétés des valeurs propres positives pour les matrices positives ont été obtenues par G. Frobenius en 1908 [12] et en 1912 [13].

Les recherches sur les valeurs propres positives pour les matrices positives ont continué jusqu'à présent avec des résultats de plus en plus raffinés J.S. Vandergraft (1968) [40], H. Schneider et R.E.L. Turner (1972) [39], W.C. Rheinbold et J.S. Vandergraft (1973) [37], etc. .

b) L'étude de l'existence des valeurs propres positives pour des opérateurs linéaires positifs dans des espaces de dimension infinie a commencé en 1912 par l'ouvrage de R. Jentzsch [22] sur l'existence des valeurs propres positives pour un opérateur intégral de type Fredholm avec noyau positif.

Dans ce sens, les recherches ont été continuées par M. Fréchet (1934) et N. Bogolyubov (1946) [26].

Les recherches sur ce problème sur des espaces de Banach généraux ont commencé à se développer systématiquement après que L. Kantorovič dans la période 1937-1948 ait mis les bases de la théorie des espaces de Banach ordonnées.

Le célèbre mémoire de M.G. Krein et M.A. Rutman [26] a engendré les plus importantes recherches sur les valeurs propres positives développées par M.A. Krasnoselskii et ses élèves, par F.E. Bonsall [3], [4], par S. Karlin [23] et récemment par R.D. Nussbaum [32].

c) Les valeurs propres positives pour des opérateurs non linéaires positifs ont commencé à être étudiées directement sur les espaces de dimension infinie en 1922 par l'ouvrage de G. Birkhoff et O. Kellog [2] mais le grand développement des recherches sur ce sujet a commencé par les travaux de M.A. Krasnoselskii et son école après 1950 [24], [25].

Cette étape marque en réalité le développement de l'analyse non linéaire.

Des résultats importants dans ce sens ont été obtenus par H.H. Schaefer [38], par W.V. Petryshyn et P.M. Fitzpatrick [11], par E.H. Dancer [9], par D.E. Edmunds, A.J.B. Potter et C.A. Stuart [10], par I. Massabo et C.A. Stuart [28], par H. Amann [1], par S. Reich [36] et par R.D. Nussbaum [32].

d) Une partie spéciale occupe les recherches sur l'existence des valeurs propres positives pour les opérateurs non linéaires dans les espaces localement convexes.

Les premiers travaux dans ce sens sont les travaux de H.H. Schaefer [38], de F.E. Bonsall [4] et récemment, ceux de A. Cornea et I. Ichim [8], de S. Hahn [15] et ceux de l'auteur [12], [18], [21].

Les difficultés dans l'étude des valeurs propres positives pour les opérateurs non linéaires qui laissent invariant un cône convexe dans un espace localement convexe sont plus grandes que dans le cas des espaces de Banach et les causes sont systématisées dans les observations suivantes:

i) Certaines techniques connues dans les espaces de Banach ne sont pas suffisamment développées dans les espaces localement convexes ou si elles sont développées leur manipulation est difficile.

ii) Tous les résultats connus sur l'existence des valeurs propres positives pour un opérateur non linéaire sur un cône K dans un espace de Banach demandent l'existence d'un voisinage ouvert U de zéro tel que $U \cap K$ soit un ensemble borné.

L'hypothèse de l'observation ii) implique dans les espaces localement convexes que le cône K doit être un cône *localement borné* dans le sens de nos ouvrages [18], [17].

Mais pour certaines applications, ce type de cône est trop étroit. Donc, il faut trouver des méthodes différentes que les méthodes utilisées dans les espaces normés, pour pouvoir étudier l'existence des valeurs propres positives pour des opérateurs non linéaires sur des cônes convexes suffisamment larges dans des espaces localement convexes.

Dans ce sens, on propose dans cette note une méthode de comparaison et on présente le premier résultat obtenu par cette méthode.

2. Notions de base et notations

Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet et $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de semi-normes qui détermine la topologie τ de l'espace E .

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset E$ on pose:

$$\gamma_n(\Omega) = \inf\{d > 0 \mid (\exists m \in \mathbb{N}), (\exists \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m), \Omega \subset \bigcup_{i=1}^m \Omega_i, p_n - \text{diam}(\Omega_i) < d\};$$

$$\chi_n(\Omega) = \inf\{r > 0 \mid (\exists m \in \mathbb{N}), (\exists x_1, x_2, \dots, x_m), \Omega \subset \bigcup_{i=1}^m B_i,$$

$$B_i = \{x \mid p_n(x_i - x) < r_i < r\}.$$

$$\overline{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0\} \cup \{+\infty\}$$

On considère les fonctions $\gamma(\Omega) : \mathbb{N} \rightarrow \overline{R}_+$, $\chi(\Omega) : \mathbb{N} \rightarrow \overline{R}_+$ définies par

$$\gamma(\Omega)(n) = \gamma_n(\Omega); \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\chi(\Omega)(n) = \chi_n(\Omega); \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \overline{R}_+$, on utilise la relation d'ordre:

$$f \leq g \iff (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)).$$

Si β signifie ou bien γ ou bien χ et $\mathcal{B}(E)$, la famille des ensembles bornés de l'espace E , alors la fonction $\beta : \mathcal{B}(E) \rightarrow \overline{R}_+$ vérifie les propriétés suivantes:

- 1) $\beta(\Omega) = 0 \iff \overline{\Omega}$ est un ensemble compact;
- 2) $\beta(\overline{\text{co}}(\Omega)) = \beta(\Omega);$
- 3) $\beta(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\beta(\Omega_1), \beta(\Omega_2)\};$
- 4) $\beta(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \beta(\Omega_1) + \beta(\Omega_2);$
- 5) $\beta(\lambda\Omega) = |\lambda|\beta(\Omega); \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

On dit que la fonction β est une mesure de non-compacité.

On observe que la propriété 3) implique que $\beta(\Omega_1) \leq \beta(\Omega_2)$ si $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$.

Soit $D \subset E$ et $f : D \rightarrow E$ une application. On dit que f est une k - β -contraction s'il existe $0 \leq k < 1$ telle que:

$$\beta(f(\Omega)) \leq k\beta(\Omega) ; \quad \forall \Omega \subset D .$$

On dit que l'opérateur f est un opérateur condensateur (au sens de Sadovskii) si pour tout $\Omega \subset B(D)$ tel que $\beta(\Omega) \neq 0$ on a $\beta(f(\Omega)) < \beta(\Omega)$.

