

SUITES FORTEMENT MÉLANGEANTES ET LOIS STABLES SUR UN ESPACE HILBERTIEN

Jean-Claude Massé

Un théorème classique de Paul Lévy affirme que si $\{X_n\}_1^\infty$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi, les lois stables sont les limites en loi des suites de la forme $\frac{1}{b_n}(X_1 + \dots + X_n) - a_n$ où $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ([5], p. 162). Ibragimov a montré que ce résultat reste vrai lorsque $\{X_n\}$ est une suite stationnaire fortement mélangée ([6], p. 404). L'objet de ce travail est de montrer que le théorème de Lévy-Ibragimov s'étend aux suites d'éléments aléatoires à valeurs dans un espace hilbertien séparable.

Les lois stables ont été définies et étudiées par Jajte [7] sur un espace hilbertien, puis reprises dans le contexte plus général des espaces de Banach par Kumar et Mandrekar [8]. Rappelons la notation utilisée par ces auteurs. Soient H un espace hilbertien séparable, $\mathcal{B}(H)$ la tribu des boréliens de H . Etant donné deux probabilités μ et ν sur $\mathcal{B}(H)$, on note $\mu * \nu$ la convolution de μ et ν . Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on pose $T_a \mu(B) = \mu(a^{-1}B)$, $B \in \mathcal{B}(H)$. On dit que μ est une loi *stable* si, quels que soient a et b positifs, il existe $c > 0$ et $x \in H$ tels que

$$T_a \mu * T_b \mu = T_c \mu * \delta_x$$

où $\delta_x(B) = 1$ si $x \in B$, $= 0$ sinon. Soient X_1 et X_2 des éléments aléatoires indépendants à valeurs dans H et tels que $\mu = L(X_1) = L(X_2)$. Dire que μ est stable signifie alors qu'étant donné $a, b > 0$, il existe $c > 0$, $x \in H$ et un élément aléatoire X_3 à valeurs dans H tels que $\mu = L(X_3)$ et

$$L(aX_1 + bX_2) = L(cX_3 + X) .$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et soit $\{X_n : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow H\}_{n=-\infty}^{\infty}$ une suite d'éléments aléatoires, c.-à-d. de fonctions mesurables par rapport à la tribu borélienne de H . On dit que $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ est *stationnaire* (au sens strict) si, pour toute suite $n_1 < n_2 < \dots < n_p$ dans $\mathbb{Z}$, la loi de $(X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_p})$ est identique à la loi de $(X_{n_1+k}, X_{n_2+k}, \dots, X_{n_p+k})$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ stationnaire est *fortement mélangée* ([6], p. 305) si

$$\alpha(n) = \sup_{A \in \mathcal{F}_{-\infty}^m, B \in \mathcal{F}_{m+n}^{\infty}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|$$

tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, où $\mathcal{F}_{-\infty}^m = \mathcal{F}(X_m, X_{m-1}, \dots)$ et $\mathcal{F}_{m+n}^{\infty} = \mathcal{F}(X_{m+n}, X_{m+n+1}, \dots)$; étant donné la stationnarité, cette définition ne dépend pas du choix de $m \in \mathbb{N}$.

LEMME 1 ([6], Th. 17.2.1). Soit $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ une suite stationnaire fortement mélangée. Soient $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables respectivement p.r. à $\mathcal{F}_{-\infty}^m$ et $\mathcal{F}_{m+n}^{\infty}$ et telles que $|\xi| \leq C_1$, $|\eta| \leq C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes. Alors

$$|E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)| \leq 16C_1C_2\alpha(n) .$$

La convergence *faible* (ou *étroite*) d'une suite $\{\mu_n\}$ de probabilités sur $\mathcal{B}(H)$ vers la probabilité μ est définie comme étant la convergence de $\int_H f d\mu_n$ vers $\int_H f d\mu$ pour toute $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ continue, bornée. On écrit alors $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Désignons par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur H . La *fonction caractéristique* de μ est la fonction $\hat{\mu} : H \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{\mu}(x') = \int_H e^{i\langle x', x \rangle} d\mu(x) .$$

Il est bien connu que la probabilité μ est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique.

