

LOCALISATION RELATIVE ET ACTIONS

Claude Lemaire

0. INTRODUCTION

0.1. La localisation des groupes et des espaces nilpotents a pris de plus en plus d'importance ces dernières années (voir par exemple [5]). Il est difficile, en général, d'étendre les résultats obtenus à des groupes ou à des espaces non nilpotents, faute d'une généralisation assez maniable de la localisation. Ce travail est consacré à une de ces généralisations, la "localisation relative" introduite par P. Hilton dans [4], comme correspondant algébrique de la "localisation de la fibre" de la Topologie algébrique.

Plus spécialement, nous nous intéressons à l'effet d'une telle localisation sur l'action d'un groupe, dans la ligne de [2], [3], [6].

0.2. Soit $E : N \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow Q$ une extension de groupes, avec N nilpotent. La P -localisation E_P de E est l'extension $N_P \twoheadrightarrow G_{(P)} \twoheadrightarrow Q$ où N_P est la P -localisation (ordinaire) de N et $G_{(P)} = N_P \rtimes G/\tilde{N}$, le produit croisé correspondant à l'action induite de G sur N_P et $\tilde{N} = \{(em^{-1}, m) \mid m \in N\}$ ([4]).

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \twoheadrightarrow & G & \twoheadrightarrow & Q \\
 \downarrow e & & \downarrow e & & \parallel \\
 N_P & \twoheadrightarrow & G_{(P)} & \twoheadrightarrow & Q
 \end{array}$$

où e représente, ici et partout, la P -localisation.

0.3. Le cadre naturel pour étudier la localisation relative est la catégorie $\underline{U}$ des groupes au-dessus du groupe U , à noyau nilpotent. Toutefois, cette catégorie n'a pas assez de sous-objets pour convenir à nos besoins. Nous travaillons donc plutôt dans la catégorie $\underline{SU}$ des extensions $E : N \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow Q$, $Q \leq U$.

Un morphisme de E dans $E' = N' \twoheadrightarrow G' \twoheadrightarrow Q'$ est un couple (φ, ψ) , $\varphi : N \rightarrow N'$, $\psi : G \rightarrow G'$ tel que

$$\begin{array}{ccccc} N & \twoheadrightarrow & G & \twoheadrightarrow & U \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \parallel \\ N' & \twoheadrightarrow & G' & \twoheadrightarrow & U \end{array}$$

soit commutatif (ce qui entraîne naturellement $Q \leq Q'$). La P -localisation relative est un foncteur de $\underline{SU}$ dans $\underline{SU}$.

0.4. Si $\psi : N \rightarrow M$, N, M nilpotents, M P -local, ψ P -localise si et seulement si ψ est une P -bijection, c'est-à-dire $\text{Ker } \psi$ est un P' -groupe et pour tout $m \in M$, il existe un t dans P' avec $m^t \in \psi N$. Un correspondant partiel est un résultat de Hilton ([4], 2.3, 2.5):

THÉORÈME. Si l'action de conjugaison de G sur N est nilpotente, alors l'action de conjugaison de $G_{(P)}$ sur N_P est nilpotente et $e : G \rightarrow G_{(P)}$ est une P -bijection.

Dans cette situation, nous dirons que E est à action nilpotente; nous désignerons le résultat par 0.4.H.

Nous dirons que $E \rightarrow E'$ est un P -isomorphisme si $N \rightarrow N'$ est une P -bijection et $Q = Q'$. Si N' est P -local, c'est équivalent à dire que $E_P \xrightarrow{\sim} E'$.

Si on a simplement que $N \rightarrow N'$ est une P -bijection, nous dirons que

$E \rightarrow E'$ est un *pré-P-isomorphisme*. Cela veut dire que E_P est le pull-back de E'_P par rapport à l'inclusion de Q dans Q' . Pour prouver que $E_P \xrightarrow{\sim} E'$, nous procéderons ordinairement en quatre étapes:

Trouver un morphisme de $E \rightarrow E'$, prouver que N' est P -local, montrer que $E \rightarrow E'$ est un *pré-P-isomorphisme*, enfin, prouver que $Q = Q'$.

0.5. DESCRIPTION. Ce schéma de travail est d'abord illustré, dans la section 1, par une étude du pull-back et du produit dans SU . Nous y montrons que la P -localisation préserve les produits (1.2); qu'elle préserve les pull-backs à un *pré-P-isomorphisme* près (1.6) et tout à fait dans un cas particulier (1.7). Le Théorème 1.9 décrit le lien inverse entre $E_P \simeq E'_P$ et les (pré)- P -isomorphismes (comparer avec [5], 3.3).

Les résultats fondamentaux se trouvent dans la section 2. Nous montrons que si le groupe K agit sur E , il existe un prolongement unique de l'action de K sur E_P (2.2); si K est nilpotent et son action sur N nilpotente, alors il existe un prolongement unique de K_P sur E_P (2.3 et 2.6). Fixateurs et éléments fixes pour ces actions induites sont étudiés dans le reste de la section.

Dans la section 3, nous appliquons ce qui précède aux actions que l'on peut déduire de la conjugaison, en particulier aux normalisateurs (3.2) et aux centralisateurs (3.3 à 3.6). Lorsque N est abélien, nous pouvons associer à E une extension de Q -modules, qui devient une extension de K -modules si une action de K sur E est définie. A l'aide de cette correspondance, nous pouvons tirer des conclusions sur les fixateurs (4.2, 4.3), les orbites (4.4) et la suite descendante pour l'action, définie comme dans [6] (Théorème 4.6).

Enfin, nous terminons sur deux résultats sur les variétés de groupes, en relation avec la localisation relative.

0.6. NOTATIONS. Nous suivons les notations des travaux de P. Hilton cités en référence. Rappelons que P est un ensemble de premiers et que pour un entier

$t, t \in P'$ signifie qu'aucun facteur premier de t n'appartient à P .

Pour N nilpotent, $t_{P,N}$ est le sous-groupe (totalement invariant) des éléments de N dont l'ordre appartient à P' .

