

SUITES RÉGULIÈRES-HOMOGÈNES ET PROFONDEUR GRADUÉE Pierre Bouchard

1. Introduction

On connaît le spectre $(\text{Spec}(A))$ d'un anneau commutatif A et le spectre premier homogène $(\text{Proj}(S))$ d'un anneau gradué S , à degrés positifs, formé des idéaux premiers gradués de S ne contenant pas S (où $S = \bigoplus_{i \geq 1} S_i$).

On connaît aussi, pour un idéal I d'un anneau commutatif A et un A -module M , ce que sont une suite M -régulière d'éléments de A et la I -profondeur de M ($\text{prof}_I(M)$). Cette dernière, la borne supérieure des longueurs des suites M -régulières d'éléments de I , admet une caractérisation homologique ([A.K.], III, Prop. 3.8) à l'aide des Ext . Cependant, il n'y a pas, à notre connaissance, d'analogue gradué de ces notions.

Dans le présent travail, nous introduisons, à l'aide de la notion de suite régulière-relative de Mario Fiorenini [FIO], la notion de suite M -régulière-homogène d'éléments homogènes de degrés strictement positifs d'un anneau gradué S (et, "en passant", celle de suite régulière d'éléments d'un A -module M), puis celle de J -profondeur-graduée d'un S -module gradué M (où J est un idéal gradué de S) et nous donnons (Théorème 3.13), à l'aide des Ext gradués de Serre [FAC], une caractérisation homologique de la profondeur graduée.

2. Suites régulières-homogènes

Dans cette section et la suivante, $E_{\geq k}$ désignera $\bigoplus_{i \geq k} E_i$.

2.1. DÉFINITION. Soient S un anneau commutatif gradué, M un S -module gradué. Une suite $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments homogènes de degrés strictement positifs de S est une suite M -régulière-homogène si et seulement s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel (f_i) est M -régulière relativement à $M_{\geq k}$.

2.2. DÉFINITION. Soient A un anneau commutatif et M un A -module. Une suite $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de M sera dite suite régulière d'éléments du A -module M si et seulement si la suite $(\bar{f}_i)_{1 \leq i \leq n}$ image de $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ par l'application canonique $M \rightarrow S_A(M)$ est une suite A -régulière-homogène d'éléments de puissances symétriques de M .

Lorsque $M = A$, on retrouve la définition usuelle de suite régulière comme le montre la proposition suivante.

2.3. PROPOSITION. Soient A un anneau commutatif, N un A -module, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de A , $(n_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'entiers strictement positifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est N -régulière,
- 2) $(f_i T^{n_i})_{1 \leq i \leq n}$ (comme suite d'éléments de $A[T] \simeq S_A(A)$) est $A[T] \otimes_A N$ -régulière relativement à $T^k A[T] \otimes N$ pour $k > \max\{n_i \mid 1 \leq i \leq n\}$,
- 3) $((f_i T^{n_i})_{1 \leq i \leq n})$ est $A[T] \otimes_A N$ -régulière relativement à $T^k A[T] \otimes_A N$ pour $k > 1$.

PREUVE. 1) $\implies$ 2) . La multiplication par $f_{i+1} T^{n_{i+1}}$ étant homogène de degré n_{i+1} , il suffit de montrer que, quel que soit $k \geq 1$, et $m \in N$, $m_j \in N$, si

$$(*) \quad f_{i+1} T^{n_{i+1}} (T^k \otimes m) = \sum_{1 \leq j \leq i} (f_j T^{n_j}) (T^{k_j} \otimes m_j)$$

(où $k_j = n_{i+1} + k - n_j \geq 0$), alors

$$(**) \quad T^k \otimes m \in \sum_{1 \leq j \leq i} (f_j T^{n_j}) (A T^{k-n_j} \otimes N) = A T^k \otimes \sum_{1 \leq j \leq i} f_j N.$$

Mais (*) implique que $f_{i+1}m = \sum_{1 \leq j \leq i} f_j m_j$, ce qui, compte tenu de 1), implique que $m \in \sum_{1 \leq j \leq i} f_j N$, d'où (**).

2) $\implies$ 1). Si $f_{i+1}m \in \sum_{1 \leq j \leq i} f_j N$, alors

$$f_{i+1} T^{n_i+1} (T^k \otimes m) \in \sum_{1 \leq j \leq i} (f_j T^{n_j}) (AT^{k_j} \otimes N) \quad (k \geq 1)$$

(où $k_j = n_{i+1} + k - n_j \geq 0$), d'où, par 2)

$$T^k \otimes m \in \sum_{1 \leq j \leq i} (f_j T^{n_j}) (AT^{k-n_j} \otimes N) = AT^k \otimes \sum_{1 \leq j \leq i} f_j N$$

ce qui implique que $m \in \sum_{1 \leq j \leq i} f_j N$.

2) $\iff$ 3). Utilisant 1) $\iff$ 2) et le fait que $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est N-régulière si et seulement si $(f_i^{n_i})_{1 \leq i \leq n}$ est N-régulière ([MOR], Cor. 1 du Th. 1 et Cor. 1 du Th. 2), on conclut.

2.4. REMARQUE. La condition $k \geq \ell = \max\{n_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ est nécessaire en 1) $\implies$ 2) comme le montre l'exemple où $A = N = \mathbb{Z}$, $f_1 = 2$, $f_2 = 3$, $n_1 = 2 = n_2$ et $k = 1 < 2 = \ell$ car $3T^2(2T)$ est élément de $\sum_{1 \leq j \leq 1} f_j T^{n_j} (TZ[T])$, $2T \in TZ[T]$ mais $2T \notin \sum_{1 \leq j \leq 1} f_j T^{n_j} (Z[T]) = 2T^2Z[T]$.

