

L'INDÉPENDANCE D'UNE SÉRIE D'OBSERVATIONS
Yves Lepage et Hanna Zeidan

RÉSUMÉ

Le comportement de douze tests paramétriques et non-paramétriques pour l'hypothèse d'indépendance d'une série d'observations est étudié pour des échantillons de petite ou moyenne taille en calculant par simulation, la puissance empirique de ces tests pour des alternatives de dépendance avec tendance linéaire ou cyclique. L'analyse des puissances empiriques obtenues montre une supériorité de certains tests proposés par Dufour (1979).

1. INTRODUCTION

Dans plusieurs applications de la statistique, nous rencontrons le problème de tester l'hypothèse de l'indépendance d'une série d'observations ayant la même loi marginale continue. Ce problème est particulièrement important en séries chronologiques, en contrôle de la qualité et en épidémiologie.

La négation de l'hypothèse de l'indépendance d'une série d'observations ayant la même loi marginale continue étant trop vaste pour être étudiée globalement, les auteurs ont construit des tests pour des alternatives plus restreintes. Dans la littérature, nous retrouvons plusieurs tests paramétriques et non paramétriques pour tester des alternatives de tendance linéaire ou cyclique. Toutefois, très peu d'auteurs se sont penchés sur le problème de comparer les différentes procédures. Noether (50), Stuart (54, 56), Knoke (77) et Aiyar, Guillier & Albers (79) ont com-

paré certains tests non paramétriques selon l'efficacité asymptotique relative au sens de Pitman mais, à notre connaissance, aucune comparaison n'a été établie pour des échantillons de petite ou moyenne taille pour des alternatives de dépendance. Le but de cet article consiste à comparer la puissance empirique de certains tests paramétriques et non paramétriques pour des alternatives de dépendance avec tendance linéaire ou cyclique.

Dans la section 2, nous introduisons les statistiques que nous étudions et nous résumons certaines propriétés. Les alternatives considérées de même que la méthode de simulation sont présentées dans la section 3 tandis que la section 4 contient une discussion des résultats.

2. LES TESTS

Soit $X(1), \dots, X(n)$ une série d'observations de même loi marginale F continue. Désignons par H_0 l'hypothèse de l'indépendance des observations. Nous introduisons maintenant les tests que nous étudions.

TEST DE YOUNG-VON NEUMANN. Young (41) considère la statistique

$$A = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (X(t) - X(t+1))^2}{2 \sum_{t=1}^n (X(t) - \bar{X})^2},$$

où $\bar{X} = \sum_{t=1}^n X(t)/n$, pour tester l'hypothèse H_0 contre toute alternative de tendance. Il montre que sous H_0 , pour des échantillons d'une population normale de taille supérieure ou égale à 20, la loi de A est approximativement normale avec moyenne 0 et variance $(n-2)/(n^2-1)$.

D'autre part, von Neumann (41) introduit la statistique

$$A' = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (X(t+1) - X(t))^2}{\sum_{t=1}^n (X(t) - \bar{X})^2}.$$

Dans Hart & von Neumann (42) et dans Hart (42), on trouve la loi exacte de A' sous H_0 en supposant la loi F normale. Comme $A = 1 - (n-1)A'/2n$, nous pouvons en déduire la loi exacte de A et la loi approximative de A' sous H_0 en supposant F normale.

TEST DES RETOURS. Une série d'observations admet un retour en t , $t = 2, \dots, n-1$, si $X(t-1) < X(t)$ et $X(t) > X(t+1)$ ou $X(t-1) > X(t)$ et $X(t) < X(t+1)$. Une statistique testant H_0 contre toute alternative de tendance est donnée par

$$D = \sum_{t=2}^{n-1} Y_t$$

où $Y_t = 1$ s'il y a un retour en t , 0 sinon. Notons que cette statistique est équivalente à la statistique suggérée par Wallis & Moore (41) de même qu'à la statistique proposée par Bilham (26) dans un autre contexte. Lorsque n est grand, la statistique D suit approximativement sous H_0 une loi normale de moyenne $2(n-2)/3$ et de variance $(16n-29)/90$ (voir Kendall & Stuart (68), Vol. 3, p. 352).