E est toujours $N \twoheadrightarrow G \xrightarrow{\pi} Q, Q \leq U$. De même, E_1 est $N_1 \twoheadrightarrow G_1 \twoheadrightarrow Q_1$, etc. Si X est une extension plus compliquée, ses trois termes sont désignés par NX, GX, QX . Si $H \leq G$, $E(H)$ est $N \cap H \twoheadrightarrow H \twoheadrightarrow H/N \cap H, H/N \cap H \leq Q$. Ordinairement, nous identifions $(E(H))_P$ comme un sous-objet de E_P ; en particulier, $H_{(P)}$ est regardé comme un sous-groupe de $G_{(P)}$.

1. PRODUITS ET PULL-BACKS

1.1. Dans $\underline{SU}$, nous avons un produit défini par:

$$E \times E' : N \times N' \twoheadrightarrow K \rightarrow U$$

où K est le pull-back de G et G' sur U .

1.2. THÉOREME. La P -localisation préserve le produit.

PREUVE. Remarquons que $Q(E \times E') = Q \cap Q'$. Donc

$$Q(E_P \times E'_P) = QE_P \cap QE'_P = Q(E \times E').$$

Par la propriété du pull-back, nous avons le diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} E \times E' : & N \times N' \twoheadrightarrow & G(E \times E') \twoheadrightarrow & Q(E \times E') \\ & \downarrow & \downarrow & \parallel \\ E_P \times E'_P : & N_P \times N'_P \twoheadrightarrow & G(E_P \times E'_P) \twoheadrightarrow & Q(E_P \times E'_P) \end{array}$$

La première flèche verticale est la P -localisation, donc $E_P \times E'_P = (E \times E')_P$. $\square$

1.3. Un diagramme de $\underline{U}$ n'a pas de pull-back en général. Par exemple, prenons

$$E_3 : A_3 \twoheadrightarrow S_3 \twoheadrightarrow Z/2 ; E_1 = E(\{1,s\}), E_2 = E(\{1,t\})$$

où s, t sont des transpositions distinctes. Le pull-back de E_1 et E_2 sur E_3 n'existe pas dans $Z/2$.

1.4. Dans $\underline{SU}$, considérons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & E_1 & \\ & \downarrow & \\ E_2 & \longrightarrow & E_3 \end{array}$$

et construisons $E \in \underline{SU}$ comme $K_N \twoheadrightarrow K \xrightarrow{\pi} U$ où K est le pull-back de G_1 et G_2 sur G_3 , $\pi : K \rightarrow G_i \rightarrow U$ ($i = 1, 2, 3$) et K_N est le pull-back de N_1 et N_2 sur N_3 .

On vérifie sans peine que E est le pull-back du diagramme dans $\underline{SU}$, que nous noterons $\wedge(E_1, E_2; E_3)$.

1.5. Le pull-back n'est pas préservé par la localisation. Si nous reprenons l'exemple 1.3, nous constatons que $\wedge(E_1, E_2; E_3) = 1 \rightarrow 1 \rightarrow Z/2$, sa 2-localisation est $1 \twoheadrightarrow 1 \rightarrow Z/2$ mais $\wedge((E_1)_2, (E_2)_2; (E_3)_2)$ est $1 \rightarrow Z/2 \twoheadrightarrow Z/2$.

Nous allons cependant voir que le pull-back est préservé à un pré-P-isomorphisme près et un cas où il est préservé.

1.6. THÉOREME. L'application canonique de $\wedge(E_1, E_2; E_3)$ dans $\wedge((E_1)_P, (E_2)_P; (E_3)_P)$ est un pré-P-isomorphisme.

PREUVE. Dans les groupes nilpotents, la P-localisation commute avec le pull-back ([5], 2.10). Il suffit dès lors de comparer les noyaux. $\square$

1.7. COROLLAIRE. Si U est un P-groupe et les E_i à action nilpotente ($i = 1, 2, 3$), alors $\wedge(E_1, E_2; E_3)_P = \wedge((E_1)_P, (E_2)_P; (E_3)_P)$.

PREUVE. Compte tenu de 1.6, il suffit de prouver que $Q\wedge(E_1, E_2; E_3) = Q\wedge((E_1)_P, (E_2)_P; (E_3)_P)$. Soit (x_1, x_2) un élément du pull-back de $(G_1)_{(P)}$, $(G_2)_{(P)}$ sur $(G_3)_{(P)}$. Pour un certain r dans P' , $(x_1^r, x_2^r) = (ey_1, ey_2)$ où $y_1 \in G_1$ et $y_2 \in G_2$ (car les e sont P-bijectifs par 0.4.H). Si z_1, z_2 sont

les images dans G_3 de y_1, y_2 respectivement, $ez_1 = ez_2$.

Par le lemme ci-dessous, $z_1^t = z_2^t$ pour un $t \in P'$. Donc (y_1^t, y_2^t) appartient au pull-back de G_1 et G_2 sur G_3 , $(x_1^{rt}, x_2^{rt}) = (ey_1^t, ey_2^t)$ et l'application de $G\Lambda(E_1, E_2; E_3)$ dans $G\Lambda((E_1)_P, (E_2)_P; (E_3)_P)$ est une P -bijection. Il en est donc de même de l'application de $Q\Lambda(E_1, E_2; E_3)$ dans $Q\Lambda((E_1)_P, (E_2)_P; (E_3)_P)$ et puisque U est un P -groupe, ces deux groupes sont égaux. $\square$

1.8. LEMME. Supposons E à action nilpotente. Soient $x, y \in G$. Si $ex = ey$, alors il existe un $t \in P'$ tel que $x^t = y^t$. Si $t_{P,N}$ est borné, t peut être choisi indépendamment de x et y .

