

ÉQUATIONS DE COÏNCIDENCE SUR DES CÔNES ET BRANCHES CONTINUES DE VECTEURS PROPRES

G. Isac

§1. Nous considérons l'équation de coïncidence, $f(x) = \lambda g(x)$ où $x \in K$, K étant un cône convexe dans un espace de Fréchet et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Les équations de coïncidence dans des espaces de Banach ont été étudiées par la technique du degré de coïncidence par J. Mawhin [15], R.E. Gaines et J. Mawhin [7], M. Mininni [16], par la technique du degré topologique par W.V. Petryshyn [18], [19], P.M. Fitzpatrick et W.V. Petryshyn [5], [6]. Des techniques différentes dans l'étude des équations de coïncidence ont été utilisées par S. Fučík, J. Nečas, J. Souček et V. Souček [25], par M. Schechter, J. Shapiro et M. Snow [23], par F.E. Browder [2] et E.T. Dean et P.L. Chambre [4].

Nous remarquons aussi l'ouvrage [13].

Dans cet ouvrage, nous n'utilisons pas le degré de coïncidence ou topologique, mais la présence d'une branche continue de vecteurs propres pour le couple (f, g) sur le cône K et nous étudions l'équation $f(x) = \lambda g(x)$ sans faire de transformations sur f ou sur g , ce qui est très important pour certains problèmes pratiques [21].

Nous remarquons aussi que nos résultats nous donnent quelques nouveaux théorèmes de point fixe sur des ensembles non convexes.

§2. Nous utilisons dans cet ouvrage les cônes localement bornés que nous avons utilisés aussi dans les ouvrages [8], [9].

Si $E(\tau)$ est un espace localement convexe, nous supposons que la topologie τ est définie par une famille suffisante de semi-normes $\{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ [8].

Soit $K \subset E$ un cône convexe, c'est-à-dire, $K + K \subset K$ et $(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+)(\lambda K \subset K)$; nous disons que le cône K est localement borné [8] si et seulement s'il existe un voisinage U de zéro tel que $U \cap K$ est borné.

La notion d'ensemble séparant définie dans l'ouvrage [3] nous donne le résultat suivant. Le cône convexe $K \subset E$ est localement borné si et seulement s'il existe un ensemble $A \subset K$ séparant.

Un cône convexe bien basé [8], [9], [10] est localement borné et donc un cône localement compact ou faiblement localement compact est localement borné [8].

Les cônes convexes semi-complets au sens de Mokobodzki [8] sous certaines hypothèses sont localement bornés [8], [9]. Nous remarquons aussi que chaque cône convexe dans un espace normé est localement borné.

Dans cet ouvrage nous utilisons la caractérisation suivante d'un cône localement borné [8].

Le cône convexe $K \subset E$ est localement borné si et seulement s'il existe une semi-norme p continue et uniformément positive sur K , c'est-à-dire:
 $(\forall \alpha \in A)(\gamma_\alpha > 0)(\forall x \in K)(\gamma_\alpha |x|_\alpha \leq p(x))$.

§3. Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe et C un cône convexe abstrait muni d'une structure de Riesz, c'est-à-dire on suppose qu'il existe sur C une structure d'espace réticulé compatible avec la structure de cône convexe donnée sur C .

Soit B_E la famille des ensembles bornés de l'espace E . Nous disons qu'une fonction $\alpha : B_E \rightarrow C$ est une mesure de non compacité sur E , si les propriétés suivantes sont vérifiées:

- 1° $(\forall \Omega_1, \Omega_2 \in B_E)(\Omega_1 \subset \Omega_2) \Rightarrow (\alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2))$
- 2° $(\forall \Omega \in B_E)(\alpha(\overline{\text{co}}(\Omega)) = \alpha(\Omega))$
- 3° $(\forall \Omega_1, \Omega_2 \in B_E)(\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \sup\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\})$

$$4^0 \quad (\forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{B}_E) (\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2))$$

$$5^0 \quad (\forall \Omega \in \mathcal{B}_E) (\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\alpha(\lambda \cdot \Omega) = |\lambda| \alpha(\Omega))$$

$$6^0 \quad (\forall \Omega \in \mathcal{B}_E) (\alpha(\Omega) = 0 \iff \Omega \text{ est précompact}).$$

EXEMPLES.

1⁰ Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet qui a la topologie τ définie par la famille suffisante de semi-normes $\{|\cdot|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On prend comme cône C l'ensemble de toutes les fonctions $a : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty[$ et on considère sur C la structure naturelle de cône convexe donnée par $(a_1 + a_2)(n) = a_1(n) + a_2(n)$ pour tout $a_1, a_2 \in C$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda \cdot a)(n) = \lambda a(n)$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $a \in C$ et $n \in \mathbb{N}$. La relation d'ordre: $a_1 \leq a_2 \iff (\forall n \in \mathbb{N}) (a_1(n) \leq a_2(n))$ donne sur C une structure d'espace de Riesz. La fonction $\alpha : \mathcal{B}_E \rightarrow C$ définie par:

$$[\alpha(\Omega)](n) = \inf\{d > 0 \mid \Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i, \quad |\cdot|_n - \text{diam.}(\Omega_i) \leq d\}$$

vérifie les propriétés 1⁰ - 6⁰ et elle s'appelle la mesure de non compacité de Kuratowski.

2⁰ La mesure de non compacité de Hausdorff [20].