TEST DE SPEARMAN. Daniels (50) utilise la statistique

$$T = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (R_t - t)^2 - \frac{n(n^2-1)}{12},$$

où R_t désigne le rang de $X(t)$ parmi $X(1), \dots, X(n)$, pour tester l'hypothèse H_0 contre toute alternative de tendance. Notons que la statistique T est une transformation du coefficient de corrélation de Spearman (04). Lorsque n est grand, la statistique T suit approximativement sous H_0 une loi normale de moyenne 0 et de variance $n^2(n^2-1)(n+1)/144$ (voir Hotelling & Pabst (36), Olds (38, 49)).

TEST DE DIFFÉRENCE DES RANGS. La statistique

$$G = \sum_{t=1}^{n-1} (R_t - R_{t+1})^2,$$

où R_t désigne le rang de $X(t)$ parmi $X(1), \dots, X(n)$, pour être utilisée pour tester l'hypothèse H_0 contre toute alternative de tendance (voir Aiyar (69)). Lorsque n est grand, en utilisant von Neumann, Kent, Bellinson & Hart (41) et Noether (50), nous pouvons montrer que la statistique G suit approximativement sous H_0 une loi normale de moyenne $n(n^2-1)/6$ et de variance $n(n+1)(n-2)(5n^2-2n-9)/180$ (voir aussi Aiyar (69)).

TEST DE WALD-WOLFOWITZ. Wald & Wolfowitz (43) proposent la statistique

$$N = \sum_{t=1}^{n-1} X(t)X(t+1) + X(n)X(1)$$

pour tester l'hypothèse H_0 contre des alternatives de tendance ou de cycle. Pour $n \geq 30$, ils suggèrent d'approximer sous H_0 la loi de N par une loi normale de moyenne $(S_1^2 - S_2)/(n-1)$ et de variance

$$\frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \frac{S_1^4 - 4S_1^2S_2 + 4S_1S_3 + S_2^2 - 2S_4}{(n-1)(n-2)} - \frac{(S_1^2 - S_2)^2}{(n-1)^2}$$

où $S_k = \sum_{t=1}^n X^k(t)$ (voir aussi Noether (50)).

TEST DE MOORE-WALLIS. Soit pour $t = 1, \dots, n-1$, $Y_t = 1$ si $X(t+1) > X(t)$ et, 0 sinon. Moore & Wallis (43) utilisent la statistique

$$H = \sum_{t=1}^{n-1} Y_t$$

pour tester l'hypothèse H_0 contre des alternatives de tendance ascendante ou descendante. Notons que la projection de la statistique H sur la famille des statistiques linéaires basées sur les rangs est une constante.

Mann (45a) montre que pour $n \geq 13$, la loi de H sous H_0 peut être approximée par une loi normale de moyenne $(n-1)/2$ et de variance $(n+1)/12$ (voir aussi Kendall & Stuart (68), Vol. 3, p. 355).

TEST DE FOSTER-STUART. Pour tester l'hypothèse H_0 contre toute alternative de tendance, Foster & Stuart (54) considèrent la statistique

$$S = \sum_{t=2}^n Y_t$$

où, pour $t = 2, \dots, n$, $Y_t = 1$ si $X(t) > \max(X(1), \dots, X(t-1))$ ou $X(t) < \min(X(1), \dots, X(t-1))$, 0 sinon (voir aussi Foster & Teichroew (55)). Ils montrent que lorsque $n \geq 15$, la statistique S suit approximativement sous H_0 une loi normale de moyenne $2 \sum_{t=2}^n 1/t$ et de variance $2 \sum_{t=2}^n 1/t - 4 \sum_{t=2}^n 1/t^2$.

