

LES ÉQUATIONS INVARIANTES PAR RAPPORT AUX REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DU GROUPE DE DE SITTER G. Gauthier¹

0. Formulation du problème

Un des groupes importants en physique, le groupe de de Sitter, est défini par:

$$G \equiv \{g \in L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^5) : g^t Y g = Y, \det g = 1 \text{ et } g_{00} \geq 1\},$$

où $L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^5)$ est l'ensemble des transformations linéaires de $\mathbb{R}^5$ sur lui-même, g^t , la matrice transposée de g , g_{00} , sa composante de la première ligne et de la première colonne et

$$Y \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1).$$

Le but de cet article est d'étudier une nouvelle facette du problème énoncé en [1] et dont la formulation in extenso se retrouve en [2].

Soient E un espace de Hilbert séparable et (T, G, E) une représentation de G . Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\sum_{k=0}^4 L_k \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_k} + i\kappa \psi(x) = 0, \quad (1)$$

où $i \equiv \sqrt{-1}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, les L_k sont des opérateurs linéaires fermés dans E ,

¹ Travail subventionné par le ministère de l'Éducation du Québec.

$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^5, E)$ et les valeurs $\psi(x) \equiv \psi(x_0, \dots, x_4)$ se transforment suivant (T, G, E) , lors des changements $g \in G$ des coordonnées $x_0, \dots, x_4$.

Supposons qu'il existe un sous-espace D partout dense dans E et tel que:

- 1) $L_0, \dots, L_4$ soient définis dans D ,
- 2) D soit invariant par rapport aux opérateurs $L_0, \dots, L_4$,
- 3) Les fermetures des opérateurs $L_0, \dots, L_4$, considérés seulement sur les sommes finies de vecteurs de D , coïncident avec les opérateurs $L_0, \dots, L_4$.

L'équation (1) sera dite invariante par rapport à (T, G, E) si et seulement si l'on peut choisir D tel que

- 1) $T_g D = D$, quel que soit l'opérateur T_g de (T, G, E) ,
- 2) si les valeurs $\psi(x)$ de D constituent une solution de (1), il en est de même des valeurs de ψ' définies par

$$\psi'(x) = T_g(g^{-1}x),$$

pour tout $g \in G$.

Les représentations dont il sera question ici seront supposées complètement réductibles en un nombre dénombrable de représentations unitaires irréductibles (r.u.i.), c'est-à-dire:

$$(T, G, E) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} (T^\ell, G, E^\ell), \quad (2)$$

où

$$E = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} E^\ell.$$

Si l'on note $(,)$ le produit scalaire de E , dire que les (T^ℓ, G, E^ℓ) sont unitaires, signifie que:

$$(T_g^\ell \psi^\ell(x), T_g^\ell \psi^\ell(x)) = (\psi^\ell(x), \psi^\ell(x)),$$

pour tout T_g^ℓ de (T^ℓ, G, E^ℓ) , où $\psi^\ell(x)$ représente la projection de $\psi(x)$ sur E^ℓ .

La méthode utilisée pour résoudre ce problème a été développée par un groupe de mathématiciens soviétiques, pour le groupe de Lorentz (v. [2] et [3]).

1. Les conditions d'invariance

Toutes les égalités entre les opérateurs signifieront dorénavant que les opérateurs coïncident sur D ; pour souligner ce fait, nous utiliserons le symbole $\doteq$.

Il est facile de voir qu'une condition nécessaire et suffisante à l'invariance de (1) par rapport à (T, G, E) est que :

$$\sum_{k=0}^4 g_{jk} T_g L_k T_g^{-1} \doteq L_j, \quad j = 0, \dots, 4, \quad (3)$$

où les g_{jk} sont les composantes de $g \in G$ exprimé dans la base standard de $\mathbb{R}^5$.

Les conditions (3) sont, comme telles, peu commodes car, le groupe G étant d'ordre infini, elles impliquent une infinité d'équations. Certaines propriétés de l'algèbre de Lie de G , de ses représentations et de leurs rapports avec G et ses représentations permettent toutefois d'en déduire d'autres équivalentes et plus pratiques.

Pour donner ces nouvelles conditions d'invariance, il sera nécessaire de définir une base orthonormale, B , de l'espace vectoriel E . Considérons pour ce faire les bases orthonormales des E^ℓ définies en [4], c'est-à-dire :

$$B^\ell \equiv \bigcup_{(m,n) \in J_\ell} B_{mn}^\ell$$

où

$$B_{mn}^\ell \equiv \{f_{\mu\nu}^{mn\ell} : \mu = -m, -m+1, \dots, m, \quad \nu = -n, -n+1, \dots, n\},$$

où les $f_{\mu\nu}^{mn\ell}$ sont des vecteurs orthonormaux de E^ℓ et les J_ℓ , des ensembles de

couples de nombres (m,n) tels que $2m, 2n \in \mathbb{N}$, qui dépendent de la r.u.i. considérée, d'une façon qui sera précisée plus loin. On pose alors:

$$B \equiv \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} B^\ell.$$

C'est par l'intermédiaire de B^ℓ et B que, respectivement, les opérateurs de (T^ℓ, G, E^ℓ) , $\ell \in \mathbb{N}$, et (T, G, E) seront identifiés à leur matrice.

