

LES FONCTIONS ADDITIVES EN ANALYSE HARMONIQUE

Jean-Marc Belley¹

1. Introduction

Dans le problème des moments on cherche une fonction $\mu(x)$, à variation bornée dans (a,b) , dont certains "moments"

$$\hat{\mu}(n) = \int_a^b \pi_n(x) d\mu(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

sont donnés; les $\pi_n(x)$ étant des fonctions continues données. Lorsque, en particulier, $\pi_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$), il s'agit des moments d'une distribution de masses ou de charges électriques, comme on les définit en physique. Encore, si $\pi_n(x) = e^{inx}$ ($n \in \mathbb{Z}$), il s'agit du problème des moments trigonométriques

$$\hat{\mu}(n) = \int_0^{2\pi} \pi_n(x) d\mu(x) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

qui admet une solution si et seulement si la suite $(\hat{\mu}(n))$ est de type positif dans le sens que

$$\sum_{m,n} \hat{\mu}(n-m) c_n \overline{c_m} \geq 0$$

quelle que soit la suite finie de nombres complexes c_n . Bochner a résolu le problème des transformées de Fourier analogue au problème des moments trigonométriques. Ce résultat s'énonce de la façon suivante:

¹ Texte de la conférence prononcée au XVI^e Colloque des mathématiciens du Québec, à Sherbrooke, le 17 octobre 1981.

THÉORÈME (Bochner). Pour que la fonction $p(t)$ ($-\infty < t < \infty$) admette la représentation

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\mu(s)$$

avec une fonction (unique) $\mu(t)$ réelle, non décroissante et bornée, il faut et il suffit que $p(t)$ soit continue et de type positif au sens classique.

REMARQUE. Une fonction $p(t)$ ($-\infty < t < \infty$) est dite de *type positif au sens classique* si

$$\sum_{m,n} p(t_n - t_m) c_n \overline{c_m} \geq 0$$

pour toutes suites finies (t_n) et (c_n) de nombres réels et complexes, respectivement.

Il y a cependant des fonctions de type positif au sens classique qui sont discontinues et pour lesquelles la représentation de Bochner n'est pas valide. Par exemple,

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < t < 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < t < \infty \end{cases}$$

est une telle fonction. Pour ces fonctions, E. Hewitt a proposé, en 1953, l'existence d'une algèbre M d'ensembles boréliens dans $\mathbb{R}$, telle qu'une fonction $p(t)$ ($-\infty < t < \infty$) admette la représentation

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\mu(s)$$

au moyen d'une fonction additive $\mu : M \rightarrow [0, \infty)$, si et seulement si $p(t)$ est de type positif au sens classique (voir [14]). Même si cette conjecture est fautive (voir [11, au bas de la page 379]), il existe une version corrigée, démontrée en 1980 (voir [7, p. 274]), où l'algèbre M est choisie en fonction de $p(t)$. Mais pour obtenir ce résultat et sa généralisation, il nous faut un théorème de représentation.

2. Un théorème de représentation

Soit X un espace compact séparé et soit $\mathcal{B}(X)$ la famille des boréliens de X . Etant donné une algèbre A de sous-ensembles d'un ensemble S dense dans X , nous écrivons $C(S,A)$ pour la classe des fonctions à valeurs complexes définies sur S qui sont limite uniforme de fonctions simples A -mesurables, et nous écrivons I_E pour la fonction caractéristique de $E \subset X$. L'importance de la classe $C(S,A)$ réside dans le fait que pour qu'une fonction f y appartienne, il est nécessaire que l'intégrale $\int f d\mu$ existe pour toute fonction additive bornée $\mu : A \rightarrow \mathbb{C}$ (voir [10, p. 293]); où l'intégrale est définie au sens de la convergence Moore-Smith (voir [20, pp. 410-404] et [18, pp. 183-191]). Nous allons désigner la classe des fonctions continues sur X par $C(X)$. Une fonction additive $\mu : A \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *régulière* dans A si, pour $\varepsilon > 0$ et $E \in A$ quelconque, il existe $a, b > 0$ et $f, g \in C(X)$ à valeurs réelles, tels que les ensembles $K = \{x \in S : f(x) \leq a\}$ et $V = \{x \in S : g(x) < b\}$ ont les propriétés:

- i) $K, V \in A$,
- ii) $K \subset E \subset V$, et
- iii) $|\mu|(V \setminus K) < \varepsilon$ où $|\mu|$ est la variation totale de μ .