TEST DE MANN. Mann (45b) étudie la statistique

$$L = \sum_{t=1}^n \sum_{\substack{s=1 \\ t < s}}^n Y_{t,s}$$

où pour t et $s = 1, \dots, n$, $t \neq s$, $Y_{t,s} = 1$ si $X(t) < X(s)$, 0 sinon, pour tester l'hypothèse H_0 contre les alternatives de tendance ascendante (voir aussi Noether (50)). Notons que la statistique L est une fonction du coefficient de corrélation de Kendall (voir Kendall (48)) qui est asymptotiquement équivalent au coefficient de corrélation de Spearman (voir Hájek & Šidák (67)).

Lorsque $n \geq 10$, la statistique L peut être approximée sous H_0 par une loi normale de moyenne $n(n-1)/4$ et de variance $(2n^3 + 3n^2 - 5n)/72$ (voir Mann (45b)).

TEST D'ANDERSON. Pour tester l'hypothèse H_0 contre toute alternative de tendance, Anderson (42) suggère la statistique

$$C = \frac{\sum_{t=1}^n X(t)X(t+1) - \left(\sum_{t=1}^n X(t)\right)^2/n}{\sum_{t=1}^n X^2(t) - \left(\sum_{t=1}^n X(t)\right)^2/n}$$

où $X(n+1) = X(1)$.

Il montre que sous H_0 , pour des échantillons d'une population normale, la loi de C est approximativement normale de moyenne $-1/(n-1)$ et de variance $(n-2)/(n-1)^2$ lorsque $n \geq 15$.

TEST DE DUFOUR. Pour $t = 1, \dots, N$, $N = n - 1$, définissons $Z_t = X_t X_{t+1}$ et dénotons par R_t^+ le rang de $|Z_t|$ parmi $|Z_1|, \dots, |Z_N|$. Dufour (79) considère la famille de statistiques

$$S = \sum_{t=1}^N u(Z_t) a_N(R_t^+)$$

où $u(Z) = 1$ si $Z > 0$, 0 si $Z \leq 0$ et $a_N(\cdot)$ est une fonction non négative, afin de tester l'hypothèse H_0 contre des alternatives de dépendance. Sous H_0 et pour des échantillons d'une population symétrique, il montre en imposant des conditions de régularité sur la fonction $a_N(\cdot)$ que la loi asymptotique de S est normale de moyenne $\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N a_N(t)$ et de variance $\frac{1}{4} \sum_{t=1}^N a_N^2(t)$.

Trois statistiques sont particulièrement intéressantes:

$$F = \sum_{t=1}^N u(Z_t)$$

$$V = \sum_{t=1}^N u(Z_t) R_t^+$$

et

$$I = \sum_{t=1}^N u(Z_t) \Phi^{-1} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_t^+}{N+1} \right) \right)$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. La statistique F a été étudiée par David (47), Goodman (58) et Granger (63). Quant aux statistiques V et I , elles sont respectivement les analogues des statistiques de Wilcoxon et de van der Waerden pour la symétrie (voir Hájek & Šidák (67)).

3. LA SIMULATION

Nous étudions les alternatives où, pour $t = 1, \dots, n$, les observations sont de la forme

$$X(t) = f(t) + \varepsilon_t,$$

$f(t)$ étant une fonction connue et ε_t représentant une erreur dépendante. Sous l'alternative, les observations sont donc dépendantes avec une tendance de forme $f(\cdot)$.

Les tendances que nous considérons sont $f(t) = t/25$, $t/10$, $\sin \frac{2\pi t}{10}$ ou $\sin \frac{2\pi t}{5}$. De plus, nous supposons que le vecteur aléatoire $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$ suit une loi multinormale de moyenne $\underline{0} = (0, \dots, 0)'$ et de matrice de covariance $\underline{\Sigma} = \delta A + (1-\delta)I$ où $\delta \neq 1$, A est la matrice $n \times n$ dont chaque élément est l'unité et I est la matrice identité $n \times n$. Nous pouvons facilement montrer que δ correspond au coefficient de corrélation entre toutes les paires d'observations $X(t)$.