Nous utiliserons le critère de convergence faible suivant:

THÉOREME 1 ([4], p. 370). Pour que $\mu_n \Rightarrow \mu$, il faut et il suffit que

- 1° $\{\mu_n\}$ soit relativement compacte pour la convergence faible,
- 2° $\hat{\mu}_n(x') \rightarrow \hat{\mu}(x')$, $x' \in H$.

Un opérateur linéaire $A : H \rightarrow H$ symétrique, défini positif et compact est appelé *S-opérateur* si, pour une base orthonormale $\{e_i\}$ de H , la trace $\sum_i (Ae_i, e_i) < \infty$. On peut alors montrer que cette trace ne dépend pas de la base choisie; on la notera $\text{tr}(A)$.

Le critère de compacité suivant est dû à Prokhorov.

THÉOREME 2 ([9], VI.2.3). Pour qu'une famille K de probabilités sur H soit relativement compacte, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute $\mu \in K$, il existe un *S-opérateur* $S_{\mu, \varepsilon}$ tel que

- (a) $1 - \text{Re} \hat{\mu}(x') \leq \langle S_{\mu, \varepsilon} x', x' \rangle + \varepsilon$, $x' \in H$;
- (b) $\sup_{\mu \in K} \text{tr}(S_{\mu, \varepsilon}) < \infty$;
- (c) $\lim_N \sup_{\mu \in K} \sum_{i=N}^{\infty} \langle S_{\mu, \varepsilon} e_i, e_i \rangle = 0$, où $\{e_i\}$ est une base orthonormale de H .

Les deux prochains lemmes serviront à la démonstration du théorème fondamental; nous ne démontrons que le second.

LEMME 2. Soit $\{b_n\}_1^{\infty}$, dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$. Alors, pour tout $c \in (0, 1]$, il existe $\{k_n\}_1^{\infty}$ tendant vers ∞ dans $\mathbb{N}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{k_n}}{b_n} = c$.

LEMME 3. Soit $\{b_n\}_1^{\infty}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Pour toute suite d'éléments aléatoires $\{X_n : (\Omega, F, P) \rightarrow H\}_{n=1}^{\infty}$, il existe alors $\{r_n\}_1^{\infty}$, croissante et tendant vers ∞ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{r_n} X_j \xrightarrow{P} 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\{\varepsilon_n\}_1^{\infty}$ dans $\mathbb{R}_+$ décroissant vers 0 et telle que

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \varepsilon_n = \infty$. Soit $\{\delta_n\}_1^\infty$ dans $\mathbb{R}_+$ décroissant vers 0. Il existe alors $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq N_1$,

$$P(\|\frac{X_1}{b_n}\| > \varepsilon_n) < \delta_1 ;$$

de même il existe $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_2 > N_1$ tel que pour $N \geq N_2$,

$$P(\|\frac{X_1 + X_2}{b_n}\| > \varepsilon_n) < \delta_2 .$$

Posons $r_i = 1$ pour $1 \leq i < N_2$. Soit maintenant $N_3 \in \mathbb{N}$, $N_3 > N_2$ tel que pour $n \geq N_3$,

$$P(\|\frac{X_1 + X_2 + X_3}{b_n}\| > \varepsilon_n) < \delta_3$$

et soit $r_i = 2$ pour $N_2 \leq i < N_3$. On peut ainsi poursuivre la construction d'une suite $\{N_k\}$ strictement croissante dans $\mathbb{N}$. Soient ε et δ dans $\mathbb{R}_+$. Il existe alors $N(\varepsilon)$ et $M(\delta)$ dans $\mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N(\varepsilon)$, $\varepsilon_n < \varepsilon$ et pour $m \geq M(\delta)$, $\delta_m < \delta$. Pour $n \geq \max\{N(\varepsilon), N_{M(\delta)}\}$, on obtient que

$$P(\|\frac{\sum_{j=1}^{r_n} X_j}{b_n}\| > \varepsilon) \leq P(\|\frac{\sum_{j=1}^{r_n} X_j}{b_n}\| > \varepsilon_n) < \delta_{M(\delta)} < \delta ,$$

d'où la conclusion, puisque $r_n \geq M(\delta)$.