Soient $T_{rs}(t)$ les opérateurs de (T, G, E) associés aux rotations élémentaires d'un angle t dans le plan (x_r, x_s) , $\gamma_{rs}(t)$, $r, s = 0, \dots, 4$, $r < s$ et I , l'opérateur identité de (T, G, E) . On définit les opérateurs infinitésimaux fondamentaux de (T, G, E) , Γ_{rs} , $r, s = 0, \dots, 4$, $r < s$, par:

$$\Gamma_{rs} \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{rs}(t) - I}{t}.$$

Le développement de Maclaurin des composantes de $\gamma_{rs}(t)$ et l'exponentiabilité de (T, G, E) , (v. [5]), conduisent au

LEMME 1. La relation (3) implique que

$$[L_j, \Gamma_{rs}] \doteq L_s \delta_{jr} + (-1)^{2^{r-1}} L_r \delta_{js}, \quad j = 0, \dots, 4, \quad (4)$$

où $r, s = 0, \dots, 4$, $r < s$, $\delta_{jj} = 1$, $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$ et $[A, B] = AB - BA$.

Soient

$$[A, B]_0 \equiv B$$

et pour $n \in \mathbb{N}_*$

$$[A, B]_n \equiv [A, [A, B]_{n-1}].$$

On peut alors démontrer, par récurrence sur n , le

LEMME 2. Pour $k, r, s = 0, \dots, 4$, $r < s$,

$$[\Gamma_{rs}, L_k]_n \doteq \begin{cases} L_k, & \text{si } n = 0 \\ h_1(k, n, r, s) L_r + h_2(k, n, r, s) L_s, & \text{si } n \in N_*, \end{cases}$$

où

$$h_1(k, n, r, s) \equiv \frac{1}{2} [(-1)^{n+1} (-1)^{\frac{n}{2}(2^r-1)} \delta_{kr} + \frac{1}{2} [(-1)^{n-1} (-1)^{\frac{n+1}{2}(2^r-1)} \delta_{ks}$$

$$h_2(k, n, r, s) \equiv \frac{1}{2} [(-1)^{n+1} (-1)^{\frac{n}{2}(2^r-1)} \delta_{ks} + \frac{1}{2} [(-1)^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}(2^r-1)} \delta_{kr} .$$

Pour voir que (4) entraîne (3), on utilise l'identité (v. [6]) :

$$A(t)B(A(t))^{-1} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [A, B]_n ,$$

(où A est l'opérateur infinitésimal du groupe à un paramètre $A(t)$), le Lemme 2 et le fait qu'il suffit de l'établir pour les rotations élémentaires (v. [7]). Cela, avec le Lemme 1, montre que les relations (3) et (4) sont équivalentes.

2. Simplification du problème

Le problème que nous nous étions posé au début se trouve maintenant réduit à celui de trouver les opérateurs $L_0, \dots, L_4$ vérifiant (4). Il est possible de le simplifier encore davantage. En posant $j=r=0$ dans (4), on tire en effet que:

$$L_s \doteq [L_0, \Gamma_{0s}] , \quad s = 1, 2, 3, 4 . \quad (5)$$

L_0 fixe donc complètement $L_1, \dots, L_4$. La relation (4) donne aussi:

$$[L_0, \Gamma_{rs}] \doteq 0 , \quad (6)$$

pour $r, s = 1, 2, 3, 4$, $r < s$. Ensemble, (4) et (5) procurent donc:

$$[[L_0, \Gamma_{01}], \Gamma_{01}] \doteq L_0 . \quad (7)$$

Ces deux dernières équations suffisent à déterminer L_0 .

L'action de L_0 sur un élément $f_{\mu\nu}^{mnl}$ de B s'exprime par:

$$L_0 f_{\mu\nu}^{mn\ell} = \sum_{\mu', \nu', m', n', \ell'} \left(\begin{matrix} \ell mn\mu\nu \\ \ell' m' n' \mu' \nu' \end{matrix} \right) f_{\mu', \nu'}^{m' n' \ell'} . \quad (8)$$

Suivant (6), les coefficients à droite sont non nuls seulement pour certaines valeurs des paramètres; on a effectivement:

$$\left(\begin{matrix} \ell mn\mu\nu \\ \ell' m' n' \mu' \nu' \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} \ell m \\ \ell' n \end{matrix} \right) \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} , \quad (9)$$

où les $\left(\begin{matrix} \ell m \\ \ell' n \end{matrix} \right)$ sont des facteurs, indépendants des μ, μ', ν, ν' , qu'il nous reste à déterminer.