3⁰ Dans les ouvrages [5], [19], on trouve plusieurs exemples de mesures de non compacité. Soit $E(\tau_1)$, $F(\tau_2)$ deux espaces localement convexes, $\mathbb{K}_1 \subset E$, $\mathbb{K}_2 \subset F$ deux cônes convexes et C un cône convexe abstrait muni d'une structure de Riesz. Soit $\alpha_1 : \mathcal{B}_E \rightarrow C$, $\alpha_2 : \mathcal{B}_F \rightarrow C$ deux mesures de non compacité précisées. Nous disons que l'opérateur $f : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ est de type (k, α_1, α_2) - Lipschitz si les affirmations suivantes sont vérifiées:

$$l_1) \quad (\forall \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}_1}) (f(\Omega) \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}_2}),$$

$$l_2) \quad f \text{ est continu,}$$

$$l_3) \quad (\exists k \in \mathbb{R}_+) (\forall \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}_1}) (\alpha_2(f(\Omega)) \leq k \alpha_1(\Omega))$$

où $\mathcal{B}_{\mathbb{K}_1}$ (resp. $\mathcal{B}_{\mathbb{K}_2}$) est la famille des ensembles bornés du cône $\mathbb{K}_1$ (resp. $\mathbb{K}_2$).

REMARQUES.

1⁰ Soit $E = F$ un espace quasi-complet et $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$. Si $f : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_1$

est un opérateur (k, α_1, α_1) -Lipschitz où $0 < k < 1$, alors f est condensant au sens de Sakovski [20].

2° Si F est un espace localement convexe quasi-complet, $K_1 \subset E$, $K_2 \subset F$ deux cônes convexes et $f : K_1 \rightarrow K_2$ un opérateur (k, α_1, α_2) -Lipschitz où $k = 0$, alors f est complètement continu.

§4. Nous considérons dans ce paragraphe que l'espace $E(\tau)$ est un espace de Fréchet.

Nous disons que l'ensemble $K \subset E$ est un *cône tronqué* s'il existe un cône convexe $K_1 \subset E$ et un voisinage convexe V de zéro tel que $K = K_1 \cap V$.

Si $K \subset E$ est un cône convexe ou un cône tronqué et $f, g : K \rightarrow K$, deux opérateurs, nous posons:

$$J(f, g) = \{x \in K \setminus \{0\} \mid \exists \lambda \geq 0, f(x) = \lambda g(x)\}.$$

Si $K = K_1 \cap V$ où K_1 est un cône localement borné, alors nous disons que K est un *cône tronqué localement borné*.

DÉFINITION 1. Soit $K \subset E$ un cône convexe localement borné ou un cône tronqué localement borné.

Nous disons que $J(f, g)$ est une *branche continue de longueur maximale* si, pour tout voisinage ouvert U de zéro, tel que $U \cap K$, est borné et $\partial U \cap K \neq \emptyset$ on a $\partial U \cap J(f, g) \neq \emptyset$.

DÉFINITION 2. Si $K \subset E$ est un cône convexe ou un cône tronqué, nous disons que l'opérateur $g : K \rightarrow K$ est *strictement positif* si, quelle que soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 0$, il résulte qu'il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ convergente vers zéro.

REMARQUE. La notion d'opérateur strictement positif que nous utilisons est plus générale que la notion d'opérateur strictement positif définie par Schaefer [22].

EXEMPLES.

1° Si E est un espace de Banach et $K \subset E$ un cône convexe, alors un opérateur $g : K \rightarrow K$ uniformément positif au sens de Krasnoselskii [11] c'est-à-dire, il existe $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ tel que: $(\forall x \in K) (\|g(x)\| \geq b\|x\|)$ est strictement positif.

2° Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe, $K \subset E$ un cône convexe localement borné et p une semi-norme continue uniformément positive sur K .

a) Si le cône K est normal [17] et si pour l'opérateur $g : K \rightarrow K$ il existe un opérateur $h : K \rightarrow K$ strictement positif tel que $(\forall x \in K) (g(x) \geq h(x))$, alors g est strictement positif.

b) Si, pour l'opérateur $g : K \rightarrow K$, il existe une fonction continue $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ tels que $\varphi(0) = 0$; $(\forall x \in K) (\varphi(g(x)) \geq b[p(x)]^a)$, alors g est strictement positif sur K .

3° Dans l'ouvrage [22], il existe plusieurs exemples d'opérateurs strictement positifs.

DEFINITION 3. Soit $K \subset E$ un cône convexe ou un cône tronqué.

Nous disons que l'opérateur $g : K \rightarrow K$ est *propre* si et seulement si g est continu et quel que soit $C \subset K$ un ensemble compact, l'ensemble $g^{-1}(C)$ est compact.

Une notion plus restrictive d'opérateur propre est étudiée dans l'ouvrage [N. Bourbaki, *Topologie générale*, Hermann, Paris].

Si E, F sont deux espaces de Banach et $f : E \rightarrow F$ un opérateur continu, nous disons que f est *coercif* si: $\|x\| \rightarrow \infty$ implique $\|f(x)\| \rightarrow \infty$.

EXEMPLES.

1° Soit E, F deux espaces de Banach et $f : E \rightarrow F$ un opérateur continu. Si $(\forall x \in E) (\|f(x)\| \geq c\|x\|^a)$ où $a, c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, alors f est coercif. Les opérateurs coercifs ont été utilisés dans [25].

2° L'opérateur de Von Karman [1] est propre.

3° Dans l'ouvrage [1], nous trouvons des exemples d'opérateurs différentiels propres.

4° Soit E, F deux espaces de Banach et $f : E \rightarrow F$ un opérateur continu coercif. Si $f = h + g$ où h est un opérateur compact et g est un opérateur propre, alors f est propre.