La forme de la région critique offrant la meilleure puissance empirique n'est en général pas connue. Pour une alternative donnée, certaines statistiques nous incitent à considérer des régions critiques bilatérales (B), d'autres des régions critiques unilatérales à droite (UD) et enfin d'autres des régions critiques unilatérales à gauche (UG). Ainsi, pour chacune des douze statistiques présentées dans la section précédente, nous étudions en utilisant la loi asymptotique des régions critiques B, UD et UG de niveau α où $\alpha = 0.01$, 0.05 et 0.10 . Aussi, nous considérons des tailles échantillonnelles de 15, 25, 35 et 50 et $\delta = 0.25$, 0.50 et 0.75 .

A l'aide de l'ordinateur CYBER 173 du Centre de calcul de l'Université de Montréal, nous simulons, pour chaque valeur de n et chaque alternative de tendance dépendante, mille séries d'observations pour lesquelles nous établissons pour $\alpha = 0.01$, 0.05 et 0.10 la puissance empirique des douze tests selon les régions critiques B , UD et UG . Pour $\alpha = 0.05$, nous présentons dans les tableaux 1 et 2 les résultats pour les alternatives de tendance linéaire dépendante et dans les tableaux 3 et 4 les résultats pour les alternatives de tendance cyclique dépendante. Dans Lepage & Zeidan (79), nous trouvons les résultats pour $\alpha = 0.01$ et 0.10 ainsi que pour les tendances $f(t) = 10$, t et $t^3/729 - t^2/18 + 2t/3 - 1/2$ pour $\alpha = 0.01$, 0.05 et 0.10 .

4. DISCUSSION

Dans la discussion qui suit, étant donné que nous ne supposons pas a priori la forme de la région critique offrant la meilleure puissance empirique, nous ne comparons donc pas nécessairement des tests avec des régions critiques de même forme. Nous considérons plutôt la puissance empirique d'un test comme la puissance empirique la plus élevée parmi les puissances empiriques obtenues pour ce test avec les régions critiques B , UD et UG .

Pour les alternatives de tendance linéaire considérées, nous remarquons qu'à quelques exceptions près, la puissance empirique augmente avec la taille échantillonnale n et le coefficient de corrélation δ entre les observations. Les exceptions s'observent pour des petites tailles échantillonnales et s'expliquent par l'emploi du point critique asymptotique au lieu du point critique exact. Aussi, nous observons qu'en général la puissance empirique de chaque test augmente avec la pente de la droite $f(t)$ quels que soient n et δ . Les tests de Dufour (I et V), le test de Mann (L) et le test de Spearman (T) offrent la puissance empirique la plus élevée quels que soient n et δ . Enfin, les tests des retours (D), de Moore-Wallis (H) et de Foster-Stuart (S) présentent une puissance empirique très faible.