Citons encore un autre résultat fondamental pour la suite, à savoir le *théorème de convergence des types*. Ce résultat démontré dans $\mathbb{R}$ par Khintchine a été généralisé aux mesures sur un espace de Banach par Kumar et Mandrekar.

THÉORÈME 3 ([8], 1.5). Soient $\{\mu_n\}$ et μ des probabilités sur $B(H)$ telles que $\mu_n \Rightarrow \mu$. Supposons qu'il existe $\{a_n\}$ dans $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $\{x_n\}$ dans H tels que $T_{a_n} \mu_n * \delta_{x_n} \Rightarrow \mu'$, où μ' est une probabilité sur $B(H)$ non concentrée en un point. Alors il existe $a > 0$ et $x \in E$ tels que $a_n \rightarrow a$, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\mu' = T_a \mu * \delta_x$.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer notre caractérisation des lois stables.

THÉORÈME 4. Soit $\{X_n : (\Omega, F, P) \rightarrow H\}_{n=-\infty}^{\infty}$ une suite stationnaire fortement mélangeante. Soient $\{b_n\}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$, $\{a_n\}$ dans H et soit ν_n la loi de

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n X_j - a_n.$$

Alors si ν est une probabilité non concentrée en un point sur H telle que $\nu_n \Rightarrow \nu$, ν est une loi stable. La réciproque est également vraie.

REMARQUE. Toute probabilité δ_x concentrée en un point est évidemment une loi stable limite d'une suite de lois d'éléments aléatoires de la forme souhaitée.

DÉMONSTRATION. La réciproque est déjà contenue dans [8], Lemme 2.3.

Nous démontrerons la nécessité en nous inspirant d'une vieille technique de S. Bernstein [1]. Considérons l'expression

$$\begin{aligned} a \left(\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n X_j - a_n \right) + \frac{b_{k_n}}{b_n} a \left(\frac{1}{b_{k_n}} \sum_{j=n+r_n+1}^{n+r_n+k_n} X_j - a_{k_n} \right) \\ = \frac{a}{b_n} \sum_{j=1}^{n+r_n+k_n} X_j - c_n - \frac{a}{b_n} \sum_{j=n+1}^{n+r_n} X_j \end{aligned} \quad (\#)$$

où $c_n = \frac{a}{b_n} (a_n b_n + a_{k_n} b_{k_n})$, $\{k_n\}$ et $\{r_n\}$ sont choisis en conformité avec les lemmes 2 et 3. Soit μ_n la loi du membre gauche de (#). En vertu du Lemme 1,

$$\sup_{x' \in H} \left| \widehat{\mu}_n(x') - \widehat{T_{a_n \nu_n}}(x') T_{\frac{b_{k_n}}{b_n} b_n^{-1} a_{k_n} \nu_{k_n}}(x') \right| \leq 16\alpha(r_n). \quad (\#\#)$$

Or $T_{a_n \nu_n} \Rightarrow T_a \nu$ et $T_{\frac{b_{k_n}}{b_n} b_n^{-1} a_{k_n} \nu_{k_n}} \Rightarrow T_b \nu$ ([8], 1.3). Il en résulte que

$$\lambda_n = T_a^{\vee} \circ T_{b_k n^{-1} a^{\vee} k_n} \Rightarrow T_a^{\vee} \circ T_b^{\vee} \quad ([9], \text{III.1.1}) ,$$

d'où encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_n(x') = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{T_a^{\vee} \circ T_{b_k n^{-1} a^{\vee} k_n}}(x') = \widehat{T_a^{\vee}}(x') \widehat{T_b^{\vee}}(x') = \widehat{T_a^{\vee} \circ T_b^{\vee}}(x')$$

d'après ([9], VI.2.1) . On sait, d'après le critère cité plus haut, que $\{\lambda_n\}$ est relativement compacte, nous déduirons de (##) que $\{\mu_n\}$ est également relativement compacte. D'après le Théorème 2, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver pour $\{\lambda_n\}$ une famille $\{S_{n,\varepsilon}\}$ de S-opérateurs sur H satisfaisant les conditions (a), (b) et (c) de ce théorème. Soit $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_0(\varepsilon)$