5° Soit E, F deux espaces de Banach, E étant réflexif et $f : E \rightarrow F$ un opérateur continu et coercif. Si, quelle que soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ une suite faiblement convergente vers x_0 , telle que $\{f(x_n)\}$ est fortement convergente, il résulte que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est fortement convergente vers x_0 , alors f est un opérateur propre.

DÉFINITION 4. Si $E(\tau_1), F(\tau_2)$ sont deux espaces localement convexes et $f : E \rightarrow F$ un opérateur continu, nous disons que f est (b)-propre si, pour tout ensemble compact $C \subset F$ et pour tout ensemble borné et fermé $B \subset E$, l'ensemble $f^{-1}(C) \cap B$ est compact.

EXEMPLES.

1° Soit E un espace de Banach, E^* son dual et $f : E \rightarrow E^*$. Nous disons que f vérifie la condition (S_+) si: pour toute suite $\{x_n\} \subset E$ faiblement convergente vers x telle que $\overline{\lim} \langle f(x_n), x_n - x \rangle \leq 0$, il résulte que $\{x_n\}$ est fortement convergente vers x et $f(x_n)$ est faiblement convergente vers $f(x)$. Si E est un espace de Banach réflexif, $g : E^* \rightarrow E$ un opérateur linéaire monotone (au sens de Minty-Browder), $h : E \rightarrow E^*$ un opérateur borné qui vérifie la condition (S_+) , alors $I + goh$ est un opérateur (b)-propre.

2° Chaque opérateur propre est (b)-propre.

THÉOREME 1. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet, $K \subset E$ un cône convexe, fermé, localement borné, $f : K \rightarrow K$ un opérateur complètement continu et $g : K \rightarrow K$ un opérateur continu, strictement positif et (b)-propre.

Soit U_1, U_2 deux voisinages ouverts de zéro tels que $\overline{U_2} \subset U_1$ et $U_1 \cap K$ est borné.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

1° $J(f, g)$ est une branche continue de longueur maximale.

2° Il existe $\mu^* > 0$ tel que:

i) $(x \in J(f, g) \cap \partial U_1) \ \& \ (f(x) = \mu g(x)) \rightarrow \mu < \mu^*$;

ii) $(x \in J(f, g) \cap \partial U_2) \ \& \ (f(x) = \mu g(x)) \rightarrow \mu > \mu^*$.

Alors, μ^* est une valeur propre pour le couple (f, g) associée à un vecteur propre $x^* \in K \cap (U_1 \setminus \overline{U_2})$ c'est-à-dire, $f(x^*) = \mu^* g(x^*)$.

DÉMONSTRATION. Puisque le cône K est localement borné et $U_1 \cap K$ est borné, il existe une semi-norme continue p , uniformément positive sur le cône K et un nombre réel $r_0 > 0$ tel que: $U_1 \cap K \subset \overline{B}_{r_0} = \{x \in E \mid p(x) \leq r_0\}$.

Nous supposons que μ^* n'est pas une valeur propre pour le couple (f, g) associée à un vecteur propre $x^* \in K \cap (U_1 \setminus \overline{U_2})$ et nous considérons les ensembles suivants:

$$[J(f, g)]^0 = \{x \in J(f, g) \mid x \in \overline{U_1} \setminus U_2\} ,$$

$$[J(f, g)]^< = \{x \in [J(f, g)]^0 \mid f(x) = \mu \cdot g(x) , \ \mu < \mu^*\} ,$$

$$[J(f, g)]^> = \{x \in [J(f, g)]^0 \mid f(x) = \mu \cdot g(x) , \ \mu > \mu^*\} .$$

Les hypothèses (2°) impliquent les relations suivantes:

$$[J(f, g)]^0 = [J(f, g)]^> \cup [J(f, g)]^< ,$$

$$[J(f, g)]^> \cap [J(f, g)]^< = \emptyset .$$

Puisque $[J(f, g)]^>, [J(f, g)]^< \subset [J(f, g)]^0$, il résulte qu'il existe $r > 0$ tel que:

$$(1) \inf\{p(x) \mid x \in [J(f, g)]^<\} > r \text{ et}$$

$$(2) \inf\{p(x) \mid x \in [J(f, g)]^>\} > r .$$

En effet, si on suppose que: $\inf\{p(x) \mid x \in [J(f, g)]^<\} = 0$, alors il existe une

suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [J(f,g)]^<$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = 0$. Puisque la semi-norme p est uniformément positive sur $\mathbb{K}$, il résulte que $\{x_n\} \xrightarrow{\tau} 0$.

Comme le cône $\mathbb{K}$ est fermé, il résulte que $\mathbb{K} \cap (\bar{U}_1 \setminus U_2)$ est un ensemble fermé et comme $[J(f,g)]^< \subset \mathbb{K} \cap (\bar{U}_1 \setminus U_2)$, il résulte que $0 \in \mathbb{K} \cap (\bar{U}_1 \setminus U_2)$, ce qui est absurde.

Par un calcul analogue, on prouve que: $\inf\{p(x) \mid x \in [J(f,g)]^>\} > 0$.
Donc nous pouvons choisir $r > 0$ qui vérifie les relations (1⁰), (2⁰). L'ensemble $[J(f,g)]^<$ est fermé.

En effet, soit $\{x_n\} \subset [J(f,g)]^<$ telle que:

$$(3) \quad f(x_n) = \mu_n g(x_n) \quad \text{où} \quad 0 < \mu_n < \mu^* \quad \text{et} \quad \{x_n\} \text{ convergente.}$$

Soit $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Puisque $(\forall n \in \mathbb{N})(p(x_n) > r)$, il résulte que $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = p(x_0) \geq r$.