Soit $K \subset E$ un cône convexe c'est-à-dire, i) $K + K \subset K$; ii) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+)$ $(\lambda K \subset K)$ et $U \subset E$ un ensemble ouvert tel que $K \cap U \neq \emptyset$.

On note par $\overline{U}_K$ la fermeture de U_K par rapport à K et $\partial_K(U_K)$ la frontière de U_K par rapport à K , où $U_K = U \cap K$.

Si $K \subset E$ est un cône convexe fermé, $U \subset E$ un ensemble ouvert tel que $U \cap K \neq \emptyset$ et $f : \overline{U}_K \rightarrow K$ un opérateur continu, condensateur par rapport à β et tel que $f(x) \neq x$; $\forall x \in \partial_K(U_K)$ alors on sait [11] que l'index des points fixes $i_K(f, U)$ est bien défini et il a les propriétés suivantes:

- 1) Si $i_K(f, D) \neq 0$, alors f a un point fixe dans D ;
- 2) Si $x_0 \in U_K$, alors $i_K(\hat{x}_0, U) = 1$ où $\hat{x}_0(x) = x_0$; $\forall x \in U$;
- 3) Si $U = U_1 \cup U_2$ où U_1, U_2 sont ouverts, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $f(x) \neq x$; $\forall x \in \partial_K(U_{1K}) \cup \partial_K(U_{2K})$, alors $i_K(f, U) = i_K(f, U_1) + i_K(f, U_2)$;
- 4) Si $H : [0, 1] \times \overline{U}_K \rightarrow K$ est une fonction continue telle que $\beta(H([0, 1] \times \Omega)) < \beta(\Omega)$; $\forall \Omega \subset \overline{U}_K$ où $\beta(\Omega) \neq 0$ et $x \neq H(t, x)$; $\forall t \in [0, 1]$, $\forall x \in \partial_K(U_K)$, alors $i_K(h(1, \cdot), U) = i_K(H(0, \cdot), U)$.

Soit maintenant $E(\tau)$ un espace localement convexe réel tel que la topologie τ est définie par une famille suffisante de semi-normes $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ c'est-à-dire:

- S₁) $(\forall x \in E)(x \neq 0)(\exists \alpha \in A)(p_\alpha(x) \neq 0)$;
- S₂) $(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A)(\exists \alpha \in A)(\forall x \in E)(p_{\alpha_1}(x), p_{\alpha_2}(x) \leq p_\alpha(x))$.

On dit que le cône convexe $K \subset E$ est localement borné [18], [12] s'il existe un voisinage ouvert de zéro U tel que $U \cap K$ est borné.

REMARQUE. Si le cône convexe K est localement borné, généralement il ne résulte pas que la topologie sur l'espace $K - K$ est normable.

Les caractérisations suivantes sont démontrées dans l'ouvrage [18].

1) Le cône convexe $K \subset E$ est localement borné si et seulement s'il existe une semi-norme continue p uniformément positive sur K c'est-à-dire: $(\forall \alpha \in A) (\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}) (\lambda_\alpha > 0) (\forall x \in K) (\lambda_\alpha p_\alpha(x) \leq p(x))$.

2) Le cône convexe $K \subset E$ est localement borné si et seulement s'il existe dans le cône K un ensemble séparant A , c'est-à-dire:

- i) A est fermé dans K ,
- ii) $0 \notin A$,
- iii) la composante connexe de $K \setminus A$ contenant l'origine est un ensemble borné dans E .

EXEMPLES.

1) Chaque cône convexe localement compact ou faiblement localement compact dans un espace localement convexe est localement borné.

2) Chaque cône convexe dans un espace localement convexe qui a une base bornée est localement borné.

3) Chaque cône convexe bien basé (engendré par un ensemble convexe et borné) est localement borné.

4) Chaque cône convexe dans un espace normé est localement borné.

Si $K \subset E(\tau)$ est un cône convexe, on dit que le cône K est normal (pour la topologie τ) s'il existe un système fondamental de τ -voisinages $\mathcal{U}$ de zéro tel que:

$$(\forall U \in \mathcal{U}) (U = (U + K) \cap (U - K)) .$$

REMARQUE. Beaucoup de cônes sont normaux mais il existe des cônes qui ne sont pas normaux.

On dit que le cône convexe $K \subset E$ est séquentiellement *complètement régulier* si toute suite *monotone* croissante (par rapport à la relation d'ordre définie par K) d'éléments de K qui est topologiquement bornée est τ -convergente.

EXEMPLES.

1) Si le cône K est bien basé et complet, alors il est séquentiellement complètement régulier.

2) Si le cône K est normal et faiblement complet, alors il est séquentiellement complètement régulier.

3) Si l'espace $E(\tau)$ est un espace nucléaire et complet ou semi-réflexif et $K \subset E$, un cône normal, alors K est séquentiellement complètement régulier.

3. Un théorème de point fixe

Le théorème de point fixe suivant est l'instrument de base dans la démonstration du résultat que nous présentons sur l'existence des valeurs propres positives.

Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe $A \subset E$ un ensemble, et $K \subset E$, un cône convexe.

On considère sur E la relation de préordre " $\leq$ " définie par K .

DÉFINITION. On dit que l'opérateur $f : A \rightarrow E$ est Λ -monotone croissant si et seulement s'il existe un opérateur $\Lambda : E \rightarrow E$ pas nécessairement linéaire et continu tel que:

- 1) il existe $(I + \Lambda)^{-1}$,
- 2) $(I + \Lambda)^{-1}$ est monotone croissant,
- 3) $f + \Lambda$ est monotone croissant sur A (c'est-à-dire $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) + \Lambda(x_1) \leq f(x_2) + \Lambda(x_2)$).

REMARQUE. Le cas où l'opérateur Λ est linéaire et continu a été considéré par V.P. Politjukov dans l'ouvrage [35].

DÉFINITION. On dit que l'opérateur $f : A \rightarrow E$ (pas nécessairement continu) est (sm)-compact sur l'ensemble A si et seulement si toute suite de la forme $x_0 \geq f(x_1) \geq \dots \geq f(x_n) \geq \dots$ où $\forall n, x_n \in A$, contient une sous-suite convergente

EXEMPLES.

