

DES ANNEAUX PRINCIPAUX, NON EUCLIDIENS

Hélène Décoste

0. INTRODUCTION

Le problème de donner des exemples d'anneaux principaux non euclidiens est en général considéré comme difficile. Lors d'une conférence donnée à l'Université McGill à Montréal [4], G. Renault infirma cet énoncé avec l'exemple $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1)$. Il cita aussi les anneaux d'entiers quadratiques de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, où $d = -19, -43, -67$ et -163 , qui sont connus comme étant principaux et non euclidiens, mais ajouta que dans ces cas, la preuve (de principalité) qui fait appel à la théorie des classes d'idéaux n'est pas élémentaire. Notre propos ici est de montrer (section 2) qu'il existe une preuve purement élémentaire du fait que l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$, que nous noterons $J(-19)$, est un anneau principal qui n'est pas euclidien. De plus, nous verrons dans la section 3 que notre démonstration peut aussi être adaptée aux anneaux $J(-43)$, $J(-67)$ et $J(-163)$. La section 1 contient les définitions pertinentes ainsi que les critères qui seront utilisés.

Mentionnons que G. Cauchon, de l'Université de Paris-sud, Orsay, a aussi obtenu une preuve élémentaire qui est complètement différente de celle présentée ici. Ce fait nous a été signalé par l'arbitre.

1. DEUX CRITÈRES

Un anneau euclidien A étant défini comme un anneau commutatif, intègre, unifère muni d'une application $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$, appelée *algorithme euclidien sur A* ,

vérifiant la condition de division suivante:

$$\forall b \in A \setminus \{0\}, \forall a \in A, \exists q \in A \text{ tel que } \varphi(a - bq) < \varphi(b),$$

nous conviendrons de dire qu'une application $f : A \rightarrow E$, où E est un ensemble bien ordonné quelconque, satisfait la *condition de division faible* (CDF) ssi $\forall b \in A \setminus \{0\}, \exists c \in A$ tel que

$$\text{i) } f(b) \leq f(c)$$

$$\text{ii) } \forall a \in A, \exists q \in A \text{ tel que } f(a - cq) < f(b).$$

Ces préliminaires nous amènent à énoncer un premier critère (une condition nécessaire) qui permettra de ramener la démonstration de la non euclidianité d'un anneau à l'existence d'une fonction satisfaisant certaines propriétés.

CRITÈRE 1. Soit A un anneau commutatif, intègre, unifère. Si A est un anneau euclidien, alors pour tout ensemble bien ordonné E , toute application $f : A \rightarrow E$ vérifiant $f(0) < f(a)$ pour tout élément non nul a de A , satisfait la condition de division faible.

DÉMONSTRATION. Soit E un ensemble bien ordonné et $f : A \rightarrow E$ une telle application. Supposons qu'il existe un élément $b \in A \setminus \{0\}$ qui fasse que f ne satisfait pas CDF, c'est-à-dire:

$$\forall c \in A, f(b) \leq f(c) \Rightarrow \exists a \in A \text{ tel que } \forall q \in A, f(a - cq) \geq f(b).$$

Soient $c_0 \in A$ et $a_0 \in A$ tels que

$$f(b) \leq f(c_0) \text{ et } \forall q \in A, f(a_0 - c_0 q) \geq f(b).$$

Ainsi choisi, $c_0 \neq 0$ car $f(0) < f(b) \leq f(c_0)$. On peut donc effectuer la division euclidienne et

$$\exists q_0 \in A \text{ tel que } \varphi(a_0 - c_0 q_0) < \varphi(c_0),$$

où $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$ est l'algorithme euclidien de A . Posons $c_1 = a_0 - c_0 q_0$, ce qui donne $\varphi(c_1) < \varphi(c_0)$. Comme $f(c_1) \geq f(b) > f(0)$, en recommençant le procédé

avec c_1 , on trouve c_2 , puis c_3 , c_4 , ... Ces éléments nous donnent une suite infinie strictement décroissante

$$\dots < \varphi(c_3) < \varphi(c_2) < \varphi(c_1) < \varphi(c_0)$$

d'éléments de $\mathbb{N}$, ce qui est impossible. $\square$

REMARQUE. La condition contenue dans l'énoncé qui précède constitue en fait une caractérisation de la classe des anneaux à division ([1], [2]). On appelle ainsi les anneaux qui admettent un algorithme à valeurs dans un ensemble bien ordonné quelconque. Soulignons que le problème de déterminer si cette classe d'