n	δ	A			D			T			G			N			H			S			L			C			F			V			I		
		B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG
15	0.25	61	84	40	40	20	75	105	12	175	55	34	80	50	65	36	33	125	51	45	37	34	99	164	10	40	52	26	192	181	11	242	309	22	247	311	22
	0.50	69	101	37	40	20	72	126	4	216	55	35	93	54	73	35	36	134	52	44	36	48	127	200	4	47	60	25	354	349	5	426	484	8	419	487	7
	0.75	92	137	28	45	22	76	220	2	331	89	26	136	69	100	26	44	148	48	50	45	42	222	312	2	51	81	20	563	559	4	619	681	6	615	683	5
25	0.25	114	166	20	50	44	35	331	1	464	103	22	150	96	143	21	90	59	31	39	70	17	330	447	1	85	132	18	391	386	3	469	538	7	483	544	8
	0.50	144	214	14	49	46	34	450	0	595	139	17	199	120	187	15	93	66	27	37	79	13	457	581	0	108	164	12	564	560	4	619	676	6	631	684	4
	0.75	276	408	1	48	46	33	762	0	851	264	4	370	216	311	5	107	84	23	50	117	10	758	845	0	195	284	4	734	734	0	793	832	0	801	838	0
35	0.25	220	309	5	68	61	83	728	0	837	199	4	314	177	267	6	43	131	30	42	91	31	718	829	0	162	253	4	599	654	3	683	737	2	695	757	2
	0.50	347	481	2	65	56	83	876	0	928	332	1	465	276	402	3	48	141	30	53	111	24	866	927	0	258	387	3	710	759	1	783	840	1	802	851	1
	0.75	699	798	0	59	53	76	996	0	1000	685	0	781	582	699	1	61	170	24	85	167	16	996	998	0	560	679	1	867	883	1	923	950	1	937	956	0
50	0.25	623	728	0	75	59	81	994	0	997	616	0	705	532	655	0	64	130	42	63	152	9	994	998	0	517	644	0	849	876	0	935	955	0	942	964	0
	0.50	846	899	0	71	54	81	1000	0	1000	832	0	886	770	846	0	74	153	36	97	206	6	1000	1000	0	761	838	0	900	918	0	965	978	0	970	984	0
	0.75	995	999	0	76	54	83	1000	0	1000	992	0	996	983	994	0	99	197	18	210	364	1	1000	1000	0	981	994	0	986	986	0	998	1000	0	1000	1000	0

Tableau 1 - Mille fois la puissance empirique des tests
au niveau asymptotique .05 pour l'alter-
native où $f(t) = t/25$.

		A				D			T			C			N			H			S			L			C			F			V			I		
n	ε	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	
15	0.25	149	210	17	42	20	78	396	1	524	132	21	204	92	150	21	46	186	31	71	69	28	386	518	1	69	122	20	436	432	4	532	615	4	537	615	3	
	0.50	216	311	12	45	22	85	531	0	677	196	13	287	121	202	13	52	206	29	76	75	24	515	651	0	94	172	11	564	561	3	652	713	3	653	720	2	
	0.75	424	550	4	58	21	102	808	0	898	419	3	541	218	340	5	71	276	18	129	127	11	807	884	0	177	294	3	715	714	1	787	848	1	785	858	1	
25	0.25	596	693	0	52	48	37	963	0	986	581	0	670	443	552	0	131	117	14	89	185	5	964	985	0	412	523	0	845	845	0	925	954	0	932	961	0	
	0.50	793	867	0	59	45	45	999	0	999	768	0	860	608	736	0	161	151	10	128	274	1	999	999	0	573	718	0	894	894	0	950	967	0	954	974	0	
	0.75	988	996	0	65	40	51	1000	0	1000	985	0	993	900	954	0	237	233	40	267	472	1	1000	1000	0	884	939	0	966	966	0	991	997	0	994	999	0	
35	0.25	976	990	0	70	58	83	1000	0	1000	966	0	987	913	963	0	77	230	12	194	352	6	1000	1000	0	904	955	0	987	991	0	999	1000	0	1000	1000	0	
	0.50	998	999	0	68	54	84	1000	0	1000	997	0	999	988	996	0	107	265	11	324	516	1	1000	1000	0	987	996	0	992	992	0	999	1000	0	1000	1000	0	
	0.75	1000	1000	0	67	42	91	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	1000	0	190	388	3	608	748	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	
50	0.25	1000	1000	0	76	57	77	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	1000	0	149	259	6	518	660	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	
	0.50	1000	1000	0	74	51	81	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	1000	0	178	317	5	688	822	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	
	0.75	1000	1000	0	79	47	91	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	1000	0	286	458	1	927	983	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0	

Tableau 2 - Mille fois la puissance empirique des tests
au niveau asymptotique .05 pour l'alter-
native où $f(t) = t/10$.