- 1) Si $\overline{f(A)}$ est séquentiellement compact, alors l'opérateur $f : A \rightarrow E$ est (sm)-compact.
- 2) Si $f : A \rightarrow A$, $f(A)$ est borné et le cône K est séquentiellement complètement régulier, alors f est (sm)-compact.
- 3) Si $f : A \rightarrow E$ est faiblement compact, A un ensemble borné et K un cône normal, alors f est (sm)-compact.
- 4) Si f est monotone croissant, propre et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{f^n(A)}$ est séquentiellement compact, alors f est (sm)-compact.

THÉORÈME 1. Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe métrisable, ordonné par un cône convexe $K \subset E$ supposé normal, fermé et saillant. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble fermé et $f : A \rightarrow E$ un opérateur Λ -monotone croissant.

Si $(I + \Lambda)^{-1}(f + \Lambda)$ est (sm)-compact, $(I + \Lambda)^{-1}(f + \Lambda)(A) \subset A$ et s'il existe un élément $x_0 \in A$ tel que $f(x_0) \leq x_0$, alors f a un point fixe dans l'ensemble A .

DÉMONSTRATION. Puisque l'espace $E(\tau)$ est localement convexe, métrisable, on peut supposer que la topologie τ est équivalente à la topologie définie par la métrique:

$$(1) \quad d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x-y|_n}{1 + |x-y|_n}; \quad \forall x, y \in E,$$

où $\{| \cdot |_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille suffisante, croissante de semi-normes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la semi-norme $| \cdot |_n$ est monotone croissante sur K (puisque le cône K est supposé normal). Voir [18].

On considère l'opérateur $g : A \rightarrow A$ défini par $g = (I + \Lambda)^{-1}(f + \Lambda)$ qui est monotone croissant, et l'ensemble $A_0 = \{x \in A \mid g(x) \leq x\}$.

Comme $f(x_0) \leq x_0$, on a que $x_0 \in A_0$ et donc $A_0 \neq \emptyset$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\phi(.,i) : A_0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$(2) \quad \phi(u;i) = \sup\{d(g^i(v), g^i(w)) \mid v, w \in A_0, g^i(v) \leq g^i(w) \leq u\}.$$

La fonction $\phi(.,i)$ est bien définie, parce que pour tout $u \in A_0$, on a $g(u) \leq u$, d'où $g^i(u) \leq u$.

On considère maintenant la fonction de deux variables $\phi(u;i)$ et on observe que $\phi(u;i)$ est décroissante d'après i pour u fixé.

En effet, il est suffisant de montrer que:

$$(3) \quad \phi(u;i+1) \leq \phi(u;i) ; \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Soit M l'ensemble formé par tous les couples (v,w) qui interviennent dans le calcul du $\phi(u;i)$ et M_1 l'ensemble de tous les couples (v_1, w_1) qui intervient dans le calcul du $\phi(u;i+1)$.

Si $(v_1, w_1) \in M_1$, alors $g(v_1) \leq v_1$; $g(w_1) \leq w_1$ et si on pose $v = g(v_1)$; $w = g(w_1)$, alors $v, w \in A_0$ parce que $g(v) = g^2(v_1) \leq g(v_1) = v$, $g(w) = g^2(w_1) \leq g(w_1) = w$.

On a aussi les relations suivantes:

$$g^{i+1}(v_1) = g^i(g(v_1)) = g^i(v)$$

$$g^{i+1}(w_1) = g^i(g(w_1)) = g^i(w).$$

Donc, si $(v_1, w_1) \in M_1$, alors il existe $(v,w) \in M$ tel que $d(g^{i+1}(v_1), g^{i+1}(w_1)) = d(g^i(v), g^i(w))$, d'où il résulte la relation (3).

Il existe alors $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi(u;i)$ et on peut définir:

$$(4) \quad \phi(u) = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(u; i) ; \quad \forall u \in A_0 .$$

L'hypothèse que g est (sm)-compact implique que pour tout $y \in A_0$,

$$(5) \quad \inf \phi(u) = 0 ; \quad u \leq y , \quad u \in A_0 .$$

En effet, on suppose que la relation (5) n'est pas vraie, donc:

$$(\exists y_0 \in A_0)(\exists \beta_0 > 0, \beta_0 \in \mathbb{R})(\forall u \in A_0, u \leq y_0)(\forall i \in \mathbb{N})(\phi(u; i) > \beta_0) .$$

Dans ce cas, on peut construire la suite:

$$(6) \quad y_0 \geq g^2(v_1) \geq g^2(w_1) \geq g^4(v_2) \geq g^4(w_2) \geq \dots \geq g^{2s}(v_s) \geq g^{2s}(w_s) \geq \dots$$

où $v_s, w_s \in A_0$; $\forall s \in \mathbb{N}$ telle que,

$$(7) \quad d(g^{2s}(v_s), g^{2s}(w_s)) > \beta_0 ; \quad \forall s \in \mathbb{N} .$$

La suite (6) n'a pas de sous-suites convergentes.

En effet, on a les relations suivantes:

$$(8) \quad g^{2s}(v_s) - g^{2(s+k)}(v_{s+k}) \geq g^{2s}(v_s) - g^{2s}(w_s) \geq 0 ; \quad \forall s, \forall k = 1, 2, \dots$$

$$(9) \quad g^{2s}(w_s) - g^{2(s+k)}(w_{s+k}) \geq g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+1)}(w_{s+1}) \geq 0 ; \quad \forall s, \forall k = 1, 2, \dots$$

puisque

$$g^{2(s+k)}(v_{s+k}) \leq g^{2s}(w_s) ; \quad \forall s, k ,$$

$$g^{2s}(w_s) \geq g^{2(s+1)}(v_{s+1}) ; \quad g^{2(s+k)}(w_{s+1}) \leq g^{2(s+k)}(w_{s+k}) ; \quad \forall s, k ,$$

d'où

$$\begin{aligned} g^{2s}(w_s) - g^{2(s+k)}(w_{s+k}) &\geq g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+k)}(w_{s+k}) \\ &\geq g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+1)}(w_{s+1}) , \end{aligned}$$

et donc les relations (8) et (9) sont vraies.

Mais la relation (7) implique $g^{2s}(v_s) - g^{2s}(w_s) > 0$ et $g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+1)}(w_{s+1}) > 0$; $\forall s \in \mathbb{N}$.