Une fonctionnelle linéaire L définie sur $C(X)$ est dite *non négative* si $L(f) \geq 0$ pour toute fonction continue $f : X \rightarrow [0, \infty)$. Pour une telle fonctionnelle, on a obtenu dans [7, p. 270] ce théorème de représentation, analogue à celui de Riesz, pour les fonctions additives.

THÉORÈME 2.1. Soient S dense dans un compact séparé X et L une fonctionnelle linéaire non négative bornée définie sur l'espace $C(X)$ avec norme supremum usuelle. La classe A des ensembles $E \cap S$ tels que $E \in \mathcal{B}(X)$ et

$$\inf_{f_1, f_2} \{L(f_2 - f_1) : f_1 \leq I_E \leq f_2 ; f_1, f_2 \in C(X)\} = 0$$

est une algèbre d'ensembles pour laquelle $f|_S \in C(S,A)$ pour tout $f \in C(X)$, et il existe une seule et unique fonction additive $\lambda : A \rightarrow [0, \infty)$, bornée et régulière, telle que $\int_S f|_S d\lambda$ existe au sens de la convergence Moore-Smith, et est égale à $L(f)$ pour tout $f \in C(X)$.

C'est ce théorème qui nous a permis, dans [7], de démontrer notre version corrigée de la conjecture de Hewitt sur le "problème des moments" généralisé au cas des fonctions additives.

3. Le problème des moments

Soit G un semi-groupe commutatif avec opération additive $+$, et soit $\pi = \{\pi_z : z \in G\}$ une famille de fonctions dans $C(X)$ telle que $\pi_{u+v}(x) = \pi_u(x)\pi_v(x)$ ($x \in X ; u, v \in G$). Ecrivons $F_\pi(X)$ pour l'espace, avec norme supremum, des combinaisons linéaires d'éléments de π , et soit $\overline{F_\pi(X)}$ la fermeture dans $C(X)$ de $F_\pi(X)$. Si f est un élément de $F_\pi(X)$, écrivons $\sum_{z \in G} \hat{f}(z)\pi_z(x)$ pour $f(x)$, où $\hat{f}(z) = 0$ sauf pour au plus un nombre fini de z . On dit qu'une fonction $p : G \rightarrow \mathbb{C}$ est de *type positif par rapport à π* lorsque $\sum_{z \in G} \hat{f}(z)p(z) \geq 0$ pour tout $f \in F_\pi(X)$ avec $f \geq 0$. Soit $M(S)$ l'ensemble des couples (λ, A) où l'algèbre A (dans les boréliens de S) est telle que $f|_S \in C(S, A)$ pour tout $f \in C(X)$, et $\lambda : A \rightarrow \mathbb{C}$ est additive, bornée et régulière.

Nous avons le résultat suivant pour les fonctions de type positif par rapport à π (voir [8, p. 107]) qui généralise la version corrigée que l'on retrouve dans [7, p. 274], de la conjecture de Hewitt pour les fonctions de type positif au sens classique.

THÉORÈME 3.1. Soit π linéairement indépendant dans $C(X)$. Pour qu'une fonction $p : G \rightarrow \mathbb{C}$ soit de type positif par rapport à π , il est nécessaire et suffisant qu'il existe un couple $(\lambda, A) \in M(S)$ tel que λ est à valeurs non négatives et

$$p(z) = \int_S \pi_z(s) d\lambda(s) \quad (z \in G)$$

où l'intégrale existe au sens de la convergence Moore-Smith. Lorsque

$\overline{F_\pi(X)} = C(X)$, on peut prendre pour A la classe des ensembles $E \cap S$ avec $E \in \mathcal{B}(X)$ et

$$\inf\left\{\left|\sum_{z \in G} (\hat{h}(z) - \hat{g}(z))p(z)\right| : g \leq I_E \leq h ; g, h \in F_\pi(X)\right\} = 0 ;$$

et dans ce cas on est assuré de l'unicité de λ .