Les trois propositions qui suivent (2.5, 2.6, 2.8) font voir des liens entre régularité et régularité-homogène dans le cas où interviennent des modules localement libres, ce qui nous servira dans un travail ultérieur de nature plus géométrique.

2.5. PROPOSITION. Soient A un anneau commutatif, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de A et I l'idéal engendré par cette suite.

Si I est un A -module libre de rang 1 (c'est-à-dire si $I = Af$ est principal et engendré par un élément régulier), alors les conditions suivantes sont équivalentes

- 1) $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est A-régulière relativement à I ,
 2) $(f_i/f)_{1 \leq i \leq n}$ est A-régulière (où f_i/f dénote l'unique $y \in A$ tel que $f_i = fy$),
 3) $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite régulière d'éléments du A-module I
 (Déf. 2.2).

PREUVE. 1) $\iff$ 2) . Résulte des définitions.

2) $\implies$ 3) . On a un isomorphisme $A \rightarrow I : a \mapsto af$ qui donne lieu à un isomorphisme $S_A(A) \rightarrow S_A(I)$ par lequel la suite $(\overline{f_i/f})_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $S_A(A)_1$ est envoyée dans $(\overline{f_i})_{1 \leq i \leq n}$, suite d'éléments de $S_A(I)_1$ d'où, compte tenu de la Proposition 2.3 pour la troisième équivalence ci-dessous:

$(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite régulière d'éléments du A-module I si et seulement si:

$(\overline{f_i})_{1 \leq i \leq n}$ est une suite $S_A(I)$ -régulière relativement à $S_A(I)_{>1}$ (voir Remarque 2.7) ,

$(\overline{f_i/f})_{1 \leq i \leq n}$ est une suite $S_A(A)$ -régulière relativement à $S_A(A)_{\geq 1}$,

$(f_i/f)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite A-régulière.

2.6. PROPOSITION. Soient A un anneau commutatif, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de A et I l'idéal qu'elle engendre. Si I est un A-module localement libre de rang 1 , alors les conditions suivantes sont équivalentes

- 1) $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est A-régulière relativement à I ,
 2) $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite régulière d'éléments du A-module I .

PREUVE. Il est aisé de voir qu'une suite est M-régulière relativement à N si et seulement si la suite localisée en chaque idéal premier p est M_p -régulière relativement à N_p . Utilisant ce fait et l'observation que $S_A(I)_p \simeq S_{A_p}(I_p)$, on se ramène à la Proposition 2.5.

2.7. REMARQUE. Dans la preuve de la Proposition 2.5 (et donc implicitement dans celle de la Proposition 2.6), nous semblons ne pas utiliser explicitement la définition de suite régulière d'éléments d'un module donné en (2.1) car la dé-

finition de suite régulière-homogène fait intervenir un entier strictement positif k quelconque alors qu'aux endroits précités, nous nous sommes permis de prendre $k = 1$. En fait, nous pouvons nous permettre ceci pour des suites d'éléments homogènes de degré 1 de l'algèbre symétrique d'un A -module libre de rang 1. En effet, comme alors $S_A(I)$, $S_A(A)$ et $A[T]$ sont isomorphes nous sommes ramenés à vérifier que les conditions suivantes sont équivalentes pour une suite donnée

$(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de A :

- 1) $(a_i T)_{1 \leq i \leq n}$ est $A[T]$ -régulière relativement à $T^k A[T]$.
- 2) $(a_i T)_{1 \leq i \leq n}$ est $A[T]$ -régulière relativement à $TA[T]$.

On peut se limiter dans la vérification à des éléments homogènes.

2) $\implies$ 1) est trivial. Supposons donc 1) vérifiée. Soit P un élément homogène de $A[T]_{\geq 1}$ et $i \in \{i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ tels que $(a_{i+1} T)P \in \sum_{j \leq i} (a_j T)A[T]$ si $\deg(P) \geq k$. On a forcément $P \in A[T]_{\geq k}$ et

$$(a_{i+1} T)P \in \sum_{j \leq i} (a_j T)A[T]_{\geq k},$$

l'hypothèse 1) permet alors de conclure que

$$P \in \sum_{j \leq i} (a_j T)A[T];$$

d'autre part, si $\deg(P) = r \leq k$, on a $PT^{k-r} \in A[T]_{\geq k}$ et

$$(a_{i+1} T)(PT^{k-r}) \in \sum_{j \leq i} (a_j T)A[T]_{\geq k}$$

l'hypothèse 1) permet alors de conclure que

$$(PT^{k-r}) \in \sum_{j \leq i} (a_j T)A[T].$$

Il existe donc des éléments y_j ($j \leq i$) de A tels que

$$PT^{k-r} = \sum_{j \leq i} (a_j T)y_j T^{k-1}$$

d'où

$$P = \sum_{j \leq i} (a_j T) y_j T^{r-1} \in \sum_{j \leq i} (a_j T) A[T]$$

car $r \geq 1$.

2.8. PROPOSITION. Soient A un anneau commutatif, M un A -module libre de rang 1, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments homogènes de degrés $n_i = \deg(f_i) \geq 1$ de $S_A(M)$, $(\phi_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i}$ une famille d'isomorphismes de M dans A , N un A -module et pour $1 \leq i \leq n$, g_i , l'image de f_i par l'isomorphisme composé:

$$S_A(M) \rightarrow M^{\otimes n_i} \xrightarrow{\psi} A^{\otimes n_i} \rightarrow A$$

(où $\psi = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n_i}} \phi_{i,j}$). Alors les conditions suivantes sont équivalentes

- 1) $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite N -régulière-homogène d'éléments de puissances symétriques de M .
- 2) $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite N -régulière.