PREUVE. Posons $\Delta_0 = t_{P,N}$, $\Delta_{i+1} = [\Delta_i, G]$. L'action de G sur $t_{P,N}$ est nilpotente, donc $\Delta_c = 1$ pour un certain c ([2], 2.5). Si $ex = ey$, $x = yu$ où $u \in t_{P,N}$ et est d'ordre, mettons t_0 . Nous allons démontrer que, pour tout i , il existe un T_i dans P' tel que

$$x^{T_i} = y^{T_i \delta_i} \text{ où } \delta_i \in \Delta_i.$$

Pour $i = 0$ le résultat est vrai avec $\delta_0 = u$ et $T_0 = 1$. Supposons-le vrai pour i ; donc $x^{T_i} = y^{T_i \delta_i}$ où $\delta_i \in \Delta_i$. Soit t_i l'ordre de δ_i et $T_{i+1} = T_i \cdot t_i$. Alors

$$x^{T_{i+1}} = (y^{T_i \delta_i})^{t_i} = y^{T_{i+1} \delta_i t_i \delta_{i+1}} = y^{T_{i+1} \delta_{i+1}}.$$

Par récurrence sur t_i , on vérifie que δ_{i+1} appartient à Δ_{i+1} . Puisque pour un c , $\Delta_c = 1$, la première partie du lemme en découle. Si $t_{P,N}$ est borné par T , on peut prendre $T_i = T^i$ qui est indépendant de x et y ainsi que le moment où on arrive à l'égalité $x^{T^i} = y^{T^i}$. $\square$

1.9. Mentionnons ce que l'on peut sauver du lien entre $(E_1)_P \simeq (E_2)_P$ et les P -isomorphismes, dont la version classique se trouve dans [5], 3.3.

THÉORÈME. Soient E_1, E_2 dans Q et supposons que $(E_1)_P \simeq (E_2)_P$.

Alors:

(i) il existe E_3, E_4 dans SQ et un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_4 & \xrightarrow{\varphi} & E_1 \\ \psi \downarrow & & \downarrow \tau \\ E_2 & \xrightarrow{\nu} & E_3 \end{array}$$

tels que φ et ψ sont des pré-P-isomorphismes et τ, ν des P-isomorphismes.

(ii) Si de plus, Q est un P-groupe et les E_i ($i = 1, 2, 3$) à action nilpotente, alors φ et ψ sont des P-isomorphismes.

PREUVE. (i) On prend $E_3 = (E_1)_P$. Les applications évidentes de E_1 et E_2 dans E_3 sont des P-isomorphismes. Pour E_4 , on prend $\wedge(E_1, E_2; E_3)$. Que φ et ψ soient des pré-P-isomorphismes résulte du cas ordinaire ([5], 3.3) appliqué aux N_i .

(ii) résulte de 1.7 en tenant compte que E_3 est aussi à action nilpotente (0.4.H). $\square$

1.10. REMARQUE. Si Q est fini et les N_i, G_i de type fini pour $i = 1, 2$, alors on peut choisir E_3 et E_4 de manière à ce que N_3, G_3, N_4 et G_4 soient aussi de type fini. Car on peut remplacer E_3 par $N_P \cap H \twoheadrightarrow H \twoheadrightarrow Q$ où $H = \text{sgr}\{eG_1, eG_2\}$. Puisque Q est fini, $N_P \cap H$ est d'indice fini dans H , qui est de type fini, donc $N_P \cap H$ est lui-même de type fini.

La propriété pour E_4 est claire puisque le pull-back d'un diagramme de groupes nilpotents de type fini est de type fini et que G_4 est une extension d'un groupe de type fini par un groupe fini.

2. ACTIONS

2.1. Soit K un groupe, E dans SU. Par une action de K sur E , nous entendons un homomorphisme de K dans $\text{Aut } E$. Donc une action de K sur E induit des actions compatibles de K sur N, G, Q , celle sur Q étant triviale.

L'image de x dans G par l'action d'un élément k de K sera notée x^k . Pour tout x dans G et tout k dans K , $x^k x^{-1} \in N$. Nous dirons qu'une action de K sur E est *nilpotente* si sa restriction à N est nilpotente.

2.2. THÉORÈME. Toute action ω de K sur E peut être étendue de manière unique à une action ε_p^ω de K sur E_p . Si ω est nilpotente, alors ε_p^ω est nilpotente.

PREUVE. On sait que l'action de K sur N peut être étendue de manière unique à N_p ([2]). Nous définissons une action ε_p^ω de K sur E_p par

$$((x, y) \cdot \tilde{N})^k = (x^k, y^k) \cdot \tilde{N} \quad (k \in K, x \in N_p, y \in G).$$

Les vérifications sont routinières.

Il est clair que cette action prolonge l'action de K sur N_p ; donc si ω est nilpotente, ε_p^ω l'est aussi ([2], 2.9). D'autre part, si une action de K sur E_p prolonge ω , elle agit sur N_p et eG de la même façon que ε_p^ω , donc lui est égale puisque N_p et G engendrent $G_{(p)}$. $\square$

2.3. THÉORÈME. Soit K un groupe nilpotent, ω une action nilpotente de K sur E . Alors il existe un prolongement nilpotent λ_p^ω de K_p sur E_p . Si H est un K -sous-groupe de G , alors $H_{(p)}$ est un K_p -sous-groupe de $G_{(p)}$.

PREUVE. L'action de K sur N a un prolongement unique et nilpotent de K_p sur N_p ([2], 3.2). Considérons $E]K : N]K \rightarrow G]K \twoheadrightarrow Q$ où $G]K \twoheadrightarrow Q$ est défini par $(g, k) \mapsto \pi g$. C'est bien un homomorphisme puisque $\pi g^k = \pi g$ pour tout $g \in G$, $k \in K$. $N]K$ est nilpotent ([2], 2.7) et $(N]K)_p = N_p]K_p$

$$(E]K)_p : N_p]K_p \twoheadrightarrow (G]K)_{(p)} \twoheadrightarrow Q \text{ où } (G]K)_{(p)} = (N]K)_p] (G]K) / \widetilde{N]K},$$

le crochet intermédiaire étant le produit semi-direct pour l'action induite par la conjugaison de $N]K$ par $G]K$.

Par calcul, on vérifie que:

- 1) $K_p \rightarrow (G]K)_{(p)} : k \mapsto ((1,k);(1,1)) \cdot \widetilde{N]K}$ est un monomorphisme;
 - 2) $G_{(p)} \rightarrow (G]K)_{(p)} : (n,g)\widetilde{N} \mapsto ((n,1);(g,1)) \cdot \widetilde{N]K}$ est un monomorphisme;
 - 3) après identification de K_p et $G_{(p)}$ avec leurs images,
- $(G]K)_{(p)} = G_{(p)} \cdot K_p$;
- 4) $K_p \cap G_{(p)} = 1$;
 - 5) $G_{(p)} \triangleleft (G]K)_{(p)}$ de sorte que $(G]K)_{(p)} = G_{(p)}] K_p$ pour l'action de conjugaison.