EXEMPLE 3.2. Soient

- i) G un groupe commutatif localement compact avec identité e ,
- ii) S le groupe dual à G ,
- iii) X le compactifié de Bohr pour S et
- iv) π la famille des caractères $x \rightarrow \pi_z(x)$ définis sur X ($z \in G$).

On peut montrer qu'une fonction de type positif au sens classique est nécessairement de type positif par rapport à π . Puisque par le théorème de Stone-Weierstrass, $\overline{F_\pi(X)} = C(X)$, on déduit du Théorème 3.1 l'existence d'un couple $(\lambda, A) \in M(S)$ tel que λ et A sont invariants par rapport aux translations (c'est-à-dire, $E + s \in A$ et $\lambda(E + s) = \lambda(E)$ pour tout $E \in A$ et tout $s \in S$) et

$$\int_S \pi_z d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq e \\ 1 & \text{si } z = e. \end{cases}$$

EXEMPLE 3.3. L'ensemble $S = \mathbb{N}$ (ou $[0, \infty)$) est dense dans le compactifié de Bohr X pour le groupe topologique $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{R}$). Par le Théorème 3.1, on peut montrer l'existence d'un couple $(\lambda, A) \in M(S)$ tel que λ et A sont invariants par rapport aux translations, $f|_S \in C(S, A)$ pour tout $f \in C(X)$, et

$$\int_S z^s d\lambda(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 1, 0 \leq |z| \leq 1 \\ 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

où l'intégrale existe au sens de la convergence Moore-Smith.

EXEMPLE 3.4. Soit S dense dans $[0, 1]$ et $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} c_i \overline{c_j} p(k) \right) \geq 0$$

pour toute suite finie $(c_i) \subset \mathbb{C}$. Par le Théorème 3.1, on peut montrer l'existence d'un couple $(\lambda, A) \in M(S)$ tel que

$$p(k) = \int_S x^k d\lambda(x)$$

où l'intégrale existe au sens de la convergence Moore-Smith. Lorsque S est dénombrable, on peut facilement montrer que λ n'est pas σ -additive.

Le Théorème 3.1 sert aussi à caractériser $M(S)$.

4. Une caractérisation de $M(S)$

La transformée $\hat{\lambda} : G \rightarrow \mathbb{C}$ par rapport à π du couple $(\lambda, A) \in M(S)$ se définit par

$$\hat{\lambda}(z) = \int_S \pi_z d\lambda \quad (z \in G).$$

Nous écrivons $B_\pi(G)$ pour l'espace des combinaisons linéaires de fonctions de type positif par rapport à π . Pour cette classe de fonctions, nous avons le résultat suivant (voir [7, p. 275]).

THÉOREME 4.1. Pour que p soit élément de $B_\pi(G)$, il est nécessaire et suffisant que p soit la transformée par rapport à π d'un couple dans $M(S)$.

Ce résultat nous donne la caractérisation suivante de $B_\pi(G)$, qui généralise celle d'Eberlein pour les fonctions *continues* de type positif au sens classique définies sur un groupe commutatif localement compact (voir [19, pp. 32-34] et [7, p. 275]).

THÉOREME 4.2. Pour que p soit élément de $B_\pi(G)$, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une constante $K > 0$ pour laquelle

$$\left| \sum_{z \in G} \hat{f}(z) p(z) \right| \leq K \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

pour tout $f \in F_\pi(X)$.

