

## REMARQUES SUR LES FONCTIONS SPÉCIALEMENT MULTIPLICATIVES<sup>1</sup>

Armel Mercier

### 1. Introduction

Soit  $g$  une fonction complètement multiplicative et soit  $f$  une fonction multiplicative vérifiant la relation

$$(1) \quad f(m)f(n) = \sum_{d|(m,n)} f\left(\frac{mn}{d^2}\right)g(d) ,$$

pour tout couple d'entiers positifs  $m$  et  $n$  ; dans un tel cas, nous disons que  $f$  est une fonction spécialement multiplicative. De plus, nous disons que  $g$  est la fonction associée à la fonction spécialement multiplicative  $f$ . Par exemple, les fonctions  $\sigma_{\alpha}(n) = \sum_{d|n} d^{\alpha}$  et  $\tau(n)$  (fonction tau de Ramanujan) sont spécialement multiplicatives et les fonctions associées sont respectivement  $n^{\alpha}$  et  $n^{11}$ .

Certaines caractérisations ainsi que certaines propriétés de ces fonctions ont été obtenues dans [2] et [3]. Le but du présent article est de trouver une expression pour

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s}$$

dans le cas où  $f(n)$  est une fonction spécialement multiplicative et  $h(n)$  est une fonction multiplicative et/ou spécialement multiplicative. Cette représenta-

---

<sup>1</sup> Travail fait dans le cadre de la subvention CRSNG A-3508

tion (2) généralise certains résultats obtenus par Redmond et Sivaramakrishnan [2] dans le sens que nous étudions la série de Dirichlet (2) pour une plus grande classe de fonctions arithmétiques. Lorsqu'il existe, nous désignerons par  $\sigma_0$  l'abscisse de convergence absolue des séries de Dirichlet.

## 2. Principaux résultats

Notons que d'après l'équation (1) on a, pour tout entier positif  $a$  et pour tout nombre premier  $p$ ,

$$(3) \quad f(p^{a+1}) = f(p)f(p^a) - g(p)f(p^{a-1}).$$

Dans le but de faciliter la démonstration des résultats qui suivront, nous établissons le résultat suivant.

LEMME. Soit  $a$  un entier positif ou nul. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative et soit  $h$  une fonction multiplicative telles que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s}$  converge absolument pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ . Alors

$$(4) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i})}{p^{is}} = \begin{cases} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s} + \frac{g(p)}{p^{2s}}\right)^{-1} \left[ f(p^a)g(p^a) - \frac{g(p)f(p^{a-1})h(p^{a+1})}{p^s} \right. \\ \quad + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})(h(p^{a+i+1}) - h(p^{a+i}))}{p^{is}} \\ \quad \left. - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})(h(p^{a+i+2}) - h(p^{a+i}))}{p^{is}} \right], & \text{si } a > 0 \\ \left(1 - \frac{f(p)}{p^s} + \frac{g(p)}{p^{2s}}\right)^{-1} \left[ 1 + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)(h(p^{i+1}) - h(p^i))}{p^{is}} \right. \\ \quad \left. - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)(h(p^{i+2}) - h(p^i))}{p^{is}} \right], & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ , on a, en utilisant (3),

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i})}{p^{is}} &= f(p^a)h(p^a) + \frac{f(p^{a+1})h(p^{a+1})}{p^s} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{h(p^{a+i})}{p^{is}} (f(p)f(p^{a+i-1}) \\
 &\quad - g(p)f(p^{a+i-2})) \\
 &= f(p^a)h(p^a) + \frac{f(p^{a+1})h(p^{a+1})}{p^s} + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i+1})}{p^{is}} \\
 &\quad - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i+2})}{p^{is}} \\
 &= f(p^a)h(p^a) + \frac{f(p^{a+1})h(p^{a+1})}{p^s} - \frac{f(p)f(p^a)h(p^{a+1})}{p^s} \\
 &\quad + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i+1})}{p^{is}} - \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i})}{p^{is}} \\
 &\quad + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i})}{p^{is}} - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i+2})}{p^{is}} \\
 &\quad - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i})}{p^{is}} + \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i})}{p^{is}}
 \end{aligned}$$

et ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i})}{p^{is}} &(1 - \frac{f(p)}{p^s} + \frac{g(p)}{p^{2s}}) \\
 &= f(p^a)g(p^a) + \frac{h(p^{a+1})}{p^s} (f(p^{a+1}) - f(p)f(p^a)) \\
 &\quad + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})[h(p^{a+i+1}) - h(p^{a+i})]}{p^{is}} \\
 &\quad - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})[h(p^{a+i+2}) - h(p^{a+i})]}{p^{is}} .
 \end{aligned}$$

Pour  $a = 0$ , le résultat est immédiat tandis que pour  $a > 0$ , il suffit d'utiliser la relation (3).

**THÉOREME 1.** Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative et soit  $h$  une fonction multiplicative telles que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s}$  converge absolument pour

$\operatorname{Re} s > \sigma_0$ . Alors on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \prod_p \left[ 1 + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)}{p^{is}} (h(p^{i+1}) - h(p^i)) - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)}{p^{is}} (h(p^{i+2}) - h(p^i)) \right].$$

DÉMONSTRATION. Pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} = \prod_p \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)h(p^i)}{p^{is}} \right),$$

et en utilisant le lemme précédent lorsque  $a = 0$  et  $h(n) = 1$ , pour tout entier positif  $n$ , on a pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)}{p^{is}} \right) = \prod_p \left( 1 - \frac{f(p)}{p^s} + \frac{g(p)}{p^{2s}} \right)^{-1}.$$

Ainsi, en utilisant le lemme lorsque  $a = 0$ , et les deux équations précédentes, nous obtenons le résultat escompté.

THÉOREME 2. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative et soit  $h$  une fonction multiplicative telles que pour tout entier  $k$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nk)h(nk)}{n^s}$  converge absolument pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ . Alors pour tout entier positif  $k$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nk)h(nk)}{n^s} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} \right) \prod_{p \nmid k} \left[ \frac{\frac{f(p^a)h(p^a)}{p^s} - \frac{g(p)f(p^{a-1})h(p^{a+1})}{p^s} + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})}{p^{is}} (h(p^{a+i+1}) - h(p^{a+i})) - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})}{p^{is}} (h(p^{a+i+2}) - h(p^{a+i}))}{1 + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)}{p^{is}} (h(p^{i+1}) - h(p^i)) - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)}{p^{is}} (h(p^{i+2}) - h(p^i))} \right]$$

DÉMONSTRATION. D'après un résultat de [1], on a pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nk)h(nk)}{n^s} = \prod_{p^a \parallel k} \left[ \frac{\frac{f(p^a)h(p^a)}{p^{as}} + \frac{f(p^{a+1})h(p^{a+1})}{p^{(a+1)s}} + \dots}{1 + \frac{f(p)h(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)h(p^2)}{p^{2s}} + \dots} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s}$$

et il suffit d'utiliser le lemme précédent pour obtenir le résultat.

Pour le résultat suivant, nous supposons que  $g_1$  est la fonction complètement multiplicative associée à la fonction spécialement multiplicative  $h$ .

THÉOREME 3. Soit  $f$  et  $h$  deux fonctions spécialement multiplicatives telles que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s}$  converge absolument pour  $\text{Re } s > \sigma_0$ . Alors on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} = \prod_p \left[ \frac{1 - \frac{g_1(p)g(p)}{p^{2s}}}{\left(1 - \frac{f(p)h(p) - g(p)g_1(p)}{p^s} + \frac{g(p)g_1(p)}{p^{2s}}\right) \left(1 - \frac{g(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{g_1(p)}{p^s}\right) + \frac{(h(p) - f(p))(g(p)h(p) - g_1(p)f(p)) + (g(p) - g_1(p))^2}{p^{2s}}}\right]$$