3. Les r.u.i. de G

Quelques précisions sur les r.u.i. de G seront nécessaires. Nous les tirons de [4] .

Il existe deux types de r.u.i. de G .

1) Le type discret. On caractérise les r.u.i. de ce type par (p, q) , où $2p, 2q, 2(p-q) \in \mathbb{N}$. L'action de leurs opérateurs infinitésimaux fondamentaux sur les éléments des bases définies plus haut s'exprime en termes de celles des opérateurs de [4] avec:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01} &= \frac{1}{2}[\rho(X_\gamma) + \rho(X_{-\gamma})] , \quad \Gamma_{02} = \frac{i}{2}[\rho(X_{-\gamma}) - \rho(X_\gamma)] , \quad \Gamma_{03} = \frac{1}{2}[\rho(X_\delta) + \rho(X_{-\delta})] , \\ \Gamma_{04} &= \frac{i}{2}[\rho(X_{-\delta}) - \rho(X_\delta)] , \quad \Gamma_{12} = -\frac{1}{2}[\rho(L') + \rho(L)] , \quad \Gamma_{34} = \frac{1}{2}[\rho(L') - \rho(L)] , \\ \Gamma_{13} &= -\frac{1}{4}[\rho(X_{-\alpha}) + \rho(X_\alpha) + \rho(X_{-\beta}) + \rho(X_\beta)] , \quad \Gamma_{14} = -\frac{i}{4}[\rho(X_{-\alpha}) - \rho(X_\alpha) + \rho(X_{-\beta}) - \rho(X_\beta)] \\ \Gamma_{23} &= -\frac{i}{4}[\rho(X_{-\alpha}) - \rho(X_\alpha) - \rho(X_{-\beta}) + \rho(X_\beta)] , \\ \Gamma_{24} &= \frac{1}{4}[\rho(X_{-\alpha}) + \rho(X_\alpha) - \rho(X_{-\beta}) - \rho(X_\beta)] ; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A_{mn} &= \left(\frac{(m+n-p-1)(m+n+p+2)(m+n+q+1)(m+n-q+2)}{(2m+1)(2m+2)(2n+1)(2n+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
B_{mn} &= \left(\frac{(m-n-p-1)(m-n+p)(m-n+q-1)(m-n-q)}{2m(2m+1)(2n+1)(2n+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
C_{mn} &= B_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}, \quad D_{mn} = A_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Il y a trois possibilités pour l'ensemble J_{pq} intervenant dans la définition de B .

$$\begin{aligned}
(1.a) \quad J_{po} &\equiv \{(m,n) : p \leq 2m = 2n \in \mathbb{N}\}, \\
(1.b) \quad J_{pq}^- &\equiv \{(m,n) : 2m, 2n \in \mathbb{N}, m-n = q, q+1, \dots, p \text{ et } m+n = p, p+1, \dots\}, \\
(1.c) \quad J_{pq}^+ &\equiv \{(m,n) : 2m, 2n \in \mathbb{N}, m-n = q, q+1, \dots, p \text{ et } m+n = p, p+1, \dots\}.
\end{aligned}$$

2) Le type continu. Les r.u.i. de ce type se caractérisent par (p, σ) , où $2p \in \mathbb{N}$ et $-2 < \sigma \in \mathbb{R}$. Leurs opérateurs infinitésimaux fondamentaux s'expriment de la même façon que ceux de type discret avec toutefois:

$$\begin{aligned}
A_{mn} &= \left(\frac{(m+n-p+1)(m+n+p+2)[(m+n)^2 + 3(m+n) + 2 + \sigma]}{(2m+1)(2m+2)(2n+1)(2n+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
B_{mn} &= i \left(\frac{(m-n-p-1)(m-n+p)[(m-n)^2 - (m-n) + \sigma]}{2m(2m+1)(2n+1)(2n+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
C_{mn} &= B_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}, \quad D_{mn} = A_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Pour que les dénominateurs de (10) et (11) soient non nuls, il est nécessaire d'avoir $(m,n) \neq (0,p)$. Cette restriction n'engendre aucune difficulté.