PREUVE. Les $\phi_{i,j}$ ne différant que par un élément inversible, on peut les supposer tous égaux à un même ϕ . Ensuite, identifiant $S_A(A)$ à $A[T]$, on a $S_A(\phi)(f_i) = g_i T^{n_i}$ et on se ramène à la Proposition 2.3.

2.8.1. COROLLAIRE. Soient A un anneau commutatif, M un A -module localement libre de rang 1, N un A -module, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments homogènes de degrés $n_i = \deg(f_i) \geq 1$ de $S_A(M)$ et pour chaque $p \in \text{Spec}(A)$, $(\phi_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i}$ une suite d'isomorphismes de M_p dans A_p , g_i l'image de f_i par l'isomorphisme

$$S_{A_p}(M_p)_{n_i} \rightarrow M_p^{\otimes n_i} \xrightarrow{\phi_{i,j}} A_p^{\otimes n_i} \rightarrow A_p.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite N -régulière-homogène d'éléments de puissances symétriques de M ,
- 2) pour tout $p \in \text{Spec}(A)$, $((g_i)_p)_{1 \leq i \leq n}$ est N_p -régulière.

3. Profondeur graduée

Dans cette section, S désigne un anneau commutatif gradué à degrés positifs et noethérien, M, N des S -modules gradués à degrés positifs et de type fini, J un idéal gradué de S , $J \subseteq S_+$ et les Ext , des Ext de modules gradués au sens de Serre ([FAC], §4.) .

Rappelons que les $\text{Ext}_S^q(M, N)_k$ sont les foncteurs dérivés des $\text{Hom}_S^q(M, N)_k$ (homomorphismes gradués de degré k). On peut les calculer en prenant une résolution de M

$$\rightarrow L^{q+1} \rightarrow L^q \rightarrow \dots \rightarrow L^0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

à l'aide de S -modules gradués libres et de S -homomorphismes gradués de degré 0.

Le q^e module gradué de cohomologie du complexe

$$0 \rightarrow \text{Hom}_S(M, N) \rightarrow \text{Hom}_S(L^0, N) \rightarrow \text{Hom}_S(L^1, N) \rightarrow \dots$$

est

$$\text{Ext}_S^q(M, N) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{Ext}_S^q(M, N)_k .$$

M étant de type fini, $\text{Ext}_S^q(M, N)$ est bien le Ext ordinaire.

Rappelons que $S_{(f)}$ est la composante de degré 0 du localisé S_f etc. (Les notations sont celles de [EGA2], §2.)

3.1. LEMME. Si f est un élément homogène de S_+ , les homomorphismes

$$\text{Ext}_S^q(N, (\cdot f))_{\geq k} \quad \text{et} \quad \text{Ext}_S^q((\cdot f), M)_{\geq k} \quad q \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}$$

sont tous deux égaux à l'homothétie de rapport f dans $\text{Ext}_S^q(N, M)_{\geq k}$.

3.2. LEMME. Si K est un S -module gradué à degrés positifs tel que $K_{\geq k} = 0$, alors

$$\text{Ext}_S^q(N, K)_{\geq k} = 0 \quad q \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}^* .$$

3.3. LEMME. Soit f un élément homogène de J , M -régulier relativement à $M_{\geq k}$. Alors, K étant le noyau de $\cdot f : M \rightarrow M$ et $\Psi : M \rightarrow \frac{M}{K}$ l'application canonique

$$\text{Ext}_S^q(N, \Psi)_{\geq k} : \text{Ext}_S^q(N, M)_{\geq k} \rightarrow \text{Ext}_S^q(N, \frac{M}{K})_{\geq k} \quad k \in \mathbb{N}$$

est un isomorphisme pour $q \in \mathbb{N}$.

PREUVES. (3.1) est trivial. Dans (3.2), $\text{Ext}_S^q(N, K)_{\geq k}$ est un module de cohomologie d'un complexe formé de zéros! Venons-en à 3.3. $K_{\geq k} = 0$ car f est M -régulier relativement à $M_{\geq k}$. De la suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow \frac{M}{K} \rightarrow 0$$

on déduit la suite exacte

$$\dots \text{Ext}_S^q(N, K) \rightarrow \text{Ext}_S^q(N, M) \rightarrow \text{Ext}_S^q(N, \frac{M}{K}) \rightarrow \text{Ext}^{q+1}(N, K) \dots$$

qui, compte tenu de (3.2) nous donne les suites exactes

$$0 \rightarrow \text{Ext}_S^q(N, M)_{\geq k} \rightarrow \text{Ext}_S^q(N, \frac{M}{K})_{\geq k} \rightarrow 0 \quad q \in \mathbb{N}.$$

3.4. LEMME. Soit f un élément homogène de S de degré strictement positif m . $\tilde{N}$ le $\mathcal{O}_X$ -module associé à N où $X = \text{Proj}(S)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) $V_+(f) \supset \bigcup_{0 \leq k \leq m-1} \text{Supp}(\tilde{N}(k))$.
- 2) L'homothétie de rapport f dans N est nilpotente.