Soit $\{a_{kn} : k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset \mathbb{C}$ tel que $\sum_n |a_{kn}| < \infty$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) et soit $(\mu, A) \in M(T)$, où $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est le groupe des caractères pour $\mathbb{Z}$. Si l'on pose $\hat{\mu}$ pour la transformée de Fourier-Stieltjes

$$\hat{\mu}(n) = \int_T z^n d\mu(z) ,$$

alors la somme

$$\sum_n a_{kn} \hat{\mu}(n)$$

existe pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La question à laquelle on veut répondre maintenant consiste à savoir quand, pour $(\mu, A) \in M(T)$ quelconque, il existe $(\nu, E) \in M(T)$ tel que

$$\hat{\nu}(k) = \sum_n a_{kn} \hat{\mu}(n) \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

Le résultat suivant démontré dans [7, pp. 277-278] à partir du Théorème 2.1 nous permet de dire qu'il existe un tel couple $(\nu, E) \in M(T)$ lorsque la fonction $k \rightarrow \sum_n a_{kn} e^{int}$ est dans $B_T(\mathbb{Z})$ pour tout $t \in [0, 2\pi)$.

THÉOREME 4.3. Soit G un groupe commutatif localement compact avec groupe dual S et soit $\{L_z : z \in G\}$ une famille de fonctionnelles bornées sur $B_S(G)$ par rapport à la norme supremum. Pour que la fonction $z \rightarrow L_z(\hat{\mu})$ soit dans $B_S(G)$ pour tout $(\mu, A) \in M(S)$, il est nécessaire et suffisant que la fonction $z \rightarrow L_z(s)$ soit dans $B_S(G)$ pour tout caractère $s \in S$ défini sur G .

Un résultat semblable pour le cas (plus difficile) où $B_S(G)$ est remplacé par le sous-espace des fonctions continues dans $B_S(G)$, se trouve dans [3, p. 329]. Là aussi la démonstration repose sur le Théorème 2.1.

EXEMPLE 4.4. Soit $\{(\nu_z, A_z) : z \in G\}$ dans $M(S)$ où G est un groupe commutatif localement compact avec groupe dual S . Pour que la fonction

$$z \rightarrow \int_G \hat{\mu}(w) d\nu_z(w)$$

soit dans $B_S(G)$ pour tout $(\mu, A) \in M(S)$, il est nécessaire et suffisant que les fonctions

$$z \rightarrow \hat{\nu}_z(s) \quad (s \in S)$$

soient dans $B_S(G)$.

EXEMPLE 4.5. Soit (ν, E) dans $M(G)$ où G est un groupe commutatif localement compact avec groupe dual S . Pour tout $(\mu, A) \in M(S)$, la fonction

$$z \rightarrow \int_G \hat{\mu}(z - w) d\nu(w)$$

est un élément de $B_S(G)$.

5. Un résultat ergodique

Soit S un groupe commutatif localement compact avec groupe dual G et compactifié de Bohr X . Si l'on prend pour π la famille G des caractères définis sur S , on peut montrer que $B_G(S) \subset C(S, A)$ (voir [6]). Pour le couple (λ, A) de l'Exemple 3.2, nous avons démontré dans [5] le résultat ergodique suivant.

THÉOREME 5.1. Soit (L_δ) une suite généralisée uniformément bornée de transformations non négatives définies sur l'espace $C(S, A)$ avec norme supremum, telle que, pour tout $s \in S$,

$$\lim_{\delta} L_{\delta}(\hat{s})(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{s} = \text{l'identité} \\ 0 & \text{si } \hat{s} \in G, \hat{s} \neq \text{l'identité.} \end{cases}$$

Alors, pour toute fonction $f \in C(S, A)$,

$$\lim_{\delta} L_{\delta}(f)(s) = \int_S f d\lambda \quad (s \in S)$$

où l'intégrale à droite existe au sens de la convergence Moore-Smith.