4. Le centre du problème

Avec les opérateurs de [4], (7) devient:

$$[[L_0, \rho(X_{\gamma}) + \rho(X_{-\gamma})], \rho(X_{\gamma}) + \rho(X_{-\gamma})] \doteq 4L_0. \tag{12}$$

Lorsque l'on applique l'opérateur de chacun des membres de (12) aux vecteurs de B , en tenant compte de (15) et (16) de [4], on arrive au système suivant d'équations; sa résolution permettra de fixer les (ℓ_n^m) . Dans le but de simplifier la notation, cette dernière expression sera désormais écrite $(\frac{m}{n})$. Nous posons aussi:

$$u_0 \equiv \binom{m}{n}, \quad u_1 \equiv \binom{m-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}}, \quad u_2 \equiv \binom{m-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}},$$

$$u_3 \equiv \binom{m+\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}}, \quad u_4 \equiv \binom{m+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}, \quad u_5 \equiv \binom{m}{n+1},$$

et

$$a_{mn} \equiv [(2m+1)(2m+2)(2n+1)(2n+2)]^{\frac{1}{2}} A_{mn}^{\ell}$$

$$b_{mn} \equiv -i[2m(2m+1)(2n+1)(2n+2)]^{\frac{1}{2}} B_{mn}^{\ell}$$

De même pour a'_{mn} et b'_{mn} .

$$2a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a'_{mn} u_0 - a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a'_{mn} u_1 - a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a_{mn} u_4 = 0 \quad (13)$$

$$2a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a_{mn} u_0 - a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a_{mn} u_1 - a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a'_{mn} u_4 = 0 \quad (14)$$

$$2b_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} b'_{mn} u_0 - b_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} b_{mn} u_2 - b'_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} b'_{mn} u_3 = 0 \quad (15)$$

$$2b'_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} b_{mn} u_0 - b'_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} b'_{mn} u_2 - b_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} b_{mn} u_3 = 0 \quad (16)$$

$$(2m+1)a_{mn} b_{mn} u_0 - 2(m+1)a_{mn} b'_{mn} u_2 - 2ma'_{mn} b_{mn} u_4 + (2m+1)a'_{mn} b'_{mn} u_5 = 0 \quad (17)$$

$$(2m+1)a'_{mn} b'_{mn} u_0 - 2(m+1)a'_{mn} b_{mn} u_2 - 2ma_{mn} b'_{mn} u_4 + (2m+1)a_{mn} b_{mn} u_5 = 0 \quad (18)$$

$$(2n+3)a_{mn} b'_{mn} u_0 - 2(n+1)a_{mn} b_{mn} u_2 - 2(n+1)a'_{mn} b'_{mn} u_4 + (2n+1)a'_{mn} b_{mn} u_5 = 0 \quad (19)$$

$$(2n+3)a'_{mn} b_{mn} u_0 - 2(n+1)a'_{mn} b'_{mn} u_2 - 2(n+1)a_{mn} b_{mn} u_4 + (2n+1)a_{mn} b'_{mn} u_5 = 0 \quad (20)$$

$$[a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2 + a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2 + a_{mn}^2 + a'_{mn}^2 + b_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2 + b'_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2 + b_{mn}^2 + b'_{mn}^2$$

$$+ 8(2m+1)(2n+1)]u_0 - 2a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} u_1 - 2b_{mn} b'_{mn} u_2$$

$$- 2b_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} b'_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} u_3 - 2a_{mn} a'_{mn} u_4 = 0 \quad (21)$$

$$[(m+1)(n+1)(a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2 + a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2) + mn(a_{mn}^2 + a'_{mn}^2)$$

$$- m(n+1)(b_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2 + b'_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2) - (m+1)n(b_{mn}^2 + b'_{mn}^2)]u_0$$

$$- 2(m+1)(n+1)a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} u_1 + 2(m+1)nb_{mn} b'_{mn} u_2$$

$$+ 2m(n+1)b_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} b'_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} u_3 - 2mna_{mn} a'_{mn} u_4 = 0 \quad (22)$$

Ce système homogène est constitué de dix équations pour six inconnues. L'existence d'une solution non triviale requiert donc l'imposition de conditions sur ses coefficients qui se traduiront par une diminution du nombre de r.u.i. indicées par ℓ' dans la somme (8). Déterminons à présent les $\ell' \in \mathbb{N}$ qui permettent d'obtenir une telle solution. Nous dirons que les r.u.i. (T^ℓ, G, E^ℓ) et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$ sont enchaînées ou forment une chaîne dans ce cas.

5. Les chaînes de r.u.i.

Dans ce qui suit, (p, q) ou (p, σ) et (p', q') ou (p', σ') désignent les couples $(p, q)_\ell$ ou $(p, \sigma)_\ell$ et $(p, q)_{\ell'}$ ou $(p, \sigma)_{\ell'}$, caractérisant (T^ℓ, G, E^ℓ) et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$. D'après (9), il est essentiel d'avoir $(m, n) \in J_\ell \cap J_{\ell'}$, pour que (ℓ, m, n, μ, ν) soit non nul. Nous supposons désormais cette condition faite.