PREUVE. Remarquons que

$$N(k)_{(f)} = (N(k)_f)_0 = (N_f(k))_0 = (N_f)_k.$$

D'autre part

$$N(k)_{(f)} = \Gamma(D_+(f), \tilde{N}) = \Gamma(\text{Spec}(N(k)_{(f)}), \widetilde{N(k)_{(f)}}),$$

et

$$\begin{aligned}
N(k)_{(f)} = 0 &\iff (\forall x \in D_+(f)) (\tilde{N}(k)_x = 0) \\
&\iff D_+(f) \cap \text{Supp}(\tilde{N}(k)) = \emptyset \\
&\iff V_+(f) \supset \text{Supp}(\tilde{N}(k)) .
\end{aligned}$$

La condition 1) est donc équivalente à $(N_f)_k = 0$, $0 \leq k \leq m-1$.

2) $\implies$ 1) . Si l'homothétie de rapport f est nilpotente, alors $N_f = 0$ et à fortiori $(N_f)_k = 0$ de sorte qu'on a 1) .

1) $\implies$ 2) . Si $(N_f)_k = 0$ pour $0 \leq k \leq m-1$, prenons un $\ell \in \mathbb{N}$ et $x \in N_1$. Comme $\ell = rm + k$ avec un k tel que $0 \leq k \leq m-1$, $\frac{x}{f^r} \in (N_f)_k$, d'où $\frac{x}{f^r} = 0$ et il existe donc un entier n tel que $f^n x = 0$; l'homothétie de rapport f dans N est donc presque nilpotente et comme N est noethérien, elle est nilpotente.

3.5. LEMME. Si S est engendré sur S_0 par S_1 , alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\text{Supp}(\tilde{N}(k)) = \text{Supp}(\tilde{N})$.

PREUVE. Soit $p \in \text{Supp}(\tilde{N})$. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et $n \in N_\ell$ tels que $0 \neq \frac{n}{s} \in N_p$. Alors $tn = 0$ quel que soit $t \in S \setminus p$. Soit $r \in S_1 \setminus p$ (rem.: $p \nmid S_+$). Alors pour $k > 0$, $0 \neq \frac{r^k n}{s} \in \tilde{N}(k)_p$ et pour $k \leq 0$, $0 \neq \frac{n}{r^{-k}s} \in \tilde{N}(k)_p$, d'où $p \in \text{Supp}(\tilde{N}(k))$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$. On montre l'inclusion réciproque de façon tout à fait semblable.

3.6. LEMME. Si S est engendré sur S_0 par les éléments de S_1 , alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) $V_+(f) = \text{Supp}(\tilde{N})$.
- 2) L'homothétie de rapport f dans N est nilpotente.

PREUVE. Conséquence immédiate de 3.4 et 3.5.

3.7. LEMME. Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments homogènes de degré strictement positif de S et pour $2 \leq i \leq n$, posons $\bar{f}_i = f_i + f_1 M \in \frac{M}{f_1 M}$. On a alors les conditions équivalentes:

- 1) $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est M -régulière relativement à $M_{\geq k}$.

2) f_1 est M -régulier et $(\bar{f}_i)_{2 \leq i \leq n}$ est $\frac{M}{f_1 M}$ -régulière relativement à $(\frac{M}{f_1 M})_{\geq k}$.

PREUVE. Résulte de la définition de suite régulière-relative.

3.8. LEMME. Si $S_1 \setminus p \neq \emptyset$, alors, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, le $S_{(p)}$ -module $N(k)_{(p)}$ est de type fini.

PREUVE. Soient $t \in S_1 \setminus p$, $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ une suite de générateurs homogènes de N . Pour $1 \leq i \leq r$, posons

$$g'_i = \left(\frac{g_i}{1}\right) \left(\frac{t}{1}\right)^{k - \deg(g_i)} \in N(k)_p.$$

On remarque que $g'_i \in N(k)_{(p)}$. Soit $\frac{n}{s} \in N(k)_{(p)}$ avec $\deg(n) = \deg(s) + k$.

Alors $n = \sum_{1 \leq i \leq r} s_i g_i$ avec $s_i \in S_{\deg(n) - \deg(g_i)}$ d'où

$$\frac{n}{s} = \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{s_i g_i}{s} = \sum_{1 \leq i \leq r} \left(\frac{s_i}{s}\right) \left(\frac{t}{1}\right)^{\deg(g_i) - k} \cdot g'_i$$

et on vérifie que $\left(\frac{s_i}{s}\right) \left(\frac{t}{1}\right)^{\deg(g_i) - k}$ est un élément de $S_{(p)}$ (deux calculs de degrés à faire suivant que $\deg(g_i) - k \geq 0$ ou $\deg(g_i) - k \leq 0$).

3.9. LEMME. Supposons $S_1 \setminus p \neq \emptyset$. Soient

$$U = \{g \mid g \in S, g \text{ homogène}, g \in p\}, \quad \pi : S \rightarrow \frac{S}{p}, \quad V = \pi(U),$$

m l'idéal maximal de $S_{(p)}$

et $t \in S_1 \setminus p$. On a alors des isomorphismes gradués de degré 0

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} N(k)_{(p)} \rightarrow U^{-1} N \quad (1)$$

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{N(k)_{(p)}}{m N(k)_{(p)}} \right) \rightarrow V^{-1} \left(\frac{N}{pN} \right) \quad (2)$$

$$V^{-1} \left(\frac{S}{p} \right) \rightarrow \left(\frac{S(p)}{m} [T] \right)_T \quad (3)$$

et un homomorphisme injectif

$$\left(\frac{S}{p} \right) \rightarrow V^{-1} \left(\frac{S}{p} \right). \quad (4)$$

PREUVE. Le premier isomorphisme est évident vu que

$$(U^{-1}N)_k = \left\{ \frac{n}{s} \mid \deg(n) = \deg(s) + k, n \in N, s \in N \text{ homogènes} \right\} \subseteq N$$

donc $(U^{-1}N)_k = N(k)_{(p)}$.