Soit $\{U_s : s \in S\}$ une représentation unitaire de S définie sur un espace de Hilbert H avec produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. Pour $x \in H$, la fonction $s \rightarrow (U_s x, x)$ définie sur S est de type positif au sens classique. Alors, par polarisation (voir [13, pp. 12-13]) la fonction $s \rightarrow (U_s x, y)$ est élément de $B_G(S)$ pour tous $x, y \in H$. Soit P la projection orthogonale de H sur $\{x \in H : U_s x = x \text{ pour tout } s \in S\}$. Blum et al [9] ont considéré le problème consistant à savoir quand

i) $\int_X \overline{(U_s x, y)} \, dm(s) = (Px, y)$, où m est la mesure de Haar définie sur le compactifié de Bohr X pour S et $s \rightarrow \overline{(U_s x, y)}$ est un prolongement de la fonction $s \rightarrow (U_s x, y)$ de S à X , et

ii) la suite $\{n_k : k = 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{N}$ a la propriété

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (U^{n_k} x, y) = (Px, y)$$

pour tout opérateur unitaire U défini sur H et tous $x, y \in H$ (voir aussi [16]). En appliquant le Théorème 5.1, nous avons obtenu dans [6] des résultats qui généralisent ceux que l'on trouve dans [9], dans le sens que i) la représentation unitaire n'est pas supposée fortement continue avec spectre discret, et ii) pour obtenir (Px, y) sous forme intégrale, on n'a pas eu à "prolonger" la fonction $s \rightarrow (U_s x, y)$ de S à X . Ces deux résultats s'énoncent comme suit, où λ est la fonction additive introduite dans l'Exemple 3.2.

COROLLAIRE 5.2. Pour une représentation unitaire $\{U_s : s \in S\}$ quelconque de S définie sur un espace de Hilbert H , on a

$$\int_S (U_s x, y) \, d\lambda(s) = (Px, y) \quad (x, y \in H)$$

où l'intégrale existe au sens de la convergence Moore-Smith.

COROLLAIRE 5.3. Pour tout opérateur unitaire $U : H \rightarrow H$, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (U^{n_k} x, y) = (Px, y)$$

pour toute suite $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ telle que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z^{n_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| = 1, z \neq 1 \\ 1 & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

Le Théorème 5.1 nous permet aussi de généraliser un résultat de N. Wiener sur la continuité d'une mesure.

6. La continuité d'une fonction additive

Soit S un groupe commutatif localement compact avec groupe dual G . Représentons un caractère $\hat{s} \in G$ quelconque par la fonction $s \rightarrow \langle s, \hat{s} \rangle$. Si $(\mu, E) \in M(G)$ et $(\lambda, A) \in M(S)$ est le couple dans l'Exemple 3.2, alors les fonctions $\mathfrak{s} \rightarrow \hat{\lambda}(\mathfrak{s}) = \int_S \langle s, \mathfrak{s} \rangle d\lambda(s)$ et $s \rightarrow \hat{\mu}(s) = \int_G \langle s, \mathfrak{s} \rangle d\mu(\mathfrak{s})$ sont dans $C(G, E)$ et $C(S, A)$ respectivement (voir [7, pp. 276-277]). Soit $\hat{t} \in G$. La fonction $p_{\hat{t}} : G \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$p_{\hat{t}}(\mathfrak{s}) = \int_S \langle s, \mathfrak{s} - \hat{t} \rangle d\lambda(s)$$

est l'élément de $C(G, E)$ pour lequel

$$p_{\hat{t}}(\mathfrak{s}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathfrak{s} \neq \hat{t} \\ 1 & \text{si } \mathfrak{s} = \hat{t} \end{cases}.$$

Ainsi, on obtient que $\{\hat{t}\}$ est dans E . Dans [4, Théorème 4.1 et Corollaire 4.2] on a montré que

$$\mu(\{\mathfrak{s}\}) = \int_S \langle s, \mathfrak{s} \rangle \hat{\mu}(s) d\lambda(s) \quad (\mathfrak{s} \in G)$$

et que

$$\sum_{\mathfrak{s} \in G} |\mu(\{\mathfrak{s}\})|^2 = \int_S |\hat{\mu}|^2 d\lambda.$$

Ces résultats et le Théorème 5.1 ont pour conséquence évidente le théorème suivant, qui généralise ce qu'a fait W.F. Eberlein dans [12].