DÉMONSTRATION. Puisque pour tout entier positif  $k$ ,

$$(5) \quad \begin{aligned} f(p^{k+1}) &= f(p)f(p^k) - g(p)f(p^{k-1}) \\ h(p^{k+1}) &= h(p)h(p^k) - g_1(p)h(p^{k-1}) \end{aligned}$$

alors on obtient pour  $\text{Re } s > \sigma_0$

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)h(p^{k+1})}{p^{ks}} = \left[ \frac{h(p) - \frac{g_1(p)f(p)}{p^s}}{1 - \frac{g_1(p)g(p)}{p^{2s}}} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)h(p^k)}{p^{ks}}$$

et

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^{k+1})h(p^k)}{p^{ks}} = \left[ \frac{f(p) - \frac{g(p)h(p)}{p^s}}{1 - \frac{g_1(p)g(p)}{p^{2s}}} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)h(p^k)}{p^{ks}}.$$

Mais pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ , on a en utilisant (5)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} &= \prod_p \left[ 1 + \frac{f(p)h(p)}{p^s} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f(p^k)h(p^k)}{p^{ks}} \right] \\ &= \prod_p \left[ 1 + \frac{f(p)h(p)}{p^s} + \sum_{k=2}^{\infty} (f(p)f(p^{k-1}) - g(p)f(p^{k-2})) (h(p)h(p^{k-1}) - g_1(p)h(p^{k-2})) \right] \end{aligned}$$

et en utilisant les résultats des équations (6) et (7), on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} = \prod_p \left[ \frac{1 - \frac{g(p)g_1(p)}{p^{2s}}}{1 - \frac{f(p)h(p)}{p^s} + \frac{g(p)h^2(p) + g_1(p)f^2(p) - 2g(p)g_1(p)}{p^{2s}} - \frac{g(p)g_1(p)f(p)h(p)}{p^{3s}} + \frac{g^2(p)g_1^2(p)}{p^{4s}}} \right]$$

De simples manipulations nous permettent d'obtenir le résultat escompté.

### 3. Quelques exemples

Le théorème suivant (que l'on trouve aussi dans [2]) est une conséquence directe du Théorème 1.

THÉORÈME 4. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative. Alors pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)f(n)}{n^s} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{s-k}} \right) \prod_p \left( 1 - \frac{g(p)}{p^{2s-k}} \right).$$

THÉORÈME 5. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative et soit  $h$  une fonction fortement multiplicative, i.e.  $h(p^k) = h(p)$  pour tout nombre premier et pour tout entier positif  $k$ , telles que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s}$  converge absolument pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ . Alors pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \prod_p \left( 1 + \frac{f(p)}{p^s} (h(p) - 1) - \frac{g(p)}{p^{2s}} (h(p) - 1) \right).$$

DÉMONSTRATION. Conséquence immédiate du Théorème 1.

En utilisant ce dernier résultat, on peut énoncer le

THÉORÈME 6. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative. Alors

$\text{Re } s > \sigma_0$ .

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\phi(n)}{n^{s+1}} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \prod_p \left( 1 - \frac{f(p)}{p^{s+1}} + \frac{g(p)}{p^{2s+1}} \right),$$

où  $\phi$  est la fonction d'Euler.

$$2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\psi(n)}{n^{s+1}} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \prod_p \left( 1 + \frac{f(p)}{p^{s+1}} - \frac{g(p)}{p^{2s+1}} \right),$$

où  $\psi$  est la fonction de Dedekind définie par  $\psi(n) = n \prod_{p|n} \left( 1 + \frac{1}{p} \right)$ .

$$3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)} f(n)}{n^s} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \prod_p \left( 1 + \frac{f(p)}{p^s} - \frac{g(p)}{p^{2s}} \right),$$

où  $\omega(n)$  désigne le nombre de diviseurs premiers de l'entier positif  $n$ .