Pour le second, on remarque d'abord qu'on a un isomorphisme

$$((pN)(k))_{(p)} \rightarrow m(N(k))_{(p)}. \quad (5)$$

En effet, l'inclusion $pN \rightarrow N$ donne lieu aux inclusions $(pN)(k) \rightarrow N(k)$,

$(pN)(k)_p \rightarrow N(k)_p$, $(pN)(k)_{(p)} \rightarrow N(k)_{(p)}$. Or tout élément de $(pN)(k)_{(p)}$ est somme d'éléments du type pn/s où $p \in p$ et p, n, s sont homogènes. Alors

$$\frac{pn}{s} = \left(\frac{p}{t \deg(p)} \right) \left(\frac{nt \deg(p)}{s} \right) \in m(N(k))_{(p)}$$

et réciproquement tout élément de $m(N(k))_{(p)}$ est image d'un élément de $(pN)(k)_{(p)}$.

Ensuite, prenant la suite exacte

$$0 \rightarrow pN \rightarrow N \rightarrow \frac{N}{pN} \rightarrow 0,$$

on trouve les suites exactes

$$0 \rightarrow (pN)(k) \rightarrow N(k) \rightarrow \left(\frac{N}{pN} \right)(k) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow (pN)(k)_{(p)} \rightarrow N(k)_{(p)} \rightarrow \left(\left(\frac{N}{pN} \right)(k) \right)_{(p)} \rightarrow 0$$

mais comme $((pN)(k))_{(p)} \simeq m(N(k))_{(p)}$, on a

$$\left(\frac{N}{pN} \right)(k)_{(p)} \simeq \frac{N(k)_{(p)}}{mN(k)_{(p)}}.$$

De plus, les S -modules pN et $\frac{N}{pN}$ sont de type fini car N est noethérien. On peut donc leur appliquer (1) et on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (pN)(k)(p) & \longrightarrow & U^{-1}(pN) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} N(k)(p) & \longrightarrow & U^{-1}N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \frac{N(k)(p)}{mN(k)(p)} & \longrightarrow & U^{-1}\left(\frac{N}{pN}\right)
 \end{array}$$

mais l'isomorphisme du bas est aussi un $U^{-1} \frac{S}{p}$ -isomorphisme et comme les anneaux $U^{-1}\left(\frac{S}{p}\right)$, $V^{-1}\left(\frac{S}{p}\right)$ sont isomorphes ([AC12], II §2, no 5, prop. 11), on a enfin

$$\begin{aligned}
 U^{-1}\left(\frac{N}{pN}\right) &= U^{-1}S \otimes_S \left(\frac{N}{pN}\right) = U^{-1}S \otimes_S \left(\frac{S}{p}\right) \otimes_S N = U^{-1}\left(\frac{S}{p}\right) \otimes_S N \\
 &= V^{-1}\left(\frac{S}{p}\right) \otimes_S N = V^{-1}\left(\frac{S}{p}\right) \otimes_{\frac{S}{p}} \left(\frac{S}{p}\right) \otimes_S N = V^{-1}\left(\frac{S}{p}\right) \otimes_{\frac{S}{p}} \left(\frac{N}{pN}\right) = V^{-1}\left(\frac{N}{pN}\right).
 \end{aligned}$$

Pour démontrer l'isomorphisme (3), considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & V^{-1}S' & \\
 \nearrow & \downarrow \psi & \\
 S' & & \\
 \searrow \mu & & \\
 & (S'_{(p)})^{[T]}_T &
 \end{array}
 \quad \left(\text{où } S' = \frac{S}{p} \right)$$

où, pour $x \in S'_T$, $\mu(x) = \frac{(x/t^T)T^T}{1}$; si $x \in V$, alors $\mu(x)$ est inversible et son inverse est $\frac{(t^T/x)}{T^T}$. De plus, μ est gradué de degré 0. Il existe donc un et un seul homomorphisme gradué de degré 0, ψ , rendant commutatif le diagramme ci-dessus ([AC12], II §2, no 9, prop. 22). Cet homomorphisme est bijectif: surjectif car tout élément homogène de $(S'_{(p)})^{[T]}_T$ s'écrit sous la forme

$$\frac{(s/g)T^k}{T^{\ell}} = \psi\left(\frac{st^k}{gt^{\ell}}\right)$$

et injectif car suivant qu'un élément homogène $\frac{s}{g}$ de $V^{-1}S'$ soit de degré k positif ou négatif, son image sera $\frac{(s/gt^k)T^k}{1}$ ou $\frac{(st^{-k}/g)}{T^{-k}}$; si cette image est zéro, on aura dans le cas $k \geq 0$ une puissance ℓ de T telle que $(s/gt^k)T^k T^\ell = 0$ dans $S'_{(p)}[T]$, d'où $s/gt^k = 0$ dans $S'_{(p)}$ d'où l'existence d'un $u \notin p$ tel que $us = 0$, donc $s/g = 0$; le cas $k < 0$ se traite de façon semblable. Pour prouver (3), il ne reste plus qu'à se servir de (5) pour conclure que $S'_{(p)} = \left(\frac{S}{p}\right)_{(p)} = \frac{S_{(p)}}{m}$.