Nous obtenons ainsi une action de K_p sur E_p , que nous appelons $\epsilon_p \omega$. Sa restriction à N_p est l'action de K_p sur N_p induite par l'action de K sur N donc est nilpotente.

Enfin, si H est un K -sous-groupe de G , l'action de K_p sur $H_{(p)}$ est décrite à partir de $H]K$, que l'on peut injecter dans $G]K$ et $H_{(p)}$, vu comme sous-groupe de $G_{(p)}$, est un K_p -sous-groupe. $\square$

2.4. Si $\bar{\omega}$ est une action de K_p sur E_p , nous notons $\rho_p \bar{\omega}$ l'action de K sur E_p obtenue par restriction. Notons $A_{\vee}(X,Y)$ l'ensemble des actions nilpotentes du groupe X sur Y dans $\underline{SU}$.

Nous avons le diagramme pour K nilpotent:

$$\begin{array}{ccc}
 A_{\vee}(K,E) & \xrightarrow{\epsilon_p} & A_{\vee}(K,E_p) \\
 \lambda_p \searrow & & \nearrow \rho_p \\
 & A_{\vee}(K_p,E_p) &
 \end{array}$$

2.5. THÉOREME.

- (i) $\epsilon_p = \rho_p \lambda_p$.
- (ii) ρ_p est bijectif.
- (iii) $\Pi \epsilon_p : A_{\vee}(K,E) \rightarrow \Pi_p A_{\vee}(K,E_p)$ et $\Pi \lambda_p : A_{\vee}(K,E) \rightarrow \Pi_p A_{\vee}(K_p,E_p)$,

p premier, sont injectives.

PREUVE. (i) Pour $k \in K$, $\rho_p \lambda_p(\omega)[k]$ est la conjugaison par

$((1,ek);(1,1)) \cdot \widetilde{N]K}$. Or $((1,ek);(1,1)) = ((1,1);(1,k)) \cdot ((1,ek);(1,k^{-1}))$ où $((1,ek);(1,k^{-1})) \in \widetilde{N]K}$. Donc $\rho_p \lambda_p(\omega)[k]$ est aussi la conjugaison par $((1,1);(1,k)) \cdot \widetilde{N]K}$ et l'image de $((n,1);(g,1)) \cdot \widetilde{N]K}$ par cette conjugaison est précisément $((n^k,1);(g^k,1)) \cdot \widetilde{N]K}$, c'est-à-dire, le résultat de l'action ε_p .

(ii) Si ω est une action nilpotente de K sur E_p , nous pouvons construire $\lambda_p^! \omega$ comme dans 2.3. Par (i), $\rho_p \lambda_p^!$ est l'identité. D'autre part, si nous partons d'une action $\bar{\omega}$ de K_p sur E_p , ρ_p nous fournit le diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} N_p]K & \xrightarrow{\quad} & G_{(p)}]K & \xrightarrow{\quad} & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ N_p]K_p & \xrightarrow{\quad} & G_{(p)}]K_p & \xrightarrow{\quad} & Q \end{array}$$

La deuxième ligne est la P -localisation de la première, donc $\lambda_p^! \rho_p \bar{\omega} = \bar{\omega}$ et ρ_p est bijectif.

(iii) Soient $\omega_1, \omega_2 \in A_v(K, E)$. Il s'agit de prouver que si, pour chaque premier p et tout $k \in K$, $\varepsilon_p \omega_1(k)[e_p x] = \varepsilon_p \omega_2(k)[e_p x]$ ($x \in G$), alors $\omega_1(k)[x] = \omega_2(k)[x]$. Mais $\varepsilon_p \omega_1(k)[e_p x] = \varepsilon_p \omega_2(k)[e_p x]$ entraîne que $\omega_1(k)[x] \cdot (\omega_2(k)[x])^{-1}$ appartient au noyau de e_p , c'est-à-dire à $t_{p,N}$. Puisque $\bigcap_p t_{p,N} = 1$, le résultat en découle. (i) et l'injectivité de $\Pi \varepsilon_p$ entraînent l'injectivité de $\Pi \lambda_p$. $\square$

2.6. COROLLAIRE. Si $\omega \in A_v(K, E)$, $\lambda_p \omega$ est la seule action de K_p sur E_p qui prolonge ω .

PREUVE. Unicité de $\varepsilon_p \omega$ (2.2) et injectivité de ρ_p (2.5.ii).

2.7. Nous allons maintenant étudier le comportement de certains sous-objets liés à une action, sous l'effet d'une P -localisation. Cette étude sera poursuivie dans la section 4, dans un cas particulier. Si K agit sur G , nous notons $K(X)$ ($X \subset G$) le *fixateur* de X , c'est-à-dire le sous-groupe de K formé des éléments k tels que $x^k = x$ pour $x \in X$; G^K sera le sous-groupe de G

formé par les éléments fixés par K . Nous écrirons pour simplifier E^K au lieu de $E(G^K)$.

2.8. THEOREME. Supposons N sans P' -torsion et $X \subset G$, K nilpotent et l'action de K sur E nilpotente. Alors $K(X) = e^{-1}K_p(eX)$ et $K(X) \rightarrow K_p(eX)$ est une P -bijection. De même, $K(G) = e^{-1}K_p(G_{(P)})$ et $K(G) \rightarrow K_p(G_{(P)})$ est une P -bijection.

NOTE. Nous ne savons pas si en général $K_p(eX)$ est P -local. C'est vrai, en tout cas, si N est abélien ou l'action sur N triviale (ci-dessous 4.2, 4.3).