THÉORÈME 6.1. Soient $(\mu, E) \in M(G)$ et (L_δ) une suite généralisée uniformément bornée de transformations non négatives définies sur l'espace $C(S, A)$ avec norme supremum. Pour que

$$\mu(\{\mathfrak{s}\}) = \lim_{\delta} L_\delta(\mathfrak{s}\hat{\mu})(s) \quad (\mathfrak{s} \in G, s \in S)$$

et que

$$\sum_{\mathfrak{s} \in G} |\mu(\{\mathfrak{s}\})|^2 = \lim_{\delta} L_\delta(|\hat{\mu}|^2)(s) \quad (s \in S)$$

il suffit que

$$\lim_{\delta} L_{\delta}(\mathfrak{s})(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{s} \text{ est l'identité} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

pour tout $s \in S$.

On dit que le couple $(\mu, E) \in M(G)$ est *continu* si $\mu(\{\mathfrak{s}\}) = 0$ pour tout $\mathfrak{s} \in G$.

COROLLAIRE 6.2. Pour que $(\mu, E) \in M(G)$ soit continu, il est nécessaire que

$$\lim_{\delta} \int_S |\hat{\mu}(s - w)|^2 d\lambda_{\delta}(s) = 0$$

uniformément en $w \in G$ pour toute suite généralisée $((\lambda_{\delta}, A_{\delta})) \subset M(S)$ telle que la suite (λ_{δ}) est non négative et bornée (en variation totale), avec

$$\lim_{\delta} \int_G \langle s, \mathfrak{s} \rangle d\lambda_{\delta}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{s} \text{ est l'identité} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

et suffisant que

$$\lim_{\delta} \int_S |\hat{\mu}|^2 d\lambda_{\delta} = 0$$

pour une suite $((\lambda_{\delta}, A_{\delta})) \subset M(S)$ telle que la suite (λ_{δ}) est non négative et bornée (en variation totale) avec la propriété (6.2.1); les intégrales étant au sens de la convergence Moore-Smith.

EXEMPLE 6.3. Soit $(\mu, E) \in M(T)$ où T est le groupe $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Alors, par le Théorème 6.1,

$$\mu(\{z\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N z^{-j} \hat{\mu}(j)$$

pour tout $z \in T$ et

$$\sum_{z \in T} |\mu(\{z\})|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N |\hat{\mu}(j)|^2.$$

Ainsi, μ est continue si et seulement si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N |\hat{\mu}(j)|^2 = 0.$$

Ce résultat que l'on retrouve dans [4, Corollaire 4.3], est une généralisation d'un théorème de N. Wiener pour la continuité d'une mesure sur les boréliens de T (voir [21]).

7. Les points fixes en théorie ergodique

Soient $S = \mathbb{N}$ ou $[0, \infty)$, G le groupe dual à $S \cup (-S)$,
 $((\lambda_\delta, A_\delta)) \subset M(S)$ une suite généralisée telle que la suite (λ_δ) est non négative et bornée (en variation totale) et

$$\lim_{\delta} \lambda_\delta(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 0 \\ 0 & \text{si } s \in G \setminus \{0\} \end{cases}.$$

Soit x_0 élément d'un espace de Hilbert réel H avec produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et soit $\phi_\sigma : H \rightarrow H$ ($\sigma \in S$) des transformations (non nécessairement linéaires) telles que

i) pour tout $y \in H$, les fonctions $\sigma \rightarrow (\phi_\sigma x_0, y)$ sont continues et intégrables (au sens de la convergence Moore-Smith) par rapport aux couples $(\lambda_\delta, A_\delta)$, et

ii) $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (\phi_{\sigma+s} x_0, \phi_\sigma x_0)$ existe uniformément en $s \in S$.

Si (ν, A) est un couple quelconque dans $M(S)$, nous écrivons $\int_S \phi_\sigma x_0 \, d\nu(\sigma)$ pour l'élément x de H défini de façon unique par

$$(x, y) = \int_S (\phi_\sigma x_0, y) \, d\nu(\sigma)$$

lorsque l'intégrale existe au sens de la convergence Moore-Smith pour tout $y \in H$.