Finalement, pour montrer que $\frac{S}{p} \rightarrow V^{-1}\left(\frac{S}{p}\right)$ est injectif, prenons $\overline{s}/\overline{\ell} = 0$: il existe alors $x \in V$ tel que $xs = 0$, c'est-à-dire il existe $x \in U$ tel que $xs \in p$, mais $x \notin p$ donc $s \in p$ donc $\overline{s} = 0$.

Le lemme qui suit permet de faire jouer à $\left(\frac{S_{(p)}}{m}[T]\right)_T$ le rôle du corps des fractions de A/p dans la preuve de la caractérisation homologique de la profondeur donnée dans ([AK]).

3.10. LEMME. Tout $\left(\frac{S_{(p)}}{m}[T]\right)_T$ -module gradué de type fini est libre. (Rappelons que m est l'idéal maximal de $S_{(p)}$.)

PREUVE. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ un système minimal de générateurs homogènes de E . S'il ne forme pas une famille libre, il existe alors des éléments homogènes $P_1, \dots, P_r$ de $\left(\frac{S_{(p)}}{m}[T]\right)_T$ tels que, l'un d'eux, disons P_1 , soit non nul et $\sum_{1 \leq i \leq r} P_i e_i = 0$. Il existe alors un $\alpha \in \frac{S_{(p)}}{m}$ tel que ou bien

$$P_1 = \frac{\alpha T^k}{1} \text{ et alors } \frac{\alpha T^k}{1} e_1 = - \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq 1}} P_i e_i$$

d'où

$$e = \frac{-\alpha^{-1}}{T^k} \cdot \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq 1}} P_i e_i,$$

ou bien

$$P_1 = \frac{\alpha}{T^k} \text{ et alors } \frac{\alpha}{T^k} e_1 = - \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq 1}} P_i e_i$$

d'où

$$e_i = -\alpha^{-1} T^k \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq i}} p_i e_i \right),$$

dans un cas comme dans l'autre on contredit la minimalité de $(e_1, \dots, e_r)$.

3.11. PROPOSITION. Si $S_1 \setminus p = \phi$ et si $p \in \text{Supp}(\tilde{N})$ où $\tilde{N}$ est le $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}$ -module associé à N et $k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un homomorphisme gradué non nul de degré supérieur à k : $\phi : N \rightarrow \frac{S}{p}$.

PREUVE. Puisque $V^{-1}(\frac{N}{pN})$ est un $V^{-1}(\frac{S}{p})$ -module et que

$$V^{-1}(\frac{S}{p}) \simeq \left(-\frac{S(p)}{m} [T] \right)_T$$

(en vertu du Lemme 3.9), $V^{-1}(\frac{N}{pN})$ est un $V^{-1}(\frac{S}{p})$ -module libre (Lemme 3.10). De plus, comme

$$V^{-1}(\frac{N}{pN}) \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \frac{N(k)(p)}{mN(k)(p)} \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{N}(k)_p}{m\tilde{N}(k)_p}$$

(par le Lemme 3.9) et $N(k)(p)$ est un $S(p)$ -module de type fini (Lemme 3.8) et $S(p)$ est noethérien (vu que S l'est par 3.8 appliqué aux sous-modules de S qui sont de type fini), on peut appliquer le lemme de Nakayama, d'où, de $\tilde{N}(k)_p = 0$ (car $\text{Supp}(\tilde{N}) = \text{Supp}(\tilde{N}(k))$, Lemme 3.5), on conclut que $\tilde{N}(k)_p = m\tilde{N}(k)_p$. Donc aucune composante homogène de $V^{-1}(\frac{N}{pN})$ n'est nulle, à fortiori $V^{-1}(\frac{N}{pN}) \neq 0$.

On peut alors, à partir d'une base de $V^{-1}(\frac{N}{pN})$ formée d'éléments homogènes (une telle base existe comme le montre la preuve du Lemme 3.10), définir un $V^{-1}(\frac{S}{p})$ -homomorphisme gradué non nul de degré 0

$$\phi_1 : V^{-1}(\frac{N}{pN}) \rightarrow V^{-1}(\frac{S}{p}).$$

Soit $(y_1, \dots, y_r)$ un système de générateurs du $\frac{S}{p}$ -module $\frac{N}{pN}$ et soit $(y_i/\ell) = \frac{s_i}{h_i}$ et $h = (\prod_{1 \leq i \leq r} h_i) f^{-1}$ (où $f \in S_1 \setminus p$, $\bar{f} \in \frac{S}{p}$, $\ell \geq k$). Alors le $\frac{S}{p}$ -homomorphisme composé

$$\phi_2 : N \rightarrow \frac{N}{pN} \rightarrow V^{-1}\left(\frac{N}{pN}\right) \xrightarrow{h\phi_1} V^{-1}\left(\frac{S}{p}\right)$$

est gradué de degré supérieur à ℓ et non nul car $h \neq 0$ et $\frac{S}{p}$ est intègre.

De plus, ϕ_2 a pour image un sous-ensemble de l'image de $\frac{S}{p} \rightarrow V^{-1}\left(\frac{S}{p}\right)$, est injectif (Lemme 3.9) et on peut donc définir

$$\phi : N \rightarrow \frac{S}{p}$$

à l'aide de ϕ_2 . ϕ est gradué de degré $\deg(h) \geq k$.

3.11.1. COROLLAIRE. Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe un entier $\ell \geq k$ tel que, pour tout $i \geq \ell$, $\text{Hom}(N, \frac{S}{p})_i = 0$.

PREUVE. Il suffit de remplacer le ℓ de la preuve de la proposition précédente (dans la définition de h) par $i \geq \ell$.