LEMME 3. Si $|p - p'| \geq 2$, alors $\binom{m}{n} = 0$, quel que soit $(m, n) \in J_\ell \cap J_{\ell'}$.

DÉMONSTRATION. Elle suit de (13) et de ce que $a_{mn} = 0$ si $(m, n) \notin J_\ell$.

LEMME 4. Si $p' = p \pm \frac{1}{2}$ ou $p \pm \frac{3}{2}$, alors $\binom{m}{n} = 0$ pour tout $(m, n) \in J_\ell \cap J_{\ell'}$.

DÉMONSTRATION. Les couples $(m, n) \in J_\ell$ sont des points sur les droites $m+n = p, p+1, \dots$ et ceux de $J_{\ell'}$, des points sur les droites $m+n = p', p'+1, \dots$. Si $p' = p \pm \frac{1}{2}$ ou $p \pm \frac{3}{2}$, il n'y a aucun point de J_ℓ qui soit également dans $J_{\ell'}$, i.e. $J_\ell \cap J_{\ell'} = \emptyset$, d'où la conclusion.

Les coefficients $\binom{m}{n}$ engendrent quatre genres de relations entre (T^ℓ, G, E^ℓ) et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$: un pour chacune des combinaisons possibles des types de ces r.u.i. Les Lemmes 3 et 4 font que les cas où $p' = p-1, p, p+1$ sont les seuls permettant d'avoir au moins un $\binom{m}{n} \neq 0$. Cherchons à présent les valeurs correspondantes de q' et σ' .

Soient

$$p_0 \equiv \max\{p, p'\} , \quad p_1 \equiv \min\{p, p'\} , \quad q_0 \equiv \max\{f(\ell), f(\ell')\} ,$$

où

$$f(\ell) \equiv \begin{cases} q , & \text{si } (T^\ell, G, E^\ell) \text{ est de type discret} \\ 0 , & \text{sinon} \end{cases}$$

et similairement pour $f(\ell')$. On définit alors:

$$(m_0, n_0) \equiv \begin{cases} (\frac{p_0}{2}, \frac{p_0}{2}) , & \text{si } J_\ell \text{ ou } J_{\ell'} \text{ est (sont) comme (1.a)} \\ (\frac{p_0+q_0}{2}, \frac{p_0-q_0}{2}) , & \text{si } J_\ell \text{ ou } J_{\ell'} \text{ est (sont) comme (1.b)} \\ (\frac{p_0-q_0}{2}, \frac{p_0+q_0}{2}) , & \text{si } J_\ell \text{ ou } J_{\ell'} \text{ est (sont) comme (1.c)} \\ (\frac{p_0+p_1}{2}, \frac{p_0-p_1}{2}) , & \text{si } (T^\ell, G, E^\ell) \text{ et } (T^{\ell'}, G, E^{\ell'}) \text{ sont de} \\ & \text{type continu.} \end{cases}$$

LEMME 5. Si $\binom{m_0}{n_0} = 0$, alors $\binom{m}{n} = 0$ pour tout $(m, n) \in J_\ell \cap J_{\ell'}$.

DÉMONSTRATION. Elle est semblable à celle du Lemme 3.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les valeurs cherchées de q' et σ' . Les quatre genres de relations entre (T^ℓ, G, E^ℓ) et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$ doivent être étudiés séparément.

1) (T^ℓ, G, E^ℓ) et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$ sont de type discret.

Si $p' = p \pm 1$, (17) et (19) donnent: $q' = q$. Si $p' = p$, de (15) et (16) on tire: $q' = q \pm 1$, $q \pm \frac{1}{2}$, q . Les valeurs $q' = q \pm \frac{1}{2}$ sont cependant à éliminer car $p' - q'$ doit être entier. Il en va de même de celles à l'extérieur de l'intervalle $[0, p]$.

2) (T^ℓ, G, E^ℓ) est de type discret et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$, de type continu.

Si $p' = p \pm 1$, de (17) et (19) il suit: $\sigma' = q(1-q)$. Comme $\sigma' > -2$,

les seuls q et σ' possibles sont: $(q, \sigma') = (0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(1, 0)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$.
Lorsque $p' = p$, (17), (18), (21) et (22) produisent encore: $\sigma' = q(1-q)$, plus:

$$\begin{aligned} \sigma' = [2(p+q)(p+q+1)(p-q+2) + q(1-q)(p^2+q^2+2pq+2p+q+1) \\ - (p+1)(2p^2+6p+4-q^2+q)](p^2+q^2+2pq+3p+q+2)^{-1} . \end{aligned} \quad (23)$$

3) (T^{ℓ}, G, E^{ℓ}) est de type continu et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$, de type discret.