Nous prouvons maintenant la relation:

$$(4) \quad \inf\{p(g(x)) \mid x \in \mathbb{K}, p(x) \geq r\} = \epsilon > 0.$$

En effet, si nous supposons que: $\inf\{p(g(x)) \mid x \in \mathbb{K}, p(x) \geq r\} = 0$, il résulte qu'il existe une suite $\{y_n\} \subset \mathbb{K}$ telle que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(y_n) \geq r) \quad \text{et} \quad \{p(g(y_n))\} \rightarrow 0.$$

La semi-norme p étant uniformément positive sur $\mathbb{K}$, il résulte que $\{g(y_n)\} \xrightarrow{\tau} 0$. L'opérateur g étant strictement positif sur $\mathbb{K}$, il résulte qu'il existe une sous-suite $\{y_{n_k}\} \xrightarrow{\tau} 0$, ce qui est impossible parce que $(\forall k \in \mathbb{N})(p(y_{n_k}) \geq r)$.

Donc la relation (4) est vraie. De la relation (4), nous avons alors:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(g(x_n)) = p(g(x_0)) \geq \epsilon > 0.$$

La relation (3) nous donne alors: $p(f(x_n)) = \mu_n p(g(x_n))$, d'où

$$\mu_n = \frac{p(f(x_n))}{p(g(x_n))},$$

ce qui implique qu'il existe:

$$\mu_0 = \lim \mu_n = \frac{p(f(x_0))}{p(g(x_0))}.$$

Nous avons $\mu_0 < \mu^*$ parce que si $\mu_0 = \mu^*$, comme $x_0 \neq 0$ (p étant uniformément positive sur K) nous obtenons que $f(x_0) = \mu^* g(x_0)$ et nous avons ainsi que μ^* est une valeur propre pour le couple (f, g) associée à un vecteur propre qui se trouve dans l'ensemble $K \cap (U_1 \setminus U_2)$, ce qui est impossible. Donc l'ensemble $[f(f, g)]^<$ est fermé.

Un calcul analogue nous donne aussi que l'ensemble $[f(f, g)]^>$ est fermé.

Puisque l'espace $E(\tau)$ est métrisable, la topologie τ est définie par une famille dénombrable de semi-normes $\{| \cdot |_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les propriétés s_1 , s_2) [8]. Nous pouvons supposer que la famille $\{| \cdot |_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone croissante et dans ce cas la topologie τ est définie par la métrique:

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x - y|_n}{1 + |x - y|_n}; \quad \forall x, y \in E.$$

Utilisant la distance ρ , nous pouvons définir: $\text{dist}([f(f, g)]^<, [f(f, g)]^>)$.

Nous démontrons la relation suivante:

$$(6) \quad \text{dist}([f(f, g)]^<, [f(f, g)]^>) > 0.$$

Pour prouver la relation (6), nous supposons que

$$\text{dist}([f(f, g)]^<, [f(f, g)]^>) = 0.$$

Il existe alors $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [f(f, g)]^<$ et $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [f(f, g)]^>$ telles que $f(y_n) = \mu_n g(y_n)$ où $\mu_n > \mu^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

Mais nous avons les relations suivantes:

$$(8) \quad r < p(x_n); \quad r < p(y_n) \leq r_0; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque f est complètement continu et les relations (8) impliquent que $\{y_n\}$ est bornée (à cause du fait que p est uniformément positive sur K), il résulte qu'il existe $M > 0$ tel que: $(\forall n \in \mathbb{N})(p(f(y_n)) \leq M)$. Les relations (4) et (8) impliquent: $(\forall n \in \mathbb{N})(p(g(y_n)) \geq \varepsilon > 0)$ d'où il résulte:

$$\mu^* < \mu_n = \frac{p(f(y_n))}{p(g(y_n))} \leq \frac{M}{\varepsilon}; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilisant encore que f est complètement continu, nous pouvons affirmer qu'il existe une sous-suite convergente $\{\mu_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{\mu_n\}$ et une sous-suite $\{y_{n_j}\} \subset \{y_n\}$ telle que la suite $\{f(y_{n_j})\}$ est convergente. Evidemment, si $\mu_0 = \lim \mu_{n_j}$, alors $\mu_0 > 0$.

De la relation $f(y_{n_j}) = \mu_{n_j} g(y_{n_j})$, il résulte que $\{g(y_{n_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ est convergente, et puisque g est un opérateur (b)-propre, il résulte qu'il existe une sous-suite $\{y_{n_{j_i}}\}$ convergente, de la suite $\{y_{n_j}\}$. Soit $y_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{n_{j_i}}$. Evidemment $y_0 \neq 0$ et nous avons $f(y_0) = \mu_0 g(y_0)$. L'ensemble $[f(f,g)]^>$ étant fermé, il résulte que $y_0 \in [f(f,g)]^>$.

De la relation (7), il résulte

$$\rho(x_{n_{j_i}}, y_0) \leq \rho(x_{n_{j_i}}, y_{n_{j_i}}) + \rho(y_{n_{j_i}}, y_0) \rightarrow 0$$

ce qui donne que $y_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_{j_i}}$ et, comme $[f(f,g)]^<$ est fermé, nous obtenons que $y_0 \in [f(f,g)]^> \cap [f(f,g)]^<$, ce qui est absurde.