n	g	A			D			T			G			N			H			S			L			C			F			Y			I		
		B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG
15	0.25	17	67	2	168	7	308	34	81	7	17	1	56	19	55	3	35	53	135	41	41	45	36	6	77	9	35	5	83	82	1	100	171	5	103	186	5
	0.50	17	64	0	227	2	409	27	68	3	17	1	66	11	53	1	31	51	134	29	29	31	29	2	65	6	30	1	176	176	0	234	326	1	239	356	1
	0.75	11	81	0	442	0	674	13	53	0	13	0	74	5	35	0	22	44	195	25	25	25	23	0	49	2	18	0	277	277	0	363	468	0	377	507	0
25	0.25	29	100	0	281	3	280	26	52	7	28	0	81	26	89	0	92	25	67	34	60	16	26	9	49	16	71	0	126	123	5	169	253	0	172	271	0
	0.50	30	121	0	399	1	399	12	42	0	27	0	87	21	100	0	98	23	75	30	48	12	15	0	38	14	79	0	256	256	0	326	423	0	348	462	0
	0.75	28	165	0	755	0	755	4	28	0	28	0	152	13	133	0	99	18	81	24	46	11	4	0	24	6	94	0	362	362	0	493	615	0	541	684	0
35	0.25	49	114	0	367	4	497	15	50	5	36	1	114	42	115	0	60	68	118	27	53	59	20	4	53	36	98	0	159	248	4	226	330	0	251	375	0
	0.50	53	142	0	532	0	654	11	38	5	45	0	138	45	142	0	49	60	115	29	44	52	13	2	39	37	115	0	299	409	0	423	521	0	455	568	0
	0.75	64	244	0	873	0	930	5	16	0	56	0	283	52	255	0	56	38	133	15	38	39	3	0	18	40	222	0	413	507	0	602	730	0	647	772	0
50	0.25	63	170	0	448	1	580	22	42	6	61	0	155	56	162	0	58	70	107	21	41	35	20	7	48	52	153	0	184	269	1	303	439	0	331	474	0
	0.50	87	237	0	646	0	779	7	34	5	77	0	237	81	225	0	65	48	115	20	45	27	11	3	37	71	209	0	348	448	0	545	648	0	582	692	0
	0.75	189	472	0	950	0	983	1	9	0	183	0	517	162	492	0	74	44	122	13	32	19	1	0	12	147	472	0	463	545	0	730	864	0	788	900	0

Tableau 3 - Mille fois la puissance empirique des tests au niveau asymptotique .05 pour l'alternative où $f(t) = \sin(2\pi t/5)$.

n	δ	A			D			T			G			N			H			S			L			C			P			V			I		
		B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG	B	UD	UG
15	0.25	233	357	3	85	11	167	12	25	15	234	2	372	267	386	3	32	74	120	43	42	25	11	11	24	217	341	3	259	257	2	330	471	1	336	485	1
	0.50	359	510	1	121	6	224	8	23	11	365	1	518	408	557	2	26	67	124	39	39	19	6	5	12	339	501	1	388	387	1	545	670	0	546	683	0
	0.75	685	826	0	242	2	366	3	9	4	665	0	809	734	858	0	26	52	138	60	60	6	1	0	6	676	814	0	593	593	0	791	881	0	801	893	0
25	0.25	418	577	0	118	22	114	13	15	16	429	0	561	449	580	0	90	29	61	32	73	11	9	15	18	407	554	0	401	399	2	530	650	0	552	686	0
	0.50	626	738	0	195	13	192	4	9	13	626	0	742	640	758	0	102	30	72	36	84	8	7	10	10	607	730	0	593	592	1	772	855	0	800	876	0
	0.75	933	968	0	399	4	398	0	2	1	933	0	965	942	984	0	113	29	84	31	89	1	0	0	4	934	976	0	841	841	0	958	981	0	970	989	0
35	0.25	547	688	0	181	23	268	8	21	15	556	1	686	572	694	1	41	57	105	34	75	35	7	14	15	550	677	1	493	620	3	669	763	1	703	784	1
	0.50	764	860	0	286	17	378	6	9	10	778	0	862	777	865	0	48	56	100	36	74	31	5	8	9	761	863	0	707	818	1	861	914	0	885	927	0
	0.75	983	993	0	537	1	609	0	1	3	982	0	995	984	995	0	53	52	123	39	97	17	0	2	2	982	994	0	919	965	0	995	998	0	995	998	0
50	0.25	726	828	0	221	14	298	47	105	3	740	0	831	740	834	0	47	65	88	31	74	13	47	1	109	727	821	0	591	696	0	807	877	0	840	899	0
	0.50	912	953	0	346	3	438	39	96	1	921	0	963	916	958	0	50	64	93	34	67	11	39	0	101	914	955	0	786	874	0	959	972	0	966	982	0
	0.75	1000	1000	0	673	0	756	27	82	0	1000	0	1000	1000	1000	0	74	70	113	27	77	6	31	0	78	1000	1000	0	981	992	0	1000	1000	0	1000	1000	0