REMARQUE. Soit (λ, A) le couple dans l'Exemple 3.2. Soit $A_n = A$ ($n = 1, 2, \dots$) et

$$\lambda_n(\{k\}) = \begin{cases} 1/n & \text{si } k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{si } k = n, n+1, n+2, \dots \end{cases}$$

lorsque $S = \mathbb{N}$; et soit $A_T = A$ ($0 < T < \infty$) et

$$\lambda_T(Y) = \begin{cases} |Y|/T & \text{si } Y \subset [0, T] \\ 0 & \text{si } Y \subset (T, \infty) \end{cases}$$

lorsque $S = [0, \infty)$ ($|Y|$ étant la mesure de Lebesgue pour $Y \in A$) . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = \text{l'identité} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_T(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = \text{l'identité} \\ 0 & \text{autrement} . \end{cases}$$

Il a été démontré par J.-B. Baillon (voir [1] et [2]) et S. Reich (voir [17, p. 270]) que $\int_S \phi_k x_0 d\lambda_n(k)$ et $\int_S \phi_\sigma x_0 d\lambda_T(\sigma)$ convergent faiblement vers un point fixe pour $\{\phi_\sigma : \sigma \in S\}$ lorsque i) x_0 est un élément quelconque dans un sous-ensemble borné, fermé et convexe C de H , ii) $\phi_\sigma : C \rightarrow C$ et iii) les transformations ϕ_σ sont non expansives. Dans ce contexte, nous avons obtenu le théorème suivant (voir [5]) qui généralise le résultat de S. Reich dans [17, p. 269].

THÉORÈME 7.1. La suite généralisée $(\int_S \phi_\sigma x_0 d\lambda_\delta(\sigma))$ converge fortement vers $\int_S \phi_\sigma x_0 d\lambda(\sigma)$ et cette limite est un point fixe pour (ϕ_σ) .

EXEMPLE 7.2. Soit la matrice $\{a_{nk} : k, n = 1, 2, 3, \dots\}$ avec $a_{nk} \geq 0$, fortement régulière; c'est-à-dire, telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n, (k+1)} - a_{nk}| = 0 .$$

Soient i) $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, ii) A_n l'algèbre composée de tous sous-ensembles de S ($n = 1, 2, 3, \dots$), et iii) $\mu_n : A_n \rightarrow [0, 1]$ la fonction additive définie par

$$\mu_n(\{k\}) = a_{nk} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Alors (voir [6])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

où

$$\hat{\mu}_n(t) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\mu_n(k) \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

Ainsi, pour une matrice fortement régulière $\{a_{nk} : n, k = 1, 2, 3, \dots\}$ et une suite $\phi_k : C \rightarrow C$ de transformations non expansives ayant les propriétés énoncées plus haut, la suite $\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \phi_k x_0 : n = 1, 2, 3, \dots\}$ converge fortement pour tout $x_0 \in C$ vers un point fixe pour les ϕ_k .

8. Une fonction additive invariante

J. Mycielski a montré dans [15, p. 317] l'existence d'une fonction additive μ définie sur la σ -algèbre L_n composée des ensembles de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), telle que $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ et $\mu(TF) = \mu(F)$ pour tout $F \in L_n$ et toute isométrie T de $\mathbb{R}^n$. Cependant, en se servant de l'Exemple 3.2, on peut montrer l'existence d'une fonction additive λ non négative et régulière, définie sur une algèbre A de boréliens dans $\mathbb{R}^n$ tel que i) $\lambda(\mathbb{R}^n) = 1$, ii) T est A -mesurable (c'est-à-dire, $T^{-1}A \subset A$), et iii) $\lambda(T^{-1}F) = \lambda(F)$ pour tout $F \in A$ et toute transformation affine et surjective $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ceci est une conséquence du résultat général suivant (voir [8, p. 108]).

THÉORÈME 8.1. Soit S un groupe commutatif localement compact. Il existe $(\lambda, A) \in M(S)$ tel que

1) $\lambda : A \rightarrow [0, 1]$ et $\lambda(S) = 1$,

2) λ et A sont invariants par rapport aux translations, et

3) si $T : S_1 \rightarrow S_2$ est un homomorphisme surjectif entre deux groupes S_1 et S_2 qui sont commutatifs et localement compacts, alors $T^{-1} : A_2 \rightarrow A_1$ et $\lambda_1(T^{-1}F) = \lambda_2(F)$ ($F \in A_2$) où $(\lambda_j, A_j) \in M(S_j)$ ($j = 1, 2$) sont les mêmes couples qu'avant.