PREUVE. Il est clair que $e : K \rightarrow K_p$ envoie $K(X)$ dans $K_p(eX)$, donc $K(X) \leq e^{-1}K_p(eX)$. Si $k \in e^{-1}K_p(eX)$, alors $(ex)^{ek} = ex$ pour tout $x \in X$ ou encore $e(x^k) = ex$. Puisque N est sans P' -torsion, e est injectif et $x^k = x$ pour tout $x \in X$. Pour tout $S \leq K_p$, $e^{-1}S \xrightarrow{e} S$ est une P -bijection, donc $K(X) \rightarrow K_p(eX)$ est une P -bijection. Montrons que $K_p(G_{(P)}) = K_p(eG)$. Si $k \in K_p(eG)$, k fixe eN . Pour tout $\bar{n} \in N_p$, il existe un $t \in P'$ tel que $\bar{n}^t = en$; donc $(\bar{n}^t)^k = (\bar{n}^k)^t = \bar{n}^t$. Puisque N_p est P -local, $\bar{n}^k = \bar{n}$. Puisque eG et N_p engendrent $G_{(P)}$, k fixe $G_{(P)}$.

De cette remarque et la première partie, la deuxième partie du résultat suit immédiatement. $\square$

2.9. COROLLAIRE. (i) Si K est un P' -groupe nilpotent et N sans P' -torsion, alors toute action nilpotente de K sur E est triviale. (ii) Si K est un sous-groupe nilpotent de G tel que $[G, K] \leq N$, N sans P' -torsion et l'action de conjugaison de K sur N nilpotente, alors $K/ZG \cap K$ est sans P' -torsion. En particulier, si K est un P' -groupe, il est central.

PREUVE. (i) $K_p = 1$ donc $e^{-1}K_p(G_{(P)}) = K$. Par 2.7, $K(X) = K$ donc l'action est triviale.

(ii) L'action de $K/ZG \cap K$ sur G , induite par la conjugaison, est fidèle. Si $\bar{k} \in K/ZG \cap K$ est d'ordre t , $t \in P'$, $e\bar{k} = 1$ et

$\bar{k} \in (K/ZG \cap K)(G)$ par 2.7, donc $\bar{k} = 1$. $\square$

2.10. THÉOREME. Si K est de type fini, alors e induit un pré- P -isomorphisme de E^K dans E_P^K .

PREUVE. e envoie G^K dans $G_{(P)}^K$. D'autre part, $N^K = N \cap G^K$ et $N_P^K = N_P \cap G_{(P)}^K$. On sait que, K étant de type fini, $N_P^K = (N^K)_P$ ([2], 4.1.i), ce qui est exactement la propriété demandée. $\square$

2.11. En général, $(E^K)_P \not\subset E_P^K$. Par exemple, prenons $E : Z/2 \rightarrow Z/4 \rightarrow Z/2$ et $K = Z/2$ agissant par changement de signe.

$$E_3 = 0 \rightarrow Z/2 \rightarrow Z/2 \quad \text{et} \quad E_3^{Z/2} = 0 \rightarrow Z/2 \rightarrow Z/2$$

mais

$$E^{Z/2} = Z/2 \rightarrow Z/2 \rightarrow Z/2 \quad \text{et} \quad (E^{Z/2})_3 = 0 \rightarrow 0 \rightarrow Z/2.$$

Cependant, nous avons $(E^K)_P = E_P^K$ dans un cas particulier:

2.12. COROLLAIRE. Si K est de type fini, Q un P -groupe, N à P' -torsion bornée et E à action nilpotente, alors $(E^K)_P = E_P^K$.

PREUVE. $G \rightarrow G_{(P)}$ est une P -bijection (0.4.H). Si $x \in G_{(P)}^K$, il existe un $r \in P'$ tel que $x^r = ey$ et $ey^k = ey$ pour tout k . Par 1.8, $(y^k)^t = y^t$ pour t indépendant de k et dans P' , et $y^t \in G^k$. Donc $G^K \rightarrow G_{(P)}^K$ est P -bijective. En utilisant 2.10, on conclut comme dans 1.7. $\square$

2.13. THÉOREME. Si K est nilpotent et l'action de K sur E nilpotente, alors $E_P^K = E_P^{K_P}$.

PREUVE. Naturellement $G_{(P)}^{K_P} \leq G_{(P)}^K$. Il faut donc prouver que si $u \in G_{(P)}$ est fixe pour tout k dans K , il est fixe pour tout $\bar{k}$ dans K_P . G agit, via $G_{(P)}$, sur $N_P]K_P$. Pour g choisi dans G , la fonction $F_g : N_P]K_P \rightarrow N_P]K_P$ définie par $m \mapsto m^g m^{-1}$ est une dérivation (pour l'action de conjugaison). Restreinte à K_P , F_g donne une dérivation ∂_g de K_P dans N_P .

Si n est choisi dans N_P , la fonction $k \mapsto n^{-1} n^k$ est une dérivation

d_n de K_p dans N_p .

Soit $u = ((n,1);(g,1)) \cdot \widetilde{N}K$ un élément de $G_{(p)}$. Par calcul, on vérifie que:

- 1) u est fixe pour l'action de K_p si et seulement si $\partial_g = d_n$.
- 2) u est fixe pour l'action de K si et seulement si la restriction de ∂_g à K = la restriction de d_n à K .

Mais ces restrictions sont des dérivations d'un groupe nilpotent K dans un groupe nilpotent P -local N_p . Par [3], 2.2, le prolongement d'une telle dérivation à K_p est unique donc $\partial_g = d_n$ sur K entraîne $\partial_g = d_n$ sur K_p . $\square$

3. ACTIONS INTERNES

3.1. Nous allons appliquer et étendre les résultats de la section 2 aux actions induites par la conjugaison dans G et $G_{(p)}$. Dans ce qui suit, T et H sont des sous-groupes de G , T est dans le normalisateur $N_G H$ de H dans G et agit sur H par conjugaison. Nous devons "contourner" la non-nilpotence de T . Nous commençons par montrer que $T_{(p)}$ est dans $N_{G_{(p)}} H_{(p)}$ (3.2) — montrant au passage que la P -localisation d'un sous-groupe normal est normal — ce qui permet de considérer l'action de conjugaison de $T_{(p)}$ sur $H_{(p)}$. Nous vérifions alors que $E(H_{(p)}^{T_{(p)}}) = E(H_{(p)}^T)$ (3.3). Nous n'avons plus alors qu'à appliquer la section 2 pour obtenir le Corollaire 3.4. Notant que G^T est le centralisateur de T dans G et $G^G = ZG$, nous tirons les conséquences pour le centre (3.5), constatant que la situation idyllique où $E(ZG)_p = E(ZG_{(p)})$ n'est pas toujours réalisée (3.6).