Comme dans le cas précédent, on trouve que si $p' = p \pm 1$: $q' = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{4}-\sigma)^{\frac{1}{2}}$,
d'où: $(\sigma, q') = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ sont les seules combinaisons admissibles. Si $p' = p$, on obtient encore: $q' = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{4}-\sigma)^{\frac{1}{2}}$, plus les zéros demi-entiers dans $[0, p]$ du polynôme:

$$\begin{aligned} P_4(q') \equiv (q'^2+q'+\sigma)(q'^2+2pq+q'+p^2+2p+1) + (p+1)(2p^2+6p+4+\sigma-q'^2+q') \\ - 2(p+q')(p+q'+1)(p-q'+2) . \end{aligned}$$

4) (T^{ℓ}, G, E^{ℓ}) et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$ sont de type continu.

Si $p' = p \pm 1$, (17) - (20) donnent: $\sigma' = \sigma$. Supposons maintenant que $p' = p$. Si $p = 0$, de (13), (14), (21) et (22) il vient: $\sigma' = \sigma$ ou $\sigma' = \sigma - 1 \pm (1-4\sigma)^{\frac{1}{2}}$, pour $\sigma' > -2$. Si $p > 0$, de (17) - (20) on tire que $\sigma' = \sigma$ ou σ' est un zéro > -2 du polynôme:

$$\begin{aligned} P_2(\sigma') \equiv (10p^2+15p+5)\sigma'^2 + [(32p^4+98p^3+115p^2+57p+10) + (12p^2+20p+7)\sigma]\sigma' \\ - (2p+1)\sigma^2 + (12p^4+24p^3+15p^2-p-2)\sigma + 22p^6 + 93p^5 + 163p^4 \\ + 147p^3 + 67p^2 + 12p . \end{aligned}$$

Le tableau suivant rassemble les derniers résultats.

Types de (T^{ℓ}, G, E^{ℓ}) et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$		$p' = p \pm 1$	$p' = p$
Discret - discret	q'	q	$q, q \pm 1$
Discret - continu	σ'	$(q, \sigma') = (0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (1, 0), (\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$	$(q, \sigma') = (0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (1, 0), (\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$ ou σ' est donné par (23)
Continu - discret	q'	$(\sigma, q') = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}), (0, 0), (0, 1), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	$(\sigma, q') = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}), (0, 0), (0, 1), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ou q' est un zéro de $P_4(q')$
Continu - continu	σ'	σ	σ ou $\begin{cases} \sigma = 1 \pm (1-4\sigma)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } p = 0 \\ \sigma' \text{ est un zéro de } P_2(\sigma'), & \text{si } p > 0 \end{cases}$

Tableau du q' et σ'
(où $0 \leq q' \leq p'$, $2q' \in \mathbb{N}$ et $\sigma' > -2$)

6. Solution du problème

On vise à présent la forme explicite des u_0 non nuls. Disons tout d'abord que l'on écarte le cas où tous les u_0 de $J_\ell \cap J_{\ell'}$ seraient égaux à zéro car alors les autres u_k , $k = 1, \dots, 5$, le seraient également. Soulignons aussi que ces u_k s'obtiennent aisément lorsque l'on connaît les valeurs de u_0 dans $J_\ell \cap J_{\ell'}$.

Posons

$$(m_1, n_1) \equiv \begin{cases} \left(\frac{p_0}{2}, \frac{p_0}{2} \right), & \text{si } J_\ell \text{ ou } J_{\ell'}, \text{ est (sont) comme (1.a)} \\ \left(\frac{p_0+p_1}{2}, \frac{p_0-p_1}{2} \right), & \text{si } J_\ell \text{ ou } J_{\ell'}, \text{ est (sont) comme (1.b) ou si} \\ & (T^\ell, G, E^\ell) \text{ et } (T^{\ell'}, G, E^{\ell'}) \text{ sont du type continu} \\ \left(\frac{p_0-p_0}{2}, \frac{p_0+p_0}{2} \right), & \text{si } J_\ell \text{ ou } J_{\ell'}, \text{ est (sont) comme (1.c).} \end{cases}$$

Si $(m, n) \in J_\ell \cap J_{\ell'}$ et $m+n = a > p_0$, on définit similairement (m_2, n_2) en remplaçant p_0 par a dans (m_1, n_1) .