Une isométrie de $\mathbb{R}^n$ est nécessairement une transformation affine surjective. Ainsi, par rapport au résultat de Mycielski, ce théorème généralise la classe des opérateurs au dépens de la grandeur de A (qui quand même est assez grand pour être d'intérêt). Lorsque $S = \mathbb{R}^n$, on a que la limite suivante existe et est égale à

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \quad (f \in C(\mathbb{R}^n, A))$$

où l'intégrale à droite existe au sens de la convergence Moore-Smith, celles à gauche existent au sens de Lebesgue, et B_r est une boule quelconque dans $\mathbb{R}^n$ de rayon r et volume $|B_r|$ (voir [8, p. 108]). Pareillement lorsque $S = \mathbb{Z}$, on a que la limite suivante existe et est égale à

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N f(j) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \quad (f \in C(\mathbb{Z}, A))$$

où l'intégrale à droite existe au sens de la convergence Moore-Smith.

Références

- [1] BAILLON, J.-B., *Comportement asymptotique des itérés de contractions non linéaires dans les espaces L^p* , C.R. Acad. Sci. Paris 289 (1978), 157-159.
- [2] BAILLON, J.-B., *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C.R. Acad. Sci. Paris 280 (1975), 1511-1514.

- [3] BELLEY, J.-M. et DUBOIS, J., *A characterization of linear transformations on the space of Fourier-Stieltjes transforms*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 1 (1979), 327-331.
- [4] BELLEY, J.-M. et MORALES, P., *A generalization of Wiener's criteria for the continuity of a Borel measure*, *Studia Math.* (à paraître).
- [5] BELLEY, J.-M., *A measure theoretic approach to fixed points in ergodic theory*, *Proceedings of the Workshop on Fixed Points and their Applications held at the Université de Sherbrooke*, Springer Lecture Notes, New York (à paraître).
- [6] BELLEY, J.-M., *An ergodic theorem in harmonic analysis*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 3 (1981), 203-207.
- [7] BELLEY, J.-M., *A representation theorem and applications to topological groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 260 (1980), 267-279.
- [8] BELLEY, J.-M., *Bochner's theorem and the existence of invariant set functions*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 3 (1981), 105-108.
- [9] BLUM, J.R., WISENBERG, B. et HAHN, L.S., *Ergodic theory and the measure of sets in the Bohr group*, *Acta. Sci. Math.* 34 (1973), 17-24.
- [10] DARST, R.B., *A note on abstract integration*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 99 (1961), 292-297.
- [11] DUNFORD, N. et SCHWARTZ, J.T., *Linear Operators*, Part I, Interscience, New York, 1958.
- [12] EBERLEIN, W.F., *A note on Fourier-Stieltjes transforms*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 310-312.
- [13] HALMOS, P.R., *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1951.

- [14] HEWITT, E., *Linear functionals on almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 303-322.
- [15] MYCIELSKI, J., *Finitely additive invariant measures I*, Coll. Math. 42 (1979), 309-318.
- [16] PATIL, D.J., *Mean ergodic theorem in reflexive spaces*, Acta. Sci. Math. 39 (1977), 135-138.
- [17] REICH, S., *Almost convergence and nonlinear ergodic theorems*, J. Approximation Theory, 24 (1978), 269-272.
- [18] ROSENBLOOM, P.C., *Quelques classes de problèmes extrémaux*, Bull. Soc. Math. France 80 (1952), 183-215.
- [19] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [20] TAYLOR, A., *Introduction to Functional Analysis*, Wiley, New York, 1958.
- [21] WIENER, N., *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*, Massachusetts J. Math. 3 (1924), 72-94.

Département de mathématiques
et d'informatique
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec

Manuscrit reçu le 25 octobre 1981
Révisé le 23 novembre 1981