Donc, si $d = \text{dist}([f(f,g)]^<, [f(f,g)]^>)$, nous avons $d > 0$. Nous posons $U_2^* = U_2 \cup U_2^>$ où

$$U_2^> = \{y \in E \mid \rho(x, y) < \frac{d}{2}, \quad x \in [f(f,g)]^>\}.$$

L'ensemble U_2^* est un voisinage ouvert de zéro. Si nous considérons le voisinage ouvert de zéro $U_2^* \cap U_1$, nous avons $U_2^* \cap U_1 \subset \overline{U}_1$ et l'hypothèse (1⁰) implique l'existence d'un vecteur propre $x_0 \in \partial(U_2^* \cap U_1) \cap K$ pour le couple (f, g) .

Puisque $\partial(U_2^* \cap U_1) \cap K \subset (\bar{U}_1 \setminus U_2) \cap K$, il résulte que $x_0 \in [J(f,g)]^0$.
 Mais, d'après la construction de l'ensemble U_2^* , il résulte que $x_0 \notin [J(f,g)]^>$
 et aussi $x_0 \notin [J(f,g)]^<$ (parce que c'est en contradiction avec la définition du
 nombre d).

Nous obtenons ainsi une contradiction en regardant la définition et les
 propriétés de l'ensemble $[J(f,g)]^0$ et le théorème est démontré. $\square$

COROLLAIRE. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet, $K \subset E$ un cône convexe,
 fermé, localement borné, $f : K \rightarrow K$ un opérateur complètement continu et
 $g : K \rightarrow K$ un opérateur continu, strictement positif et (b)-propre sur K .

Soit U_1, U_2 deux voisinages ouverts de zéro tels que $\bar{U}_2 \subset U_1$ et
 $U_1 \cap K$ est borné.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:

1° $J(f,g)$ est une branche continue de longueur maximale,

2° $(x \in J(f,g) \cap \partial U_1) \ \& \ (f(x) = \mu g(x)) \Rightarrow \mu < 1$,

3° $(x \in J(f,g) \cap \partial U_2) \ \& \ (f(x) = \mu g(x)) \Rightarrow \mu > 1$,

alors:

a) il existe $x^* \in K \cap (U_1 \setminus \bar{U}_2)$ tel que $f(x^*) = g(x^*)$,

b) si $g = I$, alors il existe un point fixe pour f dans l'ensemble
 $K \cap (U_1 \setminus \bar{U}_2)$. $\square$

DEFINITION 5. Nous disons que l'opérateur $g : K \rightarrow K$ est α -coercif si
 et seulement si:

c₁) g est continu,

c₂) g est borné,

c₃) $(\exists c > 0)(\forall A \subset K, \text{ borné})(c\alpha(A) < \alpha(g(A)))$.

Nous supposons que l'espace $E(\tau)$ est un espace de Fréchet.

PROPOSITION 1. Si $g : K \rightarrow K$ est α -coercif alors quelle que soit
 $\{x_n\} \subset K$ une suite bornée telle que $\{g(x_n)\}$ est convergente, il résulte que la
 suite $\{x_n\}$ a une sous-suite convergente.

DÉMONSTRATION. Si $\{x_n\}$ est bornée et $\{g(x_n)\}$ est convergente, alors $\alpha(\{g(x_n)\}) = 0$. Puisque g est α -coercif, il résulte que $\alpha(\{x_n\}) = 0$, mais comme l'espace E est un espace de Fréchet, il résulte que $\{x_n\}$ est relativement compacte, d'où la conclusion de la proposition. $\square$

THÉORÈME 2. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet, $K \subset E$ un cône convexe, fermé, localement borné, $f : K \rightarrow K$ un opérateur (k, α, α) -Lipschitz et $g : K \rightarrow K$ un opérateur α -coercif et strictement positif sur le cône K .

Soit U_1, U_2 deux voisinages ouverts de zéro tels que $\bar{U}_2 \subset U_1$ et $U_1 \cap K$ est borné.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- 1° $J(f, g)$ est une branche continue de longueur maximale,
- 2° il existe $\mu^* > \frac{k}{c}$; (c étant la constante de coercivité) tel que:
 - i) $(x \in J(f, g) \cap \partial U_1) \ \& \ (f(x) = \mu g(x)) \Rightarrow \mu < \mu^*$
 - ii) $(x \in J(f, g) \cap \partial U_2) \ \& \ (f(x) = \mu g(x)) \Rightarrow \mu > \mu^*$.

Alors il existe $x^* \in K \cap (U_1 \setminus \bar{U}_2)$ tel que $f(x^*) = \mu^* g(x^*)$.

DÉMONSTRATION. Nous supposons qu'il n'existe aucun $x^* \in K \cap (U_1 \setminus \bar{U}_2)$ tel que $f(x^*) = \mu^* g(x^*)$.

Comme dans le Théorème 1, nous considérons les ensembles

$$[J(f, g)]^0, [J(f, g)]^<, [J(f, g)]^>$$

et nous avons

$$[J(f, g)]^0 = [J(f, g)]^> \cup [J(f, g)]^<, \\ [J(f, g)]^> \cap [J(f, g)]^< = \emptyset.$$

Puisque le cône K est localement borné et $U_1 \cap K$ est borné, il existe une semi-norme continue p , uniformément positive sur le cône K et un nombre réel $r_0 > 0$ tel que $U_1 \cap K \subset \bar{B}_{r_0} = \{x \in E \mid p(x) \leq r_0\}$ et comme g est strictement positif sur K , le même calcul utilisé dans la démonstration du Théorème 1 nous donne que les ensembles $[J(f, g)]^<, [J(f, g)]^>$ sont fermés.