Les propriétés de la famille de semi-normes $\{|\cdot|_{n_1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ impliquent qu'il existe n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ pour chaque $s \in \mathbb{N}$ tels que:

$$|g^{2s}(v_s) - g^{2(s+k)}(v_{s+k})|_{n_1} \geq |g^{2s}(v_s) - g^{2s}(w_s)|_{n_1} > 0 ; \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

et

$$|g^{2s}(w_s) - g^{2(s+k)}(w_{s+k})|_{n_2} \geq |g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+1)}(w_{s+1})|_{n_2} > 0 ; \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Comme chaque sous-suite de la suite (6) contient ou une infinité de termes de la forme $g^{2s_k}(v_{s_k})$ ou une infinité de termes de la forme $g^{2s_k}(w_{s_k})$ où $\{s_k\}$ est une sous-suite de $\mathbb{N}$, il résulte que chaque sous-suite de la suite (6) n'est pas une suite de Cauchy, donc n'est pas convergente.

On observe aussi que les sous-suites $\{g^{2s_k}(v_{s_k})\}, \{g^{2s_k}(w_{s_k})\}$ à cause de la relation (7) ne sont pas constantes.

Donc la suite (6) n'a pas de sous-suites convergentes. Mais cette affirmation est en contradiction avec l'hypothèse que g est un opérateur (sm)-compact parce que $g^{2s-1}(v_s), g^{2s-1}(w_s) \in A_0$; $s \in \mathbb{N}$.

On peut donc maintenant affirmer que la relation (5) est vraie.

Utilisant la relation (5), l'élément $x_0 \in A_0$, la monotonie de g et le fait que g est (sm)-compact, on peut construire une suite de la forme:

$$(10) \quad x_0 \geq g(x_1) \geq g^2(x_2) \geq \dots \geq g^n(x_n) \geq \dots$$

qui a les propriétés suivantes:

$$(11) \quad \phi(g^i(x_i)) < \frac{1}{i} ; \quad x_i \in A_0 ; \quad \forall i \in \mathbb{N} ,$$

$$(12) \quad \{g^i(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ est convergente vers un élément } y \in A .$$

Pour obtenir la suite (10), on utilise aussi le fait que ϕ vérifie la propriété:

$$(13) \quad u_1 \leq u_2 \Rightarrow \phi(u_1) \leq \phi(u_2) .$$

La relation $g^i(x_i) \geq y$ implique $g^{i+1}(x_i) \geq g(y)$ et comme $x_i \geq g(x_i)$ implique $g^i(x_i) \geq g^{i+1}(x_i)$, on obtient que $g^i(x_i) \geq g(y)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui donne $y \geq g(y)$, c'est-à-dire $y \in A_0$.

On observe que pour tout i et m , on a:

$$g^i(x_i) \geq g^{i+m}(x_{i+m}) \geq y \geq g(y) \geq g^{i+m}(y) ,$$

et, de la relation (11), on obtient

$$(14) \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} d(g^{i+m}(x_{i+m}), g^{i+m}(y)) < \frac{1}{i} < \frac{1}{i-1} ; \quad i = 2, 3, \dots$$

Donc il existe m tel que $d(g^{i+m}(x_{i+m}), g^{i+m}(y)) < \frac{1}{i-1}$.

La définition de la distance d implique pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^{-n} \frac{|g^{i+m}(x_{i+m}) - g^{i+m}(y)|_n}{1 + |g^{i+m}(x_{i+m}) - g^{i+m}(y)|_n} < \frac{1}{i-1}$$

et d'après un calcul élémentaire, on obtient pour tout n tel que $i-1 < 2^n$:

$$|g^{i+m}(x_{i+m}) - g^{i+m}(y)|_n < \frac{2^n}{i-1-2^n} ; \quad i = 2, 3, \dots$$

Pour n donné, on prend i tel que $i-1 > 2^n$; alors il existe m tel que

$$(15) \quad |g^{i+m}(x_{i+m}) - g^{i+m}(y)|_n < \frac{2^n}{i-1-2^n} .$$

Puisque $0 < y - g(y) \leq g^{i+m}(x_{i+m}) - g^{i+m}(y)$ et les semi-normes $\{| \cdot |_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones croissantes sur le cône K , on obtient que pour n donné et $i \rightarrow \infty$ ($i-1 > 2^n$) si on retient l'indice m pour lequel on a la relation (15):

$$0 < |y - g(y)|_n \leq |g^{i+m}(x_{i+m}) - g^{i+m}(y)|_n \leq \frac{2^n}{i-1-2^n}.$$

Donc, quand $i \rightarrow \infty$ on obtient $|y - g(y)|_n = 0$ et si on fait le même raisonnement pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $(\forall n \in \mathbb{N})(|y - g(y)|_n = 0)$ d'où $g(y) = y$. Comme $(I + \Lambda)^{-1}(f + \Lambda)(y) = y$, on obtient que $f(y) = y$ et le théorème est démontré. //

4. L'existence des valeurs propres positives

Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe, $K \subset E$ un cône convexe et " $\leq$ " la relation de préordre définie par K .

DÉFINITION. On dit que l'opérateur $f : A \rightarrow E$, $A \subset E$ est *fortement* Λ -monotone croissant sur A si et seulement s'il existe un opérateur $\Lambda : E \rightarrow E$ pas nécessairement linéaire et continu tel que

- 1) $(\forall \lambda > 0)$ il existe $(I + \lambda \Lambda)^{-1}$,
- 2) $(\forall \lambda > 0)((I + \lambda \Lambda)^{-1}$ est monotone croissant),
- 3) $f + \Lambda$ est monotone croissant sur A .

EXEMPLES.

1) Soit $E = \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})$; $i, j = 1, 2, \dots, n$ et $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que A est une (M) -matrice si

- i) $\det A \neq 0$,
- ii) $a_{ij} \leq 0$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$,
- iii) A^{-1} est une matrice positive.

On peut démontrer que si f est Λ -monotone croissante où Λ est une (M) -matrice, alors f est *fortement* Λ -monotone croissante.

REMARQUE. On connaît d'autres critères qui permettent de préciser si une matrice donnée est une (M) -matrice ou non.