D'après le Lemme 5, on peut supposer que $\binom{m_1}{n_1} \neq 0$. Afin d'exprimer $\binom{m}{n}$, $(m, n) \in J_\ell \cap J_{\ell'}$, en fonction de $\binom{m_1}{n_1}$ on procédera par itération à l'intérieur de $J_\ell \cap J_{\ell'}$. Imaginons premièrement que $a_{mn}^2 \neq a'_{mn}{}^2$. Comme $a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} \neq 0$ si $m+n > m_1+n_1$, (13) et (14) donnent:

$$\binom{m}{n} = \frac{a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2 a_{mn}^2 - a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}{}^2 a'_{mn}{}^2}{2a_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} a'_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} (a_{mn}^2 - a'_{mn}{}^2)} \binom{m-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}}.$$

De même si $b_{mn}^2 \neq b'_{mn}{}^2$ et $m-n < m_1-n_1$, de (15) et (16) il résulte:

$$\binom{m}{n} = \frac{b_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}^2 b_{mn}^2 - b'_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}}{}^2 b'_{mn}{}^2}{2b_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} b'_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} (b_{mn}^2 - b'_{mn}{}^2)} \binom{m+\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}}.$$

On utilise le Lemme 6 pour traiter les cas $a_{mn}^2 = a'_{mn}{}^2$ et $b_{mn}^2 = b'_{mn}{}^2$.

Sa démonstration est directe.

LEMME 6. Soient $2k_0 \in \mathbb{N}$, $k \in K_0 \equiv \{k_0 + n : n \in \mathbb{N}\}$ et $g : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction telle que $g(k_0) = c_0$ et $g(k_0 + 1) = c_1$. L'unique solution de l'équation de récurrence

$$g(k+2) - 2g(k+1) + g(k) = 0, \quad k \geq k_0$$

est alors

$$g(k) = (k - k_0)c_1 - (k - k_0 + 1)c_0.$$

Lorsque $a_{mn}^2 = a'_{mn}{}^2$, les définitions de a_{mn} et a'_{mn} conduisent à: $(A_{mn}^\ell)^2 = (A_{mn}^{\ell'})^2$. Ayant fixé $A_{mn}^\ell = \sqrt{(A_{mn}^\ell)^2}$, pour les $(A_{mn}^\ell)^2$ de [2], il s'ensuit: $A_{mn}^\ell = A_{mn}^{\ell'}$, d'où: $a_{mn} = a'_{mn}$. Similairement, $b_{mn} = b'_{mn}$ découle de $b_{mn}^2 = b'_{mn}{}^2$. Les équations (13) et (14) conjuguées au Lemme 6 mènent alors à:

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} -\frac{a_{m-1,n-1} a_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{a'_{m-1,n-1} a'_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}} \binom{m-1}{n-1}, & \text{si } \binom{m-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} = 0 \\ 2 \binom{m-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} - \binom{m-1}{n-1}, & \text{si } \binom{m-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} \neq 0. \end{cases}$$

Le cas $b_{mn}^2 = b'_{mn}{}^2$ est semblable pour tous les points $(m,n) \in J_\ell \cap J_{\ell'}$, ne se trouvant pas sur la droite $y = -x + m_2 + n_2$, où $\binom{m_2}{n_2} = 0$. Dans cette dernière éventualité, le Lemme 5 conduit immédiatement à $\binom{m}{n} = 0$.

Pour réunir ces divers cas, on définit:

$$E(m,n) = \begin{cases} \frac{a_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^2 a_{mn}^2 - a'_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^2 a'_{mn}{}^2}{2a_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} a'_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} (a_{mn}^2 - a'_{mn}{}^2)}, & \text{si } a_{mn} \neq a'_{mn} \\ 2, & \text{si } a_{mn} = a'_{mn} \text{ et } \binom{m-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} \neq 0 \\ 0, & \text{si } a_{mn} = a'_{mn} \text{ et } \binom{m-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$F(m,n) \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } a_{mn} \neq a'_{mn} \\ -1, & \text{si } a_{mn} = a'_{mn} \text{ et } \binom{m-1}{n-2} \neq 0 \\ -\frac{a_{m-1,n-1} a_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{a'_{m-1,n-1} a'_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}, & \text{si } a_{mn} = a'_{mn} \text{ et } \binom{m-1}{n-2} = 0 \end{cases}$$

$$G(m,n) \equiv \begin{cases} \frac{b_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^2 b_{mn}^2 - b_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}' b_{mn}'^2}{2b_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} b_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}' (b_{mn}^2 - b_{mn}'^2)}, & \text{si } b_{mn} \neq b'_{mn} \\ 2, & \text{si } b_{mn} = b'_{mn} \text{ et } \binom{m+1}{n-2} \neq 0 \\ 0, & \text{si } \binom{m}{n-2} = 0 \text{ ou } b_{mn} = b'_{mn} \text{ et } \binom{m+1}{n-2} = 0 \end{cases}$$

$$H(m,n) \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } \binom{m}{n-2} = 0 \text{ ou } b_{mn} \neq b'_{mn} \\ -1, & \text{si } b_{mn} = b'_{mn} \text{ et } \binom{m+1}{n-2} \neq 0 \\ -\frac{b_{m+1,n-1} b_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{b'_{m+1,n-1} b'_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}, & \text{si } b_{mn} = b'_{mn} \text{ et } \binom{m+1}{n-2} = 0. \end{cases}$$