Soit $\{|\cdot|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille monotone croissante de semi-normes qui donne la topologie τ et qui vérifie les propriétés $s_1), s_2)$ [8]. Si nous considérons la métrique

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x - y|_n}{1 + |x - y|_n}; \quad \forall x, y \in E,$$

nous pouvons démontrer que:

$$(1) \quad \text{dist}([J(f, g)]^<, [J(f, g)]^>) > 0.$$

En effet, nous supposons que

$$\text{dist}([J(f, g)]^<, [J(f, g)]^>) = 0.$$

Il existe alors $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [J(f, g)]^<$ et $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [J(f, g)]^>$ telles que $f(y_n) = \mu_n g(y_n)$ où $\mu_n > \mu^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

Mais, comme dans le Théorème 1, nous pouvons démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que:

$$(3) \quad r < p(x_n); \quad r < p(y_n) \leq r_0; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque p est uniformément positive sur K , de la relation (3), il résulte que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et, comme f est (k, α, α) -Lipschitz, il résulte que $\{f(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})(p(f(y_n)) \leq M)$.

L'opérateur g étant strictement positif sur K , nous pouvons prouver que:

$$(4) \quad \inf\{p(g(x)) \mid x \in K, \quad p(x) \geq r\} = \varepsilon > 0.$$

Les relations (3) et (4) impliquent: $(\forall n \in \mathbb{N})(p(g(y_n)) \geq \varepsilon > 0)$ d'où il résulte la relation:

$$(5) \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\mu^* < \mu_n = \frac{p(f(y_n))}{p(g(y_n))} \leq \frac{M}{\varepsilon}).$$

Donc, de la relation (5), nous obtenons que la suite $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte et alors il existe une sous-suite $\{\mu_{n_j}\} \subset \{\mu_n\}$ convergente.

Si $\mu_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_{n_j}$, nous avons:

$$(6) \quad \mu_0 \geq \mu^* > \frac{k}{c}.$$

Puisque $\{f(y_{n_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\mu_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_{n_j}$, nous avons:

$$\{(\mu_0^{-1} - \mu_{n_j}^{-1})f(y_{n_j})\} \xrightarrow{\tau} 0$$

ce qui implique

$$\alpha(\{(\mu_0^{-1} - \mu_{n_j}^{-1})f(y_{n_j})\}) = 0.$$

L'opérateur g étant α -coercif, nous avons:

$$(7) \quad c \cdot \alpha(\{y_{n_j}\}) \leq \alpha(\{g(y_{n_j})\}) \leq \alpha(\{\mu_0^{-1}f(y_{n_j})\}) + \alpha(\{(\mu_0^{-1} - \mu_{n_j}^{-1})f(y_{n_j})\})$$

d'où

$$c \cdot \alpha(\{y_{n_j}\}) \leq \mu_0^{-1} c \alpha(\{y_{n_j}\}).$$

De la relation (6), il résulte que $\alpha(\{y_{n_j}\}) = 0$ et comme l'espace $E(\tau)$ est un espace de Fréchet, il résulte que $\{y_{n_j}\}$ est relativement compacte. Donc il existe une sous-suite convergente de la suite $\{y_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Nous pouvons supposer que cette sous-suite est $\{y_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Soit $y_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j}$. Puisque $p(y_{n_j}) > r$, nous avons que $p(y_0) \geq r$ et donc $y_0 \neq 0$.

Evidemment, $g(y_0) \neq 0$ et la relation $f(y_{n_j}) = \mu_{n_j} g(y_{n_j})$ implique $f(y_0) = \mu_0 g(y_0)$ et comme $[J(f, g)]^>$ est fermé, nous obtenons $y_0 \in [J(f, g)]^>$.

De la relation (2), nous avons:

$$\rho(x_{n_j}, y_0) \leq \rho(x_{n_j}, y_{n_j}) + \rho(y_{n_j}, y_0) \xrightarrow{\tau} 0,$$

ce qui donne: $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = y_0$ et comme $[J(f, g)]^<$ est fermé, il résulte que

$$y_0 \in [J(f,g)]^> \cap [J(f,g)]^< .$$

Donc, $d = \text{dist}([J(f,g)]^>, [J(f,g)]^<) > 0$ et nous pouvons considérer l'ensemble

$$U_2^* = U_2 \cup U_2^>$$

où

$$U_2^> = \{y \in E \mid \rho(x,y) < \frac{d}{2}, \quad x \in [J(f,g)]^>\} .$$

Comme dans le Théorème 1, utilisant l'hypothèse (1⁰), il résulte l'existence d'un vecteur propre $x_0 \in K \cap \partial(U_2^* \cap U_1)$ pour le couple (f,g) , qui a les propriétés suivantes: $x_0 \in [J(f,g)]^0$, $x_0 \notin [J(f,g)]^>$ et $x_0 \notin [J(f,g)]^<$, ce qui est impossible et le théorème est démontré. $\square$

COROLLAIRE 1. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet, $K \subset E$ un cône convexe, fermé, localement borné, $f : K \rightarrow K$ un opérateur (k, α, α) -Lipschitz et $g : K \rightarrow K$ un opérateur α -coercif et strictement positif sur le cône K . Soit U_1, U_2 deux voisinages ouverts de zéro tels que $\overline{U}_2 \subset U_1$ et $U_1 \cap K$ est borné.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

1⁰ $J(f,g)$ est une branche continue de longueur maximale,

2⁰ $\frac{k}{c} < 1$ (où c est la constante de coercivité),

3⁰ $(x \in J(f,g) \cap \partial U_1) \ \& \ (f(x) = \mu g(x)) \Rightarrow \mu < 1$,

4⁰ $(x \in J(f,g) \cap \partial U_2) \ \& \ (f(x) = \mu g(x)) \Rightarrow \mu > 1$.