Si la matrice $A = (a_{ij})$; $i, j = 1, 2, \dots, n$, vérifie les propriétés suivantes:

- i) $a_{ii} > 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$,
 ii) $a_{ij} \leq 0$, $\forall i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, n$,

alors A est une (M) -matrice si et seulement si $\|B\|_{sp} < 1$ où $\| \cdot \|_{sp}$ est la norme spectrale, $B = D^{-1}C$, $D = \text{diag.}(A)$ et $A = D - C$.

2) On dit que l'application $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ est une application *diagonale* si, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, la composante ϕ_i est fonction de x_i seulement (où $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$) .

Soit $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Lambda = A + \phi$ où ϕ est une application *diagonale continue* et *monotone croissante* et A une (M) -matrice. Alors si f est Λ -monotone croissante, on peut démontrer qu'elle est *fortement* Λ -monotone croissante.

3) Soit $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application qui a une décomposition de la forme $\Lambda = A + \phi$ où:

- a) $A = (a_{ij})$ et $a_{ij} \leq 0$, $\forall i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, n$,
 b) $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ est une application diagonale,
 c) $(\exists \alpha \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}^n) (\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \langle x, x \rangle)$,
 d) $(\exists \beta \in \mathbb{R}) (\forall s, t, s \neq t) ((\phi_i(s) - \phi_i(t)) / (s - t) \geq \beta)$; $i = 1, 2, \dots, n$,
 e) $\alpha + \beta > 0$.

Si f est Λ -monotone croissante, alors elle est *fortement* Λ -monotone croissante [14].

4) Soit $(E, \leq)$ un espace de Banach réticulé et pour chaque $x \in E$ soit:
 $x^+ = \sup(x, 0)$; $x^- = \sup(-x, 0)$; $|x| = x^+ + x^-$.

On sait [5] qu'il existe toujours une application de dualité positive J c'est-à-dire, $J : E \rightarrow E^*$ qui vérifie les propriétés suivantes:

- a) $\langle J(x), x \rangle = \|x\|^2$; $\forall x \in E$,
 b) $\|J(x)\| = \|x\|$; $\forall x \in E$,
 c) $\langle J(x), y \rangle \geq 0$ si $x \geq 0$, $y \geq 0$,
 d) $\langle J(x), y \rangle = 0$ si $x \perp y$ ($\inf(|x|, |y|) = 0$) .

On dit que l'opérateur $g : E \rightarrow E$ est T -accrétif si: $(\forall x, y \in E)$
 $(\langle g(x) - g(y), (J(x - y))^+ \rangle \geq 0)$.

On peut prouver que si $f : E \rightarrow E$ est Λ -monotone croissant, où Λ est un opérateur T -accrétif, alors f est fortement Λ -monotone croissant.

On peut maintenant démontrer le résultat principal de cet ouvrage.

THÉORÈME 2. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet et $K \subset E$ un cône convexe, saillant, fermé et normal.

Soit $f : K \rightarrow K$ un opérateur fortement Λ -monotone croissant tel que:

- 1) $(I + \lambda\Lambda)^{-1}(\lambda f + \lambda\Lambda)$ est (sm)-compact pour tout $\lambda > 0$.
- 2) $(I + \lambda\Lambda)^{-1}(\lambda f + \lambda\Lambda)(K) \subset K$; $\forall \lambda > 0$.
- 3) Il existe un sous-cône $K_0 \subset K$ localement borné fermé et un opérateur $h : K_0 \rightarrow K_0$ positivement homogène et monotone croissant tel que $(\forall x \in K_0)(\exists \gamma > 0)$
 $(\exists n \in \mathbb{N})(f(x) \leq_K \gamma h^n(x))$.
- 4) h est une k - β -contraction.
- 5) Il existe $u_0 \in K_0 \setminus \{0\}$ tel que $\{p(h^n(u_0))\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un ensemble non borné (où p est une semi-norme uniformément positive sur K_0).

Si f est forcé ($f(0) > 0$), alors il existe $\lambda_* > 0$ et $x_* \in K \setminus \{0\}$ tel que $f(x_*) = \lambda_* x_*$.

DÉMONSTRATION.

- (a) Premièrement, on prouve qu'il existe $x_0 \in K_0$ et $\lambda_0 \geq 1$ tels que
 $p(x_0) = 1$ et $h(x_0) = \lambda_0 x_0$.

Comme $E(\tau)$ est un espace de Fréchet et h est une k - β -contraction, l'index des points fixes de h est bien défini.

On suppose le contraire de l'affirmation (a), donc on suppose que $x \neq \lambda h(x)$ pour tout $x \in K_0$ tel que $p(x) = 1$ et tout $\lambda \in [0, 1]$.

Il résulte alors que $i_{K_0}(\lambda h, U) = \text{const.} = 1$ où $U = \{x \in K_0 \mid p(x) < 1\}$.

Mais cette conclusion donne une contradiction parce qu'on prouve maintenant que si $h(x) \neq x$ pour tout $x \in K_0$ tel que $p(x) = 1$, alors $i_{K_0}(h, U) = 0$.

En effet, on considère l'application:

$$g(x) = u_0 + h(x) ; \quad \forall x \in K_0$$

et l'homotopie,

$$g(x, \lambda) = \lambda[u_0 + h(x)] + (1 - \lambda)h(x) ; \quad \forall x \in K_0 ; \quad \forall \lambda \in [0, 1] .$$

Si on considère l'inclusion $x - h(x) \in K_0$, on constate que, ou bien elle n'a aucune solution $x \in K_0$ tel que $p(x) = 1$, ou bien si elle a des solutions, alors on a la propriété suivante:

(α_1) Il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in K_0$, $p(x) = 1$ et $x - h(x) \in K_0$, alors $p(x - h(x)) \geq \delta$.

En effet, si on a un nombre fini de solution dans l'affirmation (α_1), comme pour $x \in K_0$, tel que $p(x) = 1$, on a que $p(x - h(x)) > 0$, on peut trouver un nombre δ qui vérifie (α_1).

On suppose maintenant que l'inclusion $x - h(x) \in K_0$ a un ensemble infini de solutions S telles que $x \in K_0$ et $p(x) = 1$.

Si $\inf_{x \in S} p(x - h(x)) = 0$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in S$ tel que $p(x_n - h(x_n)) < \frac{1}{n}$.

Puisque p est uniformément positive sur K_0 , il résulte que $\{x_n - h(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} 0$ et de la relation $x_n = x_n - h(x_n) + h(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a que: $\beta(\{x_n\}) \leq \beta(\{x_n - h(x_n)\}) + \beta(\{h(x_n)\})$.