$$\sup_{x' \in H} |\widehat{\mu}_n(x') - \widehat{\lambda}_n(x')| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Alors

$$1 - \operatorname{Re} \widehat{\mu}_n(x') < 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{Re} \widehat{\lambda}_n(x') \leq \langle S_{n,\frac{\varepsilon}{2}} x', x' \rangle + \varepsilon , \quad x' \in H$$

pour $n \geq N_0(\varepsilon)$. L'espace H étant polonais, soit K un compact dans H tel que $\mu_n(K^c) < \frac{\varepsilon}{2}$, $n = 1, 2, \dots, N_0(\varepsilon)-1$. Alors, pour ces mêmes n ,

$$1 - \operatorname{Re} \widehat{\mu}_n(x') = \int_H [1 - \cos \langle x', x \rangle] d\mu_n(x) \leq \frac{1}{2} \int_{K_\varepsilon} \langle x', x \rangle^2 d\mu_n(x) + \varepsilon , \quad x' \in H .$$

En posant $T_{n,\varepsilon} x' = \frac{1}{2} \int_{K_\varepsilon} \langle x', x \rangle x d\mu_n(x)$ où l'intégrale utilisée est celle de Bochner, on définit un opérateur linéaire continu sur H, symétrique, défini positif et compact, cette dernière propriété venant du fait que $T_{n,\varepsilon}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt [3]. Si $U_{n,\varepsilon} = T_{n,\varepsilon}$ pour $n < N_0(\varepsilon)$ et $U_{n,\varepsilon} = S_{n,\frac{\varepsilon}{2}}$ pour $n \geq N_0(\varepsilon)$, on obtient donc une famille de S-opérateurs qui permet de vérifier le critère de Prokhorov pour $\{\mu_n\}$. Puisque $\widehat{\mu}_n(x') \rightarrow \widehat{T_a^{\vee} \circ T_b^{\vee}}(x')$, on conclut que $\mu_n \Rightarrow T_a^{\vee} \circ T_b^{\vee}$. Or $\{\mu_n\}$ a la même limite faible que

$$L\left(\frac{a}{b} \sum_{j=1}^{n+r+k} x_j - c_n\right) = T_{ab_{n+r+k} b_n^{-1} \vee_{n+r+k} \delta_n} ,$$

où

$$d_n = \frac{a_{n+r} a_{n+k} b_{n+r} b_{n+k}}{b_n} - c_n,$$

du fait que $\frac{a}{b_n} \sum_{j=1}^{r_n} X_j \xrightarrow{P} 0$ (Lemme 3 et [2], Th. 4.1). En vertu du Théorème 3, on déduit alors qu'il existe $c > 0$ et $z \in E$ tels que $T_a^\nu * T_b^\nu = T_c^\nu * \delta_z$, où $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+r} a_{n+k} b_n^{-1}$ et $\|d_n - z\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Il en résulte que ν est stable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNSTEIN, S.N., *Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes*, Math. Ann., 97 (1926), 1-59.
- [2] BILLINGSLEY, P., *Convergence of Probability Measures*, Wiley and Sons, 1968.
- [3] GELFAND, I.M., VILENKIN, N.Y., *Generalized Distributions*, Vol. IV, Academic Press, 1964.
- [4] GIHMAN, I.I., SKOROHOD, A.V., *The Theory of Stochastic Processes*, Vol. 1, Springer-Verlag, 1974.
- [5] GNEDENKO, B.V., KOLMOGOROV, A.N., *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, 1954.
- [6] IBRAGIMOV, I.A., LINNIK, Y.V., *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Wotters-Noordhoff, 1971.
- [7] JAJTE, R., *On stable distributions in Hilbert space*, Studia Mathematica, 30 (1968), 63-71.
- [8] KUMAR, A., MANDREKAR, V., *Stable probability measures on Banach spaces*, Studia Mathematica, 42 (1972), 133-144.
- [9] PARTHASARATHY, K.R., *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, 1967.

- [10] ROSENBLATT, M., *A central limit theorem and a strong mixing condition*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42 (1956), 43-47.

Département de mathématiques
Université Laval
Québec, Québec

Manuscrit reçu le 20 juin 1980.