Alors il existe $x^* \in K \cap (U_1 \setminus \overline{U}_2)$ tel que $f(x^*) = g(x^*)$.

REMARQUE. Si $g = I$, alors g est strictement positif sur K et α -coercif où la constante $c = 1$.

Nous avons alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet, $K \subset E$ un cône convexe, fermé, localement borné et $f : K \rightarrow K$ un opérateur (k, α, α) -Lipschitz.

Soit U_1, U_2 deux voisinages ouverts de zéro tels que $\overline{U}_2 \subset U_1$ et $U_1 \cap K$ est borné.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

1° $J(f, I)$ est une branche continue de longueur maximale.

2° Il existe $\mu^* > k$ tel que:

i) $(x \in J(f, g) \cap \partial U_1) \quad \& \quad (f(x) = \mu x) \Rightarrow \mu < \mu^*,$

ii) $(x \in J(f, g) \cap \partial U_2) \quad \& \quad (f(x) = \mu x) \Rightarrow \mu > \mu^*.$

Alors

a) il existe $x^* \in K \cap (U_1 \setminus \overline{U}_2)$ tel que $f(x^*) = \mu^* x^*$

b) si $\mu^* = 1$, alors il existe un point fixe de l'opérateur f dans l'ensemble $K \cap (U_1 \setminus \overline{U}_2)$. $\square$

COROLLAIRE 3. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet, $K \subset E$ un cône convexe, fermé, localement borné, $f : K \rightarrow K$ un opérateur (k, α, α) -Lipschitz et $g : K \rightarrow K$ un opérateur α -coercif et strictement positif sur le cône K .

Soit U_1, U_2 deux voisinages ouverts de zéro tels que $\overline{U}_2 \subset U_1$ et $U_1 \cap K$ est borné.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

1° $J(f, g)$ est une branche continue de longueur maximale.

2° $\gamma = \max(\alpha_0, \frac{k}{c}) < \beta$ où

$$\alpha_0 = \sup\{\mu \mid (\exists x \in J(f, g) \cap \partial U_1) \quad \& \quad (f(x) = \mu g(x))\}$$

$$\beta = \inf\{\mu \mid (\exists x \in J(f, g) \cap \partial U_2) \quad \& \quad (f(x) = \mu g(x))\}.$$

Alors, pour tout $\mu^* \in]\gamma, \beta[$, il existe $x^* \in K \cap (U_1 \setminus \overline{U}_2)$ tel que $f(x^*) = \mu^* g(x^*)$. $\square$

REMARQUE. Les résultats obtenus sont vrais sur des cônes tronqués fermés. $\square$

Les Théorèmes 1 et 2 peuvent être considérés comme des extensions aux couples (f, g) des résultats démontrés par K. Schmitt dans l'ouvrage [24] et du Théorème 5 de l'ouvrage [14] démontré par N.V. Marčenko.

Nous disons que les opérateurs f, g sont bien couplés sur le cône K

si: f est complètement continu et g est (b)-propre et strictement positif sur K ou f est (k, α, α) -Lipschitz et g est α -coercif et strictement positif sur K .

Alors la signification des Théorèmes 1 et 2 est la suivante. Le nombre $\mu^* > 0$ (resp. $\mu^* > \frac{k}{c}$) est une valeur propre pour le couple (f, g) associée à un vecteur propre $x^* \in K \cap (U_1 \setminus \overline{U}_2)$ si les opérateurs f, g sont bien couplés sur le cône K , $J(f, g)$ est une branche continue de longueur maximale et si les conditions Leray-Schauder sont vérifiées.

Pour les applications aux équations fonctionnelles, nous avons besoin des critères commodes qui nous assurent que $J(f, g)$ est une branche continue de longueur maximale.

Dans le cas $g = I$, il existe de tels critères [1], [12]. Dans l'ouvrage [9], nous avons démontré le résultat suivant.

THÉOREME. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet, $K \subset E$ un cône convexe fermé, normal, saillant et $f : K \rightarrow K$ un opérateur (k, α, α) -Lipschitz ($k \geq 0$).

On suppose qu'il existe un ensemble $A \subset K$ séparant. Alors:

1° il existe une semi-norme p continue monotone croissante et uniformément positive sur K ;

2° si $\delta_A > kd_A$ où $\delta_A = \inf\{p(f(x)) \mid x \in A\}$ et $d_A = \sup\{p(x) \mid x \in A\}$ alors il existe $\lambda > 0$ et $z \in A$ tels que $\lambda f(z) = z$ [9]. $\square$

Utilisant ce théorème, nous pouvons démontrer les propositions suivantes, qui sont des conséquences de nos résultats de l'ouvrage [9].

PROPOSITION 2. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet, $K \subset E$ un cône convexe, fermé, saillant, normal, localement borné et p une semi-norme continue monotone croissante et uniformément positive sur K .

Si $f : K \rightarrow K$ est un opérateur (k, α, α) -Lipschitz où $k > 0$ et $\sup\{\lambda \mid (x, \lambda) \in C\} < \frac{1}{k}$ où C est la composante connexe de l'ensemble

$S = \{(x, \lambda) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}_+ \mid x = \lambda f(x)\}$ qui contient $(0, 0)$, alors $f(f, I)$ est une branche continue de longueur maximale. $\square$

PROPOSITION 3. Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet, $\mathbb{K} \subset E$ un cône convexe fermé, saillant, localement borné et $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ un opérateur complètement continu.