3.2. THÉOREME. $T_{(p)} \leq N_{G_{(p)}} H_{(p)}$. En particulier, si $H \triangleleft G$, alors $H_{(p)} \triangleleft G_{(p)}$.

PREUVE. Nous devons démontrer que

- 1) $x = (m,t) \cdot (n,h) \cdot (m^{-t^{-1}}, t^{-1}) \cdot \tilde{N} \in H_{(p)}$ pour tous $m \in (N \cap T)_p$, $t \in T$, $n \in (N \cap H)_p$ et $h \in H$.
- 2) $x = (mn t_m^{-1} \cdot m(t^{-1} h t) m^{-1} \cdot t^{-1} h^{-1} t, 1) \cdot (1, t h t^{-1}) \cdot \tilde{N}$.

La conjugaison par m vient de l'action induite de $(N \cap T)_P$ sur $G_{(P)}$ suivant 2.3. En effet, posons $K = N \cap T$. K est nilpotent, il agit par conjugaison sur E au sens de 2.1 et l'action sur N est nilpotente.

Puisqu'il n'y a qu'un prolongement possible (2.6), l'action induite en 2.3 est la conjugaison. Puisque H est un T -groupe, $(N \cap H)_P$ est un T -groupe et $H_{(P)}$ un $(N \cap T)_P$ -groupe par 2.3, donc $x \in H_{(P)}$. La deuxième partie est le cas où $T = G$. $\square$

3.3. THÉOREME. $E(H_{(P)}^T) = E(H_{(P)}^{T(P)})$.

PREUVE. Naturellement, $H_{(P)}^{T(P)} \leq H_{(P)}^T$. Soit $x \in H_{(P)}^T$, x est donc fixe, en particulier, pour l'action de $T \cap N$. Par 2.13, x est donc fixe pour l'action de $(T \cap N)_P$ sur $H_{(P)}$. Mais il est fixe par hypothèse pour tout élément de eT . Comme $T_{(P)}$ est le produit de $(T \cap N)_P$ et eT , x est fixe pour l'action de tout élément de $T_{(P)}$. $\square$

3.4. COROLLAIRE. Si T est de type fini, la localisation induit un pré- P -isomorphisme de $E(H^T)$ dans $E(H_{(P)}^{T(P)})$. Si de plus E est à action nilpotente, Q un P -groupe et $t_{P,N}$ borné, alors $E(H^T)_P = E(H_{(P)}^{T(P)})$.

PREUVE. Conséquences immédiates de 3.3 avec 2.10 et 2.12 respectivement. $\square$

3.5. COROLLAIRE. Soit G de type fini. Alors:

- (i) la localisation induit un pré- P -isomorphisme de $E(ZG)$ dans $E(ZG_{(P)})$;
- (ii) si E est à action nilpotente, Q à P -torsion et $t_{P,N}$ borné, alors $ZG_{(P)} = (ZG)_{(P)} = (ZG)_P$.

PREUVE. (i) et une partie de (ii) sont simplement 3.5 pour $H = T = G$. $ZG = G^G$ est abélien, donc $(ZG)_P$ a un sens. L'image de ZG dans Q est aussi abélienne et P -locale, puisque Q est un P -groupe. $(ZG)_P = (ZG)_{(P)}$ résulte alors de l'exactitude de la P -localisation ordinaire. $\square$

3.6. Voici deux exemples qui montrent qu'en général $E(ZG)_P \neq E(ZG_{(P)})$:

a) $E : A_3 \twoheadrightarrow S_3 \twoheadrightarrow Z/2$. $(E(ZS_3))_2 = 1 \rightarrow 1 \rightarrow Z/2$ mais $E(Z(S_3)_{(2)}) = 1 \rightarrow Z/2 \rightarrow Z/2$.

b) Soient p, q deux premiers distincts, G un q -groupe fini de classe 2. $E : ZG \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow G/ZG$ où G/ZG est abélien et différent de (1) . Alors $(E(ZG))_p = 1 \rightarrow 1 \rightarrow G/ZG$ mais $E(ZG_{(p)}) = 1 \rightarrow G/ZG \twoheadrightarrow G/ZG$.

4. LE CAS OÙ N EST ABÉLIEN

4.1. Dans cette section, N est abélien (sauf dans 4.3). Grâce à une construction classique, dont tous les détails peuvent être trouvés dans [1], nous pouvons associer à E une extension ME de Q -modules et ramener certaines questions sur la P -localisation relative à la P -localisation ordinaire sur ME .

D'une façon précise, nous considérerons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 E : & N & \xrightarrow{\quad} & G & \twoheadrightarrow & Q \\
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 ME : & IN \cdot ZG/IN \cdot IG & \twoheadrightarrow & MG = IG/IN \cdot IG & \twoheadrightarrow & IQ
 \end{array} \quad (*)$$

où IX est l'idéal d'augmentation de X et ∂ l'application induite par $x \mapsto x - 1$. On sait que le premier ∂ est un isomorphisme de Q -modules et les deux autres, des injections ([1]).

Réciproquement, si $N \twoheadrightarrow M \xrightarrow{\tilde{\pi}} IQ$ est une suite exacte de Q -modules, on peut lui associer une suite exacte de groupes $N \twoheadrightarrow G(M) \twoheadrightarrow Q$ où $G(M) = \{m \in M \mid \tilde{\pi}m = q - 1 \text{ pour un } q \in Q\}$; la loi est définie par $x \cdot y = x + (\tilde{\pi}x + 1) \cdot y$ ([1], §3) .

On vérifie dans [1] que $M(G(M)) = M$ et $GM(G) = G$. On établit ainsi une équivalence entre la catégorie des groupes au-dessus de Q , à noyau abélien, et la catégorie des Q -modules au-dessus de IQ ; les objets correspondants entrent dans un diagramme du type (*) où les noyaux peuvent être identifiés.