Tableau 4 - Mille fois la puissance empirique des tests
au niveau asymptotique .05 pour l'alter-
native où $f(t) = \sin(2\pi t/10)$.

Pour les alternatives cycliques considérées, étant donné la faible puissance empirique observée pour les tests de Moore-Wallis (H), de Mann (L), de Spearman (T) et de Foster-Stuart (S), nous discutons plutôt les résultats des tests A, D, G, N, C, F, V et I. A l'exception du test des retours (D), la puissance empirique de chacun des autres tests augmente avec la fréquence des cycles quels que soient n et δ . De plus, à quelques exceptions près, la puissance empirique augmente avec la taille échantillonnale n et le coefficient de corrélation δ entre les observations. Enfin, en général, les tests de Dufour (V et I) présentent la meilleure puissance empirique quels que soient les cycles considérés.

En conclusion, mentionnons l'excellente performance des tests de Dufour (V et I) à la fois pour les alternatives de dépendance avec tendance linéaire et les alternatives de dépendance avec tendance cyclique. Le test I est légèrement supérieur au test V toutefois, le test V est plus facilement utilisable. Les puissances empiriques obtenues pour les autres tests sont conformes avec les résultats asymptotiques connus (Noether (50), Stuart (54, 56), Knoke (77) et Aiyar, Guillier & Albers (79)) sans la dépendance. Cette structure de dépendance tend donc à augmenter la puissance empirique pour des échantillons de petite ou moyenne taille.

BIBLIOGRAPHIE

- AIYAR, R.J. (1969), *On Some Tests for Trend and Autocorrelation*, Ph.D. Dissertation, Department of Statistics, University of California, Berkeley.
- AIYAR, R.J., GUILLIER, C.L. and ALBERS, W. (1979), *Asymptotic relative efficiencies of rank tests for trend alternatives*, Journal of the American Statistical Association, 74, 226-231.
- ANDERSON, R.L. (1942), *Distribution of the serial correlation coefficient*, Annals of Mathematical Statistics, 13, 1-13.
- BILHAM, E.G. (1926), *Correlation coefficients*, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 52, 172.