Si $S = \{(x, \lambda) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}_+ \mid x = \lambda f(x)\}$ et C est la composante connexe de S qui contient $(0, 0)$ et si $\sup\{\lambda \mid (x, \lambda) \in C\} = +\infty$, alors $f(f, I)$ est une branche continue de longueur maximale. $\square$

A ce moment, nous ne connaissons pas de critères d'existence des branches continues de vecteurs propres pour des couples (f, g) , si simple comme pour (f, I) .

Généralement, les résultats globaux sur les vecteurs propres pour les équations non linéaires de la forme $F(x, \lambda) = x$ démontrés par P. Rabinowitz, E.N. Dancer et H. Amann ne s'appliquent pas aux couples.

Nous considérons que des études sur l'existence des branches continues de vecteurs propres de longueurs maximales pour les couples d'opérateurs (f, g) présentent un grand intérêt. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGER, M.S., *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, 1977.
- [2] BROWDER, F.E., *Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin approximations*, Bull. Am. Math. Soc., Vol. 74, Nr. 4 (1968), 651-656.
- [3] CORNEA, A., ICHIM, I., *Sur l'existence des valeurs propres pour les applications compactes*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Tom. XXII, Nr. 5 (1977), 599-606.
- [4] DEAN, E.T., CHAMBRE, P.L., *On the bifurcation of solutions of the nonlinear eigenvalue problem $Lu + \lambda b(x)u = g(x, u)$* , Siam Appl. Math., Vol. 20, Nr. 4 (1971), 722-734.

- [5] FITZPATRICK, P.M., PETRYSHYN, W.V., *Fixed point theorems and the fixed point index for multivalued mappings in cones*, Journ. of the London Math. Soc., Vol. 12, F-1 (1975), 78-85.
- [6] FITZPATRICK, P.M., PETRYSHYN, W.V., *Positive eigenvalues for nonlinear multivalued noncompact operators with applications to differential operators*, Journ. of Diff. Eq. 22 (1976), 428-441.
- [7] GAINES, R.E., MAWHIN, J.L., *Coincidence degree and nonlinear differential equations*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Nr. 262 (1977).
- [8] ISAC, G., *Cônes localement bornés, théorèmes de point fixe et valeurs propres positives pour des opérateurs non linéaires dans des espaces localement convexes*, Inst. de Math. Pure et Appl., Univ. Catholique de Louvain, Rapport Nr. 131 (1979).
- [9] ISAC, G., *Valeurs propres positives pour des opérateurs de type α -Lipschitz dans des espaces de Fréchet*, Publ. Math. de l'Univ. de Pau, 1979.
- [10] JAMESON, G.O., *Ordered linear spaces*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Nr. 141 (1964).
- [11] KRASNOSELSKII, M.A., *Positive Solutions of Operators Equations*, Noordhoff, 1964.
- [12] KRASNOSELSKII, M.A., *Some problems of nonlinear analysis*, Uspehi Mat. Nauk. 3(61) (1954), 57-114.
- [13] MANGASARIAN, O.L., *Perron-Frobenius of $Ax - \lambda Bx$* , Journ. of Math. Anal. and Appl. 36 (1971), 86-102.
- [14] MARCENKO, N.V., *On the continuation of an operator and the existence of fixed points*, Dokl. Akad. Nauk 145 (1962), 1767-1770.

- [15] MAWHIN, J., *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems*, NSF-CBNS Regional Conference at the Claremont Univeristy Center, Claremont, California, 1977.
- [16] MININNI, N., *Coincidence degree and solvability of some nonlinear functional equations in normed spaces. A Spectral approach*, Nonlinear Anal. Th. Meth. & Appl., Vol. 1, Nr. 2 (1977), 105-122.
- [17] PERESSINI, A.L., *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper & Row, 1967.
- [18] PETRYSHYN, W.V., *Bifurcation and asymptotic bifurcation for equations involving A-proper mappings with applications to differential equations*, Journ. of Diff. Eq. 28 (1978), 124-154.
- [19] PETRYSHYN, W.V., FITZPATRICK, P.M., *A degree theory, fixed point theorems and mapping theorems for multivalued non-compact mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 194 (1974), 1-25.
- [20] SADOVSKI, B.N., *Limit-compact and condensing operators*, Uspehi Mat. Nauk 27 (1972), 81-146.
- [21] SCOTT, D.S., *Solving sparse symmetric generalized eigenvalue problems without factorization*, Siam Jour. Num. Anal., Vol. 18, Nr. 1 (1981), 102-110.
- [22] SCHAEFER, H.H., *On non-linear positive operators*, Pacific Journ. of Math. 9 (1959), 847-860.
- [23] SCHECHTER, M., SHAPIRO, J., SNOW, M., *Solution of the nonlinear problem $A(u) = N(u)$ in Banach space*, Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. 241 (1978), 69-78.
- [24] SCHMITT, K., *Fixed point and coincidence theorems with applications to nonlinear differential and integral equations*, Inst. de Math. Pure et Appl., Univ. Catholique de Louvain, Rapport Nr. 97, 1976.

- [25] SVATOPLUK, F., NEČAS, J., SOUČEK, J., SAUCEK, V., *Spectral analysis of nonlinear operators*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Nr. 396, 1973.

Département de mathématiques
Collège militaire royal de Saint-Jean
Saint-Jean, Québec
J0J 1R0

Manuscrit reçu le 22 janvier 1981.
Revisé le 28 avril 1981.