Comme $\beta(\{x_n - h(x_n)\}) = 0$, on obtient $\beta(\{x_n\}) \leq \beta(\{h(x_n)\}) \leq k\beta(\{x_n\})$ et puisque $k < 1$, il résulte $\beta(\{x_n\}) = 0$.

Donc il résulte qu'il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers un élément $\tilde{x} \in K_0$ (K_0 étant fermé). Il est clair que

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - h(x_n)) = \tilde{x} - h(\tilde{x}) \in K_0$ et $p(\tilde{x} - h(\tilde{x})) = 0$ d'où on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\gamma_n |\tilde{x} - h(\tilde{x})|_n \leq p(\tilde{x} - h(\tilde{x})) = 0 ,$$

ce qui donne que $\tilde{x} - h(\tilde{x}) = 0$. Mais on suppose que $x \neq h(x)$ pour $x \in K_0$ tel que $p(x) = 1$.

Donc, l'affirmation (α_1) est vraie.

(α_2) On peut choisir $u_0 \in K_0 \setminus \{0\}$ qui vérifie l'hypothèse 5) et tel que $p(u_0) < \delta$.

En effet, soit $\beta < \delta$ et $\gamma > 0$ tel que $\gamma p(u_0) = \beta$. Ou bien $p(u_0) < \delta$ et alors on a rien à changer, ou bien $p(u_0) \geq \delta$. Dans la deuxième situation, comme h est positivement homogène, on a

$$h^n(\gamma u_0) = h^n\left(\frac{\beta}{p(u_0)} \cdot u_0\right) = \frac{\beta}{p(u_0)} h^n(u_0) ,$$

$\{p(h^n(\gamma u_0))\}_{n \in \mathbb{N}}$ est non borné et $p(\gamma u_0) = \gamma p(u_0) = \beta < \delta$.

(α_3) $g(x, \lambda) \neq x$; $(\forall x \in K_0) (p(x) = 1)$; $\forall \lambda \in [0, 1]$.

En effet, si $g(x, \lambda) = x$ pour $x \in K_0$ tel que $p(x) = 1$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors il résulte que $\lambda[u_0 + h(x)] + (1 - \lambda)h(x) = x$ d'où

$$\lambda u_0 + h(x) = x$$

et, utilisant (α_1) et (α_2) , on obtient que $\delta \leq p(x - h(x)) = \lambda p(u_0) < \lambda \delta \leq \delta$, ce qui est impossible.

Donc $g(x, \lambda) \neq x$; $\forall \lambda \in [0, 1]$ et $(\forall x \in K_0) (p(x) = 1)$, d'où il résulte que l'index des points fixes est bien défini pour $g(x, \lambda)$, et de la propriété 4) de l'index, il résulte que

$$i_{K_0}(h, U) = i_{K_0}(g, U) .$$

(α_4) L'application g n'a pas de points fixes dans l'ensemble U .

On suppose que g a un point fixe dans l'ensemble U , donc qu'il existe $x \in U$ tel que $g(x) = x$ d'où $h(x) + u_0 = x$, ce qui donne $u_0 \leq x$ et par itération, $h^m(u_0) \leq x$; $\forall m \in \mathbb{N}$.

Soit $a_m = p(h^m(u_0))$. Alors la suite $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ est non bornée ($\subset \mathbb{R}_+$).

Il existe une suite $\{a_{m_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que:

- i) $a_{m_i} \geq i$,
- ii) $a_{m_i} \geq a_j$ pour $i \geq j \geq m_i$.

On prouve que l'ensemble

$$T = \left\{ \frac{h^{m_i}(u_0)}{p(h^{m_i}(u_0))} \mid i \geq 1 \right\}$$

a la fermeture compacte.

Il est suffisant de prouver que $\beta(T) = 0$.

Soit $n_0 > 1$.

$$T = \bigcup_{i=1}^{n_0} \left\{ \frac{h^{m_i}(u_0)}{p(h^{m_i}(u_0))} \right\} \cup \underbrace{h^{n_0} \left\{ \frac{h^{m_i - n_0}(u_0)}{p(h^{m_i}(u_0))} \mid i \geq n_0 + 1 \right\}}_{T_{n_0}}.$$

On observe que $T_{n_0} \subset \{x \in K_0 \mid p(x) \leq 1\} = \bar{U}$ mais p étant uniformément positive, on a que $\bar{U}$ est borné.

Donc $T \subset \{\text{ensemble fini}\} \cup h^{n_0}(\bar{U})$ d'où $\beta(T) \leq \beta(h^{n_0}(\bar{U})) \leq k^{n_0} \beta(\bar{U})$;
 $\forall n_0 > 1$.

Il résulte ainsi que $\beta(T) = 0$ et donc la suite T contient une sous-suite convergente.

On peut supposer que cette sous-suite est même

$$\frac{h^{m_i}(u_0)}{p(h^{m_i}(u_0))} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{h^{m_i}(u_0)}{p(h^{m_i}(u_0))}.$$

La relation

$$\frac{x}{p(h^{m_i}(u_0))} - \frac{h^{m_i}(u_0)}{p(h^{m_i}(u_0))} \in K_0$$

à la limite donne $-v \in K_0$, $v \neq 0$ (parce que $p(v) \neq 0$) ce qui est absurde parce que $K_0 \cap (-K_0) = \{0\}$.

Donc $i_{K_0}(g, U) = 0$ d'où on obtient $i_{K_0}(h, U) = 0$, ce qui est en contradiction avec la relation obtenue $i_{K_0}(\lambda h, U) = \text{const.} = 1$, $\forall \lambda \in [0, 1]$.

On obtient alors qu'il existe $x_0 \in K_0$ et $\lambda_0 \geq 1$ tel que $p(x_0) = 1$ et $h(x_0) = \lambda_0 x_0$.

(b) De l'hypothèse 3), il résulte que pour x_0 il existe $\gamma > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(x_0) \leq_K \gamma h^n(x_0) = \gamma \lambda_0^n x_0$.

Si on note $\tilde{\lambda} = \gamma \lambda_0^n$, on obtient que $\frac{1}{\tilde{\lambda}} f$ est $\frac{1}{\tilde{\lambda}}$ Λ -monotone croissant et les hypothèses 1) et 2) impliquent qu'on peut appliquer le Théorème 1 (de point fixe) à l'opérateur $\frac{1}{\tilde{\lambda}} f$, utilisant l'élément $x_0 \in K_0 \subset K$.