- DANIELS, H.E. (1950), *Rank correlation and population models*, Journal of the Royal Statistical Society, B, 12, 171-181.
- DAVID, F.N. (1947), *A power function for tests of randomness in a sequence of alternatives*, Biometrika, 34, 335-339.
- DUFOUR, J.M. (1979), *Rank Tests for Serial Dependence*, Cahier de recherches, no 7815, Département des sciences économiques et Centre de recherche en développement économique, Université de Montréal, Montréal (à paraître dans Journal of Time Series Analysis).
- FOSTER, F.G. and STUART, A. (1954), *Distribution-free tests in time series based on the breaking of records*, Journal of the Royal Statistical Society, B, 16, 1-22.
- FOSTER, F.G. and TEICHROEW, D. (1955), *A sampling experiment of the powers of the records test for trend in a time series*, Journal of the Royal Statistical Society, B, 17, 115-121.
- GOODMAN, L. (1958), *Simplified runs tests and likelihood ratio tests for Markov chains*, Biometrika, 45, 181-197.
- GRANGER, C.W.J. (1963), *A quick test for serial correlation suitable for use with non-stationary time series*, Journal of the American Statistical Association, 58, 728-736.
- HÁJEK, J. and ŠIDÁK, Z. (1967), *Theory of Rank Tests*, Academic Press, New York.
- HART, B.I. and NEUMANN, J. von (1942), *Tabulation of the probabilities for the ratio of the mean square successive difference to the variance*, Annals of Mathematical Statistics, 13, 207-214.
- HART, B.I. (1942), *Significance levels for the ratio of the mean square successive difference to the variance*, Annals of Mathematical Statistics, 13, 445-447.

- HOTELLING, H. and PABST, M.R. (1936), *Rank correlation and tests of significance involving no assumption of normality*, Annals of Mathematical Statistics, 7, 29-43.
- KENDALL, M.G. (1948), *Rank Correlation Methods*, Griffin, London.
- KENDALL, M.G. and STUART, A. (1968), *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 3 (second edition), Griffin, London.
- KNOKE, J.D. (1977), *Testing for randomness against autocorrelation: Alternative tests*, Biometrika, 64, 523-529.
- LEPAGE, Y. et ZEIDAN, H. (1979), *Sur l'indépendance d'une série d'observations*, Rapport de recherche 79-13, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal.
- MANN, H.B. (1945a), *On a test for randomness based on signs of differences*, Annals of Mathematical Statistics, 16, 193-199.
- MANN, H.B. (1945b), *Nonparametric tests against trend*, Econometrica, 13, 245-259.
- MOORE, G.H. and WALLIS, W.A. (1943), *Time series significance tests based on signs of differences*, Journal of the American Statistical Association, 38, 153-164.
- NEUMANN, J. von, KENT, R.H., BELLINSON, H.R. and HART, B.I. (1941), *The mean square successive difference*, Annals of Mathematical Statistics, 12, 153-162.
- NEUMANN, J. von (1941), *Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance*, Annals of Mathematical Statistics, 12, 367-395.
- NOETHER, G.E. (1950), *Asymptotic properties of the Wald-Wolfowitz test of randomness*, Annals of Mathematical Statistics, 21, 231-246.
- OLDS, E.G. (1938), *Distributions of sums of squares of rank differences for small numbers of individuals*, Annals of Mathematical Statistics, 9, 133-148.

- OLDS, E.G. (1949), *The 5% significance levels for sums of squares of rank differences and a correction*, Annals of Mathematical Statistics, 20, 117-118.
- SPEARMAN, C. (1904), *The proof and measurement of association between two things*, American Journal of Psychology, 15, 72-101.
- STUART, A. (1954), *Asymptotic relative efficiencies of distribution-free tests of randomness against normal alternatives*, Journal of the American Statistical Association, 49, 147-157.
- STUART, A. (1956), *The efficiencies of tests of randomness against normal regression*, Journal of the American Statistical Association, 51, 285-287.
- WALD, A. and WOLFOWITZ, J. (1943), *An exact test for randomness in the nonparametric case based on serial correlation*, Annals of Mathematical Statistics, 14, 378-388.
- WALLIS, W.A. and MOORE, G.H. (1941), *A significance test for time series analysis*, Journal of the American Statistical Association, 36, 401-409.
- YOUNG, L.C. (1941), *On randomness in ordered sequences*, Annals of Mathematical Statistics, 12, 293-300.

Département de mathématiques
et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3C 3J7

Manuscrit reçu le 23 mai 1980.
Révisé le 1er juin 1981.