Nous avons ainsi démontré le

THÉORÈME 1. Soit $(m,n) \in J_\ell \cap J_{\ell'}$. Si $m+n > m_1+n_1$,

$$\binom{m}{n} = E(m,n) \binom{m-1}{n-2} + F(m,n) \binom{m-1}{n-1} \quad (24)$$

et si $m-n < m_1-n_1$,

$$\binom{m}{n} = G(m,n) \binom{m+1}{n-2} + H(m,n) \binom{m+1}{n-1}. \quad (25)$$

Ces deux équations de récurrence permettent d'écrire explicitement et de façon unique tous les $\binom{m}{n}$, $(m,n) \in J_\ell \cap J_{\ell'}$, en fonction de $\binom{m_1}{n_1}$ (v. [8]).

Enfin, soulignons qu'il est nécessaire de voir si les coefficients obtenus à partir de (24) et (25), avec $\binom{m_1}{n_1} = 0$, vérifient bien le système (13) - (22)

avant d'affirmer avoir effectivement une solution non triviale. L'unicité du résultat déduit garantit cependant que l'on obtient bien, par là, tous les $\binom{m}{n}$ non nuls.

Le théorème suivant résume les derniers résultats.

THÉOREME 2. Les composantes non nulles de L_0 sont celles qui correspondent aux r.u.i. (T^ℓ, G, E^ℓ) et $(T^{\ell'}, G, E^{\ell'})$ de (2) reliées par les chaînes du tableau des q' et σ' et se déduisent des équations (24) et (25).

Le nombre des paramètres $\binom{m_1}{n_1}$ intervenant dans L_0 est au plus égal au nombre total des r.u.i. enchaînées à (T^ℓ, G, E^ℓ) , $\ell \in \mathbb{N}$.

Les composantes de L_0 nous sont donc à présent accessibles, comme le sont alors aussi, en utilisant (5), celles de $L_1, \dots, L_4$.

7. Un exemple

Supposons que le comportement de $\psi(x)$ soit décrit par la r.u.i. auto-enchaînée de type continu déterminée par $(p, \sigma) = (0, 0)$, lors des transformations $g \in G$ des coordonnées $x_0, \dots, x_4$. Ici $\binom{m_1}{n_1} = \binom{0}{0} \equiv c$ sera la seule constante arbitraire qui apparaîtra dans l'expression de L_0 . En résolvant (24), on trouve que:

$$\binom{m}{n} = (2m+1)c\delta_{mn},$$

où le δ_{mn} vient de ce que tous les points de J_{00} sont sur la droite $y = x$. On vérifie facilement que cette solution satisfait (13) - (22). Les composantes de L_0 deviennent donc:

$$\binom{mn\mu\nu}{m'n'\mu'\nu'} = (2m+1)c\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}\delta_{mm'}\delta_{nn'}\delta_{mn}$$

et toutes celles non nulles se trouvent sur sa diagonale. De là, il est aisé de construire $L_1, \dots, L_4$ et l'équation invariante correspondante (v. [8]).

Remerciement

L'auteur remercie Monsieur P. Winternitz de l'Université de Montréal d'avoir accepté la direction de sa thèse de doctorat et de son aide dans la préparation de cet article.

Bibliographie

- [1] GAUTHIER, C., *Les équations invariantes sous les représentations finies du groupe de de Sitter*, 11 Nuovo Cimento B , A paraître.
- [2] NAIMARK, M.A., *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, Dunod, Paris, 1962.
- [3] GEL'FAND, I.M., MINLOS, R.A., SHAPIRO, Z.Y., *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*, Pergamon Press, Londres, 1963.
- [4] DIXMIER, J., *Représentations intégrables du groupe de de Sitter*, Bull. Soc. Math. France, 1961, 9-41.
- [5] FLATO, M., SIMON, J., SNELLMAN, H., STERNHEIMER, D., *Simple facts about analytics vectors and integrability*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 1972, 423-434.
- [6] MILLER, W. Jr, *Symmetry Groups and their Applications*, Academic Press, New York, 1972.
- [7] VILENKIN, N. Ja., *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris, 1969.
- [8] GAUTHIER, C., *Sur les équations invariantes sous le groupe de de Sitter*, Thèse de doctorat, Université de Montréal, 1979.

Département de mathématiques
Collège militaire royal de Saint-Jean
Saint-Jean-sur-Richelieu
Québec J0J 1R0

Manuscrit reçu le 20 mai 1980
Révisé le 26 octobre 1981.