Donc il existe $x_* \in K \setminus \{0\}$ (puisque $f(0) > 0$) tel que $\frac{1}{\tilde{\lambda}} f(x_*) = x_*$ et si on note $\lambda_* = \tilde{\lambda}$, on obtient le théorème. //

REMARQUES.

1) Evidemment, le Théorème 2 s'applique dans le cas où E est un espace de Banach ordonné par un cône convexe K et $K_0 \subset K$ est un sous-cône "privilegié", comme par exemple un cône à base bornée.

2) On remarque aussi que le Théorème 2 reste vrai dans le cas important suivant. L'espace localement convexe $E(\tau)$ est ordonné par le cône convexe K et $K_0 \subset K$ est un sous-cône convexe tel que l'espace $F = K_0 - K_0 \subset E$ est un espace normé par rapport à la norme p supposée être définie seulement sur F . Dans ce cas, on suppose que K_0 est fermé dans l'espace F et que les hypothèses du Théorème 2 sont vérifiées. //

Le cas précisé dans la Remarque 2 est imposé par l'étude de l'existence des solutions globales sur le demi-axe $[0, +\infty[$ pour les équations intégrales de type Volterra associées à l'étude des solutions globales pour des systèmes différentiels [6], [30] ou à l'étude des équations à opérateurs dissipatifs [27]. On sait que les équations à opérateurs dissipatifs ont été imposées par l'étude de l'admissibilité définie par Massera et Schäffer [29] et étudiée par C. Corduneanu [6], [7] et R.K. Miller [31].

Relativement à l'étude des solutions globales des équations de type Volterra sur le demi-axe $[0, +\infty[$, on remarque maintenant deux exemples où notre résultat s'applique.

a) On considère l'espace $E = C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et sur E la topologie localement convexe de la convergence compacte qui est définie par la famille de seminormes $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ où $p_n(x) = \sup_{0 \leq t \leq n} |x(t)|$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Par rapport à cette topologie, E est un espace de Fréchet.

Soit $K = \{x \in E \mid x(t) \geq 0, \forall t \in [0, +\infty[\}$,
 $F = \mathcal{BC}([0, +\infty[, \mathbb{R}) = \{x \in E \mid \sup_{t \geq 0} |x(t)| < +\infty\}$ et $K_0 = K \cap F$. Sur F on considère la structure d'espace normé définie par la norme $p(x) = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$.

b) Le deuxième exemple est l'espace

$$E = L^2([0, +\infty[, \mathbb{R}) = \{x : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ est mesurable et } \forall n \in \mathbb{N}, \\ (\int_0^n |x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} < +\infty\}$$

muni de la topologie localement convexe définie par la famille de semi-normes

$\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n(x) = \left[\int_0^n |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par rapport à cette topologie, E est un espace de Fréchet. On considère le cône convexe $K = \{x \in E \mid f \geq 0 \text{ p.p.t.}\}$, $F = L^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $K_0 = K \cap F$. Sur F on considère la norme

$$p(x) = \left[\int_0^\infty |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Soit maintenant E , K et K_0 ou bien comme dans le cas (a) ou bien comme dans le cas (b).

Soit $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $u_0 \in K \setminus \{0\}$ et $G: K \rightarrow K$ une application. On suppose aussi qu'il est donnée une fonction $H(f, s)$; $\forall t, s \in [0, +\infty[$ telle qu'il existe une constante $M > 0$ et telle que $0 \leq H(t, s) \leq M \leq +\infty$, $\forall t, s \in [0, +\infty[$.

On suppose que l'opérateur f défini par

$$f(u)(t) = \int_0^t \frac{H(t, s) u_0(s)}{G(u)(s) + a} ds; \quad \forall t \in [0, +\infty[$$

a la propriété que $f(K) \subset K$. On trouve dans [30] et [27] des critères qui assurent cela.

Puisqu'on a

$$\int_0^t \frac{H(t, s) u_0(s)}{G(u)(s) + a} ds \leq \int_0^t \frac{H(t, s) u_0(s)}{a} ds \leq \frac{M}{a} \int_0^t u_0(s) ds; \quad \forall u \in K, \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$

on note $\psi_0(t) = \int_0^t u_0(s) ds$.

On suppose que $\psi_0 \in K_0 \setminus \{0\}$ et on observe que, pour avoir l'hypothèse 3) du Théorème 2, il est suffisant d'avoir un opérateur $h : K_0 \rightarrow K_0$ positivement homogène, monotone croissant et ψ_0 -borné au sens de Krasnoselskii [24], [25].

On observe aussi que l'opérateur f est forcé.

Si $\Lambda : E \rightarrow E$ est un opérateur linéaire tel que, pour tous $u, v \in K$ tels que $v \geq u$, on a :

$$\int_0^t u_0(s) [G(v)(s) - G(u)(s)] ds \leq \frac{a^2}{M} \Lambda(v - u)(t) ; \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$

alors on peut montrer que $f + \Lambda$ est monotone croissant sur K .

Si les autres hypothèses du Théorème 2 sont remplies et f est fortement Λ -monotone croissant, alors il existe $u_* \in K \setminus \{0\}$ et $\lambda_* > 0$ tels que,

$$\int_0^t \frac{H(t,s)u_0(s)}{G(u_*)(s) + a} ds = \lambda_* u_*(t) ; \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

NOTE. Des applications plus détaillées de nos résultats sur l'existence des solutions globales pour des systèmes différentiels ou pour des équations intégrales de type Volterra sur $[0, +\infty[$ seront présentées dans un prochain ouvrage. //

Bibliographie

- [1] AMANN, H., *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, Siam Reviews, Vol. 18, Nr. 4 (1976), 620-709.
- [2] BIRKHOFF, G. and KELLOG, O., *Invariant points in functions spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., Nr. 2-3 (1922), 96-115.
- [3] BONSALL, F.E., *Linear operators in complete positive cones*, Proc. Roy. Soc. London (3) 8 (1958), 53-75.