3.12. PROPOSITION. Supposons S engendrée sur S_0 par S_ℓ , $k \in \mathbb{N}^*$, $V_+(J) = \text{Supp}(\tilde{N})$. Si $\text{Hom}_S(N, M)_{\geq k} = 0$, alors $\text{Ass}(M_{\geq k}) \cap V_+(J) = \emptyset$.

PREUVE. Soit $p \in V_+(J) \cap \text{Ass}(M_{\geq k})$. Le fait que $p \in \text{Ass}(M_{\geq k})$ implique que p est l'annulateur d'un élément homogène de $M_{\geq k}$ ([AC12], II §3, no 1, cor. de la prop. 1). Comme $(M_{\geq k})_n = 0$ pour $n < k$, cet élément homogène est de degré supérieur à k et il existe donc un homomorphisme gradué de degré supérieur à $k : \frac{S}{p} \rightarrow M_{\geq k}$ et non nul.

Le fait que $p \in V_+(J) = \text{Supp}(\tilde{N})$ implique que l'hypothèse de la Proposition 3.11 est satisfaite ($(S_1 \setminus p) = \emptyset$ car S est engendré sur S_0 par S_1) et il existe donc un homomorphisme gradué de degré supérieur à $k : N \rightarrow \frac{S}{p}$ (non nul); donc l'homomorphisme composé

$$N \rightarrow \frac{S}{p} \rightarrow M_{\geq k} \rightarrow M$$

qui est gradué de degré supérieur à k (même à $2k$) contredit l'hypothèse.

3.12.1. COROLLAIRE. Sous les hypothèses de la Proposition 3.12, si

$V_+(J) \cap \text{Ass}(M_{\geq k}) \neq \emptyset$, alors pour tout $\ell \geq k$, $\text{Hom}_S(N, M)_{\geq k} \neq 0$.

3.13. THÉOREME. Sous les hypothèses de cette section et supposant S engendré sur S_0 par S_ℓ , les assertions suivantes sont équivalentes.

- 1) $\text{Ext}_S^q(N, M)_{\geq k} = 0$ pour $q < r$ et tout S -module de type fini N tel que $\text{Supp}(\tilde{N}) \subset V_+(J)$;
- 2) $\text{Ext}_S^q(N, M)_{\geq k} = 0$ pour $q < r$ et un S -module de type fini N tel que $\text{Supp}(\tilde{N}) \subset V_+(J)$;
- 3) Etant donnée une suite $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments homogènes de J M -régulière relativement à $M_{\geq k}$, il existe une suite $(f_i)_{n+1 \leq i \leq r}$ d'éléments homogènes de J telle que la suite prolongée $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit M -régulière relativement à $M_{\geq k}$.
- 4) Il existe une suite $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'éléments homogènes de J M -régulière relativement à $M_{\geq k}$.

PREUVE. 1) $\implies$ 2) : Il est aisé de voir que $\frac{S}{J}$ est un S -module de type fini tel que $\text{Supp}(\frac{S}{J}) = V_+(J)$. 2) est alors conséquence de 1) avec $N = \frac{S}{J}$.

2) $\implies$ 3) : Procédons par récurrence sur r . Si $r = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $r \geq 1$. Si $n = 0$, comme $\text{Hom}_S(N, M)_{\geq k} = 0$, il résulte de la proposition 3.12 que $\text{Ass}(M_{\geq k}) \cap V_+(J) = \emptyset$; donc pour tout $p \in \text{Ass}(M_{\geq k})$, $J \not\subset p$. Mais $M_{\geq k}$ est noethérien, donc $\text{Ass}(M_{\geq k})$ est fini, d'où

$$J \not\subset \bigcup_{p \in \text{Ass}(M_{\geq k})} p.$$

Il existe donc $f_1 \in J$, homogène, tel que

$$f_1 \not\in \bigcup_{p \in \text{Ass}(M_{\geq k})} p.$$

Mais alors f_1 est $M_{\geq k}$ -régulier, ce qui revient à dire M -régulier relativement à $M_{\geq k}$. Le reste de la preuve pour $n = 0$ revient donc à la preuve pour $n \geq 1$ que voici.

Prenant la suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \xrightarrow{\cdot f_1} M \rightarrow \frac{M}{f_1 M} \rightarrow 0$$

on en déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{M}{K} \xrightarrow{\cdot f_1} M \rightarrow \frac{M}{f_1 M} \rightarrow 0$$

d'où la suite exacte

$$\text{Ext}_S^q(N, M)_i \rightarrow \text{Ext}_S^q(N, \frac{M}{f_1 M})_i \rightarrow \text{Ext}_S^{q+1}(N, \frac{M}{K})_i \quad i \geq 0 .$$

Du Lemme 3.3, il résulte que

$$\text{Ext}_S^{q+1}(N, \frac{M}{K})_i \simeq \text{Ext}_S^{q+1}(N, M)_i \quad i > 0 ,$$

d'où, par l'hypothèse de 2), il résulte que $\text{Ext}_S^{q+1}(N, \frac{M}{K})_{\geq k} = 0$ pour $q < r-1$;

pour de tels q on a aussi $\text{Ext}_S^q(N, M)_{\geq k} = 0$ d'où $\text{Ext}(N, \frac{M}{f_1 M})_{\geq k} = 0$ pour

$q < r-1$. Posant $\overline{f_i} = f_i + f_1 M$, il résulte du Lemme 3.7 que $(\overline{f_i})_{2 \leq i \leq n}$ est une suite $\frac{M}{f_1 M}$ -régulière relativement à $(\frac{M}{f_1 M})_{\geq k}$ et on est donc en mesure d'appliquer l'hypothèse de récurrence: on trouve ainsi une suite $\frac{M}{f_1 M}$ -régulière relativement à $(\frac{M}{f_1 M})_{\geq k}$; appliquant le Lemme 3.7 à nouveau on a la suite $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ cherchée.