THÉORÈME 7. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative et soit  $h$  une fonction complètement multiplicative. Alors pour  $\text{Re } s > \sigma_0$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} = \prod_p \left( 1 - \frac{f(p)h(p)}{p^s} + \frac{g(p)h(p^2)}{p^{2s}} \right)^{-1}$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} \right) \prod_p \left( 1 + \frac{h(p)(1-f(p))}{p^s} + \frac{h(p^2)}{p^s} \left( \frac{g(p)-f(p)+1}{p^{s-h(p)}} \right) \right)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. D'après l'équation

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i})}{p^{is}} &= f(p^a)h(p^a) + \frac{f(p^{a+1})h(p^{a+1})}{p^s} + \frac{f(p)}{p^s} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i+1})}{p^{is}} \\ &\quad - \frac{g(p)}{p^{2s}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^{a+i})h(p^{a+i+2})}{p^{is}}, \end{aligned}$$

que l'on trouve dans la démonstration du lemme. On a, en utilisant le fait que  $h$  est complètement multiplicative et en posant  $a = 0$ , le résultat de la première partie.

Pour la seconde partie, on procède de la façon suivante. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)h(n)}{n^s} &= \prod_p \left( 1 - \frac{f(p)h(p)}{p^s} + \frac{g(p)h(p^2)}{p^{2s}} \right)^{-1} \\ &= \prod_p \left( \left( 1 - \frac{h(p)}{p^s} \right) \left( 1 + \frac{h(p)(1-f(p))}{p^s} + \frac{(g(p)-f(p)+1)h^2(p)}{p^{2s}(1-h(p)p^{-s})} \right) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Or  $\sum_{n=1}^{\infty} h(n)n^{-s} = \prod_p (1-h(p)p^{-s})^{-1}$ , d'où l'on obtient le résultat.

Ceci achève la démonstration de ce théorème.

Une conséquence directe du Théorème 7 est donnée par le résultat suivant:

THÉORÈME 8. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative. Alors pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\Omega(n)} f(n)}{n^s} = \prod_p \left( 1 - \frac{2f(p)}{p^s} + \frac{4g(p)}{p^{2s}} \right)^{-1}$$

où  $\Omega(n)$  désigne le nombre total des facteurs dans la décomposition de  $n$  en facteurs premiers.

THÉORÈME 9. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative et soit  $h$  une fonction fortement multiplicative telles que pour tout entier  $k$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nk)h(nk)}{n^s}$  converge absolument pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ . Alors pour tout entier  $k$  et pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nk)h(nk)}{n^s} &= h(k) \prod_{p^a \parallel k} \left( f(p^a) - \frac{g(p)f(p^{a-1})}{p^s} \right) \prod_{p \nmid k} \left( 1 + (h(p)-1) \left( \frac{f(p)}{p^s} - \frac{g(p)}{p^{2s}} \right) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. En utilisant les Théorèmes 2 et 5, on obtient le résultat désiré.

Un cas particulier (que l'on trouve aussi dans [2]) du Théorème 3 est le suivant:

THÉOREME 10. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative. Alors pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^2(n)}{n^s} = \prod_p \left( \left(1 + \frac{g(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{g(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{f^2(p) - 2g(p)}{p^s} + \frac{g^2(p)}{p^{2s}}\right)^{-1} \right).$$

Une généralisation du Théorème 10 s'énonce de la façon suivante:

THÉOREME 11. Soit  $f$  une fonction spécialement multiplicative. Alors pour tout entier  $k$  et pour  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^2(nk)}{n^s} = \prod_{p^a \parallel k} \left( f^2(p^a) + \frac{f^2(p^{a+1}) - f^2(p) f^2(p^a)}{p^s} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^2(n)}{n^s}.$$

#### Bibliographie

- [1] MERCIER, A., *Sommes de fonctions additives restreintes à une classe de congruence*, Canad. Math. Bull., 22 (1979), 59-73.
- [2] REDMOND, D. and SIVARAMAKRISHNAN, R., *Some properties of specially multiplicative functions*, Journ. of number theory, 13 (1981), 210-227.
- [3] SIVARAMAKRISHNAN, R., *On a class of multiplicative arithmetic functions*, J. Reine Angew. Math., 280 (1976), 157-162.

Module de mathématiques  
 Université du Québec à Chicoutimi  
 930, rue Jacques-Cartier est  
 Chicoutimi, Québec  
 G7H 2B1

Manuscrit reçu le 10 novembre 1981.  
 Révisé le 12 décembre 1981.