Si K agit sur E , on peut définir une action de K sur ME à partir de l'action sur ZG définie par $(\sum z_i g_i)^k = \sum z_i g_i^k$. Il est routinier de vérifier que cela induit bien une action sur ME , compatible avec les structures de Q -modules, que le premier ∂ de (*) devient un isomorphisme de K -modules et que l'action sur IQ est triviale. En particulier, si l'action de K sur E est nilpotente, MG est un K -module nilpotent, comme extension de deux K -modules nilpotents ([5], 4.3).

Plaçons-nous dans ce cas et répétons la construction pour E_p , avec Z_p comme coefficients. On obtient une extension ME_p dont les trois termes sont P -locaux. L'application de MG dans $MG_{(P)}$ induite par $g - 1 \mapsto eg - 1$ détermine la P -localisation $N \rightarrow N_p$ à gauche et l'injection canonique de IQ dans $I_p Q$ à droite, qui est aussi la P -localisation. Donc $MG \rightarrow MG_{(P)}$ P -localise aussi ([5], 2.5). L'action de K_p sur $MG_{(P)}$ est compatible avec l'action de K sur MG . Réciproquement, si K agit sur $N \rightarrow M \rightarrow IQ$, de telle sorte que l'action sur IQ soit triviale, alors K agit sur $G(M)$ et l'action induite sur M est l'action initiale.

4.2. THÉOREME. Soit N abélien, K nilpotent agissant sur E de manière nilpotente. Alors $K_p(eX)$ est P -local pour tout $X \subset G$. De plus:

- 1) si N est sans P' -torsion, $K(X)_p = K_p(eX)$ et $(KG)_p = K_p(G_{(P)})$;
- 2) si X est fini, $K(X)_p = K_p(eX)$.

PREUVE. Par la définition de l'action sur ME_p et l'injectivité de ∂ , on a:

$$K_p(eX) = \bigcap_{x \in X} K_p(ex) = \bigcap_{x \in X} K_p(x) .$$

Mais chaque $K_p(ex)$ est P -local par [3], 1.1, donc $K_p(eX)$ est P -local. Si N est sans P' -torsion, $K(X)_p = K_p(eX)$ par 2.8 et $K(G)_p = K_p(eG) = K_p(G_{(P)})$ aussi par 2.8.

Supposons maintenant X fini. Comme la P -localisation (dans les groupes nilpotents) commute avec les intersections finies ([5], 2.10), on peut prendre pour X un seul élément x . A la P -localisation e correspond la P -localisa-

tion $\tilde{e} : ME \rightarrow ME_p$; on a

$$K_p(eX) = K_p(\partial ex) = K_p(\tilde{e}\partial x) = K(\partial x)_p$$

par [3], 1.1 et le dernier terme égale $K(x)_p$, d'où le résultat. $\square$

4.3. Voici un résultat analogue, mais qui n'utilise par l'hypothèse que N est abélien. La preuve s'inspire de [3].

THÉORÈME. Soit K nilpotent avec une action sur E , triviale sur N . Alors pour tout X fini inclus dans G , $K_p(eX) = K(X)_p$.

PREUVE. De nouveau, on peut se limiter à un seul élément x . Considérons l'application δ_x de K dans N définie par

$$\delta_x(k) = x \cdot (x^{-1})^k$$

(comparer avec [3], 1.3). δ_x est un homomorphisme car

$$\delta(k, k') = x((x^{-1})^{k'})^k = x(x^{-1})^k \cdot x^k((x^{-1})^{k'})^k = \delta_x k \cdot (\delta_x k')^k$$

mais $(\delta_x k')^k = \delta_x k'$ puisque l'action sur N est triviale. $\text{Ker } \delta_x = K(x)$.

En répétant la construction pour $G_{(p)}$ et ex , on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} K(x) & \xrightarrow{\quad} & K & \xrightarrow{\delta_x} & N \\ \downarrow & & \downarrow e & & \downarrow e \\ K_p(ex) & \xrightarrow{\quad} & K_p & \xrightarrow{\delta_{ex}} & N_p \end{array}$$

La deuxième et la troisième flèches P -localisent donc la première aussi ([5], 2.5) et $K_p(ex) = K(x)_p$. $\square$

4.4. Notons $\overline{x}$ l'orbite de x sous l'action de K ou K_p suivant que x est dans G ou $G_{(p)}$.

THÉORÈME. Si N est abélien, K nilpotent et l'action sur E nilpo-

tente, $x, y \in G$ alors $x \in \overline{y}$ si et seulement si $e_p x \in \overline{e_p y}$ pour tout premier p .

PREUVE. Il suffit de noter que $x \in \overline{y}$ si et seulement si $\partial x \in \overline{\partial y}$ et que $e_p x \in \overline{e_p y}$ si et seulement si $\partial e_p x = e_p \partial x \in \overline{e_p \partial y}$. Par [3], 3.1, $\partial x \in \overline{\partial y}$ si et seulement si, pour tout p premier, $\tilde{e}_p \partial x \in \overline{\tilde{e}_p \partial y}$. $\square$

4.5. Suivant Hilton et Stambach ([6]), nous définissons $\Delta_K^i G$ inductivement par

$$\Delta_K^1 G = G, \quad \Delta_K^{i+1} G = \text{sgr}\{g^k g^{-1} \mid g \in \Delta_K^i G, k \in K\}, \quad i \geq 1.$$

La K -longueur de G ($\lg_K G$) est n si $\Delta_K^n G \neq 1$ et $\Delta_K^{n+1} G = 1$. Dans le cas d'un K -module, la longueur est la classe de nilpotence de l'action. En particulier, si l'action de K sur E est nilpotente, $\lg_K G$ est finie.

Dans le théorème qui suit, nous identifions les deux copies de N (comme K -module) que l'on rencontre dans G et MG .

4.6. THEOREME. Si N est abélien, K nilpotent et l'action sur E nilpotente, alors

- (i) $\Delta_K^i G = \Delta_K^i MG$ pour $i > 1$, donc $\lg_K G = \lg_K MG$.
- (ii) $e : \Delta_K^i G \rightarrow \Delta_{K_p}^i G(p)$ P -localise pour tout i , donc $\lg_{K_p} G(p) \leq \lg_K G$.