3) ==> 4) : C'est le cas $n = 0$ de 3) qui nous donne 4) .

4) ==> 1) : Procédons par récurrence sur r , le cas $r = 0$ étant trivial. Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ une suite M -régulière relativement à $M_{\geq k}$ formée d'éléments homogènes de J . Comme f_1 est M -régulier relativement à $M_{\geq k}$, on a les suites exactes

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \xrightarrow{\cdot f_1} M \rightarrow \frac{M}{f_1 M} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \frac{M}{K} \xrightarrow{\cdot f_1} \frac{M}{f_1 M} \rightarrow 0$$

qui donnent lieu aux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 0 \rightarrow \text{Hom}_S(N, \frac{M}{K})_{\geq k} & \xrightarrow{\cdot f_1} & \text{Hom}_S(N, M)_{\geq k} \\
 \downarrow & \nearrow \cdot f_1 & \\
 \text{Hom}_S(N, M)_{\geq k} & &
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}(N, \frac{M}{f_1 M})_{\geq k} \rightarrow \text{Ext}_S^{q+1}(N, \frac{M}{K})_{\geq k} & \xrightarrow{\cdot f_1} & \text{Ext}_S^{q+1}(N, M)_{\geq k} \\
 \downarrow & \nearrow \cdot f_1 & \\
 \text{Ext}_S^{q+1}(N, M)_{\geq k} & &
 \end{array} \quad q \in \mathbb{N}$$

compte tenu des Lemmes 3.3 et 3.1. Mais dans $\frac{M}{f_1 M}$, la suite $(f_i)_{2 \leq i \leq r}$ est $\frac{M}{f_1 M}$ -régulière relativement à $(\frac{M}{f_1 M})_{\geq k}$ (Lemme 3.7) d'où, par l'hypothèse de récurrence, $\text{Ext}_S^q(N, \frac{M}{f_1 M})_{\geq k} = 0$ pour $q < r-1$; l'application

$$\text{Ext}_S^q(N, M)_{\geq k} \xrightarrow{\cdot f_1} \text{Ext}_S^q(N, M)_{\geq k} \quad (1)$$

est donc injective pour $q < r$. D'autre part, $\text{Supp}(\tilde{N}) \subseteq V_+(J) \subseteq V_+(f_1)$ car $f_1 \in J$ d'où par le Lemme 3.6, $\cdot f_1 : N \rightarrow N$ est nilpotente et par suite (Lemme 3.1) l'homothétie (1) est nilpotente; comme elle est déjà injective, on voit qu'elle est nulle d'où $\text{Ext}_S^q(N, M)_{\geq k} = 0$ pour $q < r$.

3.13.1. REMARQUE. Dans 4) $\implies$ 1), l'hypothèse $\text{Supp}(\tilde{N}) \subseteq V_+(J)$ peut être remplacée par $\text{Supp}(\tilde{M}) \subseteq V_+(J)$ car on arrive alors aussi à la nilpotence de (1), seul endroit où cette hypothèse nous a servi.

3.13.2. COROLLAIRE. Sous les hypothèses du Théorème 3.13, deux suites M -régulières relativement à $M_{\geq k}$ qui sont maximales et formées d'éléments de J ont le même nombre $p(k)$ d'éléments.

PREUVE. $p(k) = \inf\{q \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_S^q(\frac{S}{J}, M)_{\geq k} \neq 0\}$.

3.13.3. COROLLAIRE. Deux suites M -régulières-homogènes d'éléments de J qui sont maximales ont le même nombre p d'éléments.

PREUVE. $p = \sup\{p(k) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir la profondeur graduée.

3.14. DÉFINITION. Sous les hypothèses du Théorème 3.13, pour $k \in \mathbb{N}$, nous appelons *k-profondeur graduée de M par rapport à J*, notée $k\text{-profgrad}_J(M)$, le nombre $p(k)$ d'éléments d'une suite M-régulière relativement à $M_{\geq k}$ d'éléments de J qui soit maximale.

3.15. DÉFINITION. La *profondeur graduée de M par rapport à J*, notée $\text{profgrad}_J(M)$, est le nombre d'éléments d'une suite M-régulière-homogène d'éléments de J qui soit maximale.

4. Références

- [AC12] BOURBAKI, N., *Algèbre commutative*, Ch. I, II, Hermann, Paris, 1961.
- [AK] ALTMAN, A. et KLEIMAN, S., *Introduction to Grothendieck Duality Theory*, Springer-Verlag Lecture Notes, no. 146, Berlin, 1970.
- [BA] BOURBAKI, N., *Algèbre*, Ch. I, II, III, Hermann, Paris, 1970.
- [CAR] CARUTH, A., *On powers of ideals generated by R-sequences*, Proc. Camb. Phil. Soc. 74 (1973), 441-444.
- [EGA2] GROTHENDIECK, A., *Eléments de géométrie algébrique II*, Publications Math. de l'I.H.E.S., no 8, Paris, 1961.
- [FAC] SERRE, J.-P., *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. 61 (1955), 197-278.
- [FIO] FIORENTINI, M., *On relative regular sequences*, J. of Algebra 18 (1971), 384-389.
- [MOR] MOORE, D.J., *Some remarks of R-sequences and R-cosequences*, J. London Math. Soc. (2) 5 (1972), 638-644.

Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3C 3P8

Manuscrit reçu le 5 septembre 1981.