- [4] BONSALL, F.E., *Positive operators compact in an auxiliary topology*, Pacific J. Math., Nr. 10 (1960), 1131-1138.
- [5] CALVERT, B., *Nonlinear evolution equation in Banach lattices*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 845-950.
- [6] CORDUNEANU, C., *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*, Ann. Mat. Pures et Appl. (4) 67 (1965), 349-363.
- [7] CORDUNEANU, C., *Some perturbation problems in theory of integral equations*, Math. Systems Theory 1 (1967), 143-155.
- [8] CORNEA, A. et ICHIM, I., *Sur l'existence des valeurs propres pour des applications compactes*, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., Tome XXII, Nr. 5 (1977), 599-606.
- [9] DANCER, E.N., *Global solution branches for positive maps*, Arch. Rat. Mech. Anal. 52 (1973), 181-192.
- [10] EDMUNDS, D.E., POTTER, A.J.B. and STUART, C.A., *Non-compact positive operators*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 328 (1972), 67-81.
- [11] FITZPATRICK, P.M. and PETRYSHYN, W.V., *Fixed point theorems and the fixed point index for multivalued mapping in cones*, Journ. of the London Math. Soc., Vol. 12 F-1 (1975), 75-85.
- [12] FROBENIUS, G., *Über Matrizen aus positiven Elementen*, S.B. Preuss. Akad. Wiss. (1908), 514-518.
- [13] FROBENIUS, G., *Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen*, S.B. Preuss. Akad. Wiss. (1912), 456-477.
- [14] GLASHOFF, K. and WERNER, B., *Inverse monotonicity of monotone L-operators with applications to quasilinear and free boundary value problems*, Journ. of Math. Anal. and Appl. 72 (1979), 89-105.

- [15] HAHN, S., *Eigenwertaussagen für kompakte und Kondensierende mengenwertige Abbildungen in topologischen vectorräumen*, Comm. Math. Univ. Carolinae 20, Nr. 1 (1979), 123-141.
- [16] ISAC, G., *Un théorème de point fixe pour des opérateurs monotones dans des espaces localement convexes ordonnés*, ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ, Vol. 2 (1979), 391-412.
- [17] ISAC, G., *Valeurs propres positives pour des opérateurs de type α -Lipschitz dans des espaces de Fréchet*, Publ. Math. Univ. de Pau (1979), 1-29.
- [18] ISAC, G., *Cônes localement bornés, théorèmes de point fixe et valeurs propres positives pour des opérateurs non linéaires dans des espaces localement convexes*, Inst. de Math. Pures et Appl., Univ. Cat. de Louvain, Rapport Nr. 131 (1979), 1-59.
- [19] ISAC, G., *Un théorème de point fixe. Application au problème d'optimisation d'Eršov*, Seminari dell' Inst. Di Mat. Appl. "Giovanni Sansone", Univ. di Firenze (1980), 1-23.
- [20] ISAC, G., *Un théorème de point fixe. Application à la comparaison des équations différentielles dans les espaces de Banach ordonnés*, Libertas Math., Vol. 1 (1981), 75-89.
- [21] ISAC, G. et GAUDET, R., *Sur l'existence des valeurs propres positives pour des opérateurs non linéaires dans les espaces localement convexes*, Ann. Sc. Math. Québec, Vol. IV, Nr. 2 (1980), 127-144.
- [22] JENTZSCH, R., *Über Integralgleichungen mit positiven Kern*, J. Reine Angew. Math. 141 (1912), 235-244.
- [23] KARLIN, S., *Positive operators*, J. Math. Mech., Vol. 8, Nr. 6 (1959), 907-937.
- [24] KRASNOSELSKII, M.A., *Topological Method in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, McMillan, New York (1964).

- [25] KRASNOSELSKII, M.A., *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen (1964).
- [26] KREIN, M.G. and RUTMAN, M.A., *Linear operators leaving a cone invariant in a Banach space*, Uspehi Math. Nauk (Nr. 5), Nr. 1 (23) (1948), 3-95.
- [27] MARTIN, R.H., Jr., *Strongly dissipative operators and nonlinear equations in a Fréchet space*, Proc. Am. Math. Soc. 32, Nr. 1 (1972), 161-168.
- [28] MASSABO, I. and STUART, C.A., *Positive eigenvectors of K-set-contractions*, Nonlin. Anal. Th. Meth. and Appl., Vol. 3, Nr. 1 (1979), 35-44.
- [29] MASSERA, J.L. and SCHAFFER, J.J., *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press, New York (1966).
- [30] McDERMOTT, T.S., *Successive approximations in ordered vector spaces and global solutions of nonlinear Volterra integral equations*, Tr. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 57-64.
- [31] MILLER, R.K., *Admissibility and nonlinear Volterra integral equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 65-71.
- [32] NUSSBAUM, R.D., *Eigenvectors of nonlinear positive operators and the linear Krein-Rugman theorem*, In: Fixed Point Theory - Lecture Notes in Math., Nr. 886 (1981), Springer-Verlag.
- [33] ORTEGA, J.M. and REINOLDT, W.C., *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*, Acad. Press (1970).
- [34] PERRON, O., *Zur theorie der matrizen*, Math. Ann., Vol. 64 (1907), 248-263.
- [35] POLITJUKOV, V.P., *Solution of some nonlinear operator equations and their application to integrodifferential equations*, Soviet Math. Dokl, Vol. 21 (1980), Nr. 1, 229-233.

- [36] REICH, S., *Characteristic vectors of nonlinear operators*, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. A., Sci. Fiz. Mat. Natur. (8) 50 (1971), 681-685.
- [37] RHEINBOLDT, W.C. and VANDERGRAFT, J.S., *A simple approach to the Perron-Frobenius theory for positive operators on general partially-ordered finite-dimensional linear spaces*, Math. of Computation, Vol. 27, Nr. 121 (1973), 139-145.
- [38] SCHAEFER, H.H., *On nonlinear positive operators*, Pacific J. Math., Nr. 9 (1959), 847-860.
- [39] SCHNEIDER, H. and TURNER, R.E.L., *Positive eigenvectors of order-preserving maps*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 37 (1972), 506-515.
- [40] VANDERGRAFT, J.S., *Spectral properties of matrices which have invariant cones*, Siam J. Appl. Math., Vol. 16 (1968), 1208-1222.

Département de mathématiques
Collège militaire royal de Saint-Jean
Saint-Jean, P. Qué.
J0J 1R0

Manuscrit reçu le 15 juin 1982.
Révisé le 15 avril 1983.