PREUVE. (i) Il suffit de prouver que $\Delta_K^2 G = \Delta_K^2(MG)$ puisqu'il s'agit de K -sous-groupes de N . $\Delta_{KG}^2 \triangleleft G$; soit $H = G/\Delta_K^2 G$; H est un K -groupe trivial.

MH est un K -module trivial et $MG \rightarrow MH$ a pour noyau $\Delta_K^2 G$. Donc $\Delta_K^2 MG \leq \Delta_K^2 G$. Réciproquement, soit $M = MG/\Delta_K^2(MG)$. Puisque l'action de K sur Q est triviale, $\Delta_K^2(MG)$ est un Q -module et M aussi. Comme K -module, M est trivial.

A la suite $N/\Delta_K^2(MG) \twoheadrightarrow H \twoheadrightarrow IQ$, on peut associer la suite $N/\Delta_K^2(MG) \twoheadrightarrow G(M) \twoheadrightarrow Q$ (voir 4.1). A l'action (triviale) de K sur M correspond l'action triviale de K sur $G(M)$.

Le noyau de $G \rightarrow G(M)$ est $\Delta_K^2(MG)$ et puisque $G(M)$ est trivial comme

K-groupe, $\Delta_K^2(MG) \geq \Delta_K^2 G$.

(ii) On sait que $MG_{(P)} = (MG)_P$ (4.1). Par [6], 5.2 et 5.7.i, $\Delta_K^1(MG) \rightarrow \Delta_K^1(MG_{(P)})$ P-localise pour tout $i \geq 1$. Le résultat pour $i > 1$ vient alors de (i). Pour $i = 1$, il est trivial.

5. APPLICATION AUX VARIÉTÉS

5.1. Une variété de groupes est une classe de groupes fermée pour les quotients, sous-groupes et produits directs quelconques. A tout groupe G et toute variété $\underline{V}$ est associé un sous-groupe normal VG de G (appelé le sous-groupe verbal) tel que $G/VG \in \underline{V}$ et $G \in \underline{V}$ si et seulement si $VG = 1$.

Dans le cadre d'une variété $\underline{V}$, la propriété importante d'une action de X sur Y est que Y soit un VX -groupe, c'est-à-dire que $V(Y)X \subset X$. Dans ce cas, $V(Y)X = VX$ (voir [7], p. 108).

Nous notons $\underline{P}(c_1, \dots, c_r)$ la variété de tous les groupes polynilpotents de rang $\leq (c_1, \dots, c_r)$ caractérisée par $PG = \Gamma_{c_r}(\Gamma_{c_{r-1}}(\dots \Gamma_{c_1} G \dots))$. Les variétés des groupes nilpotents de classe $\leq c$ et les variétés des groupes résolubles de longueur $\leq t$ sont des cas particuliers de $\underline{P}(c_1, c_2, \dots, c_r)$.

5.2. THÉOREME. Supposons que $\underline{V} = \underline{P}(c_1, \dots, c_r)$ ou que N et G sont de type fini et $P \neq \emptyset$. Si E est à action nilpotente, alors $G \in \underline{V}$ entraîne $G_{(P)} \in \underline{V}$.

PREUVE. Si $G \in \underline{V}$, N est un G -groupe ([7], 1.10). Nous avons démontré dans [8], 3.4 que dans les hypothèses indiquées (plus générales, en fait), N_P est alors un G -groupe. Donc $V(N_P]G) = VG = 1$ et $N_P]G \in \underline{V}$. Mais alors $G_{(P)}$, qui est un quotient de $N_P]G$, appartient à $\underline{V}$. $\square$

5.3. THÉOREME. Supposons que K est nilpotent et que son action sur E est nilpotente. Nous reprenons les hypothèses de 5.2 en supposant de plus que si $\underline{V}$ n'est pas un $\underline{P}(c_1, \dots, c_2)$, K est de type fini: alors si G est un VK -groupe, $G_{(P)}$ est un VK_P -groupe.

PREUVE. Supposons d'abord que $K \in \underline{V}$. Alors $G \wr K \in \underline{V}$; l'action de $G \wr K$ sur $N \wr K$ est nilpotente et si nous construisons $(G \wr K)_{(P)}$ à partir de $N \wr K \rightarrow G \wr K \twoheadrightarrow Q$, $(G \wr K)_{(P)} \in \underline{V}$ par 5.2; $(G \wr K)_{(P)} = G_{(P)} \wr K_P$ (preuve de 2.3) donc $G_{(P)}$ est un K_P -groupe. Si $K \notin \underline{V}$, on le remplace par K/VK . (On sait que $VK \subset K(G)$ et que G est un (K/VK) -groupe ([7], 1.13) .)

L'action de K_P sur $G_{(P)}$ est le relèvement de l'action de $(K/VK)_P$ sur $G_{(P)}$ et on sait alors que $G_{(P)}$ est un $\underline{VK}_P$ -groupe si $G_{(P)}$ est un $\underline{V}(K/VK)_P$ -groupe ([7], 1.11). Or $G_{(P)}$ est un $\underline{V}(K/VK)_P$ -groupe par la première partie de la preuve. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CROWELL, R.H., *Corresponding group and module sequences*, Nagoya Math. J. 19 (1961), 27-40.
- [2] HILTON, P., *Nilpotent actions on nilpotent groups*, SV-Lecture Notes 450 (1975), 174-196.
- [3] HILTON, P., *On orbit sets for group actions and localization*, SV-Lecture Notes 673 (1978), 185-201.
- [4] HILTON, P., *Relative nilpotent groups*, à paraître Proc. Summer Conf. in Cat. Alg. and Top., Carleton Univ.
- [5] HILTON, P., MISLIN, G. and ROITBERG, J., *Localization of nilpotent groups and spaces*, Math. Studies 15, North-Holland (1975).
- [6] HILTON, P., STAMMBACH, U., *On group actions on groups and associated series*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80 (1976), 43-55.
- [7] LEEDHAM-GREEN, C.R. and MCKAY, S., *Baer-invariants, isologism, varietal laws and homology*, Acta Math. 137 (1976), 99-150.
- [8] LEMAIRE, C., *R-complétions et actions de groupe*, CR Acad. Sc. Canada, III (1981), no 3, 123-128.

Département de mathématiques
Université Laval
Québec, Québec

Manuscrit reçu le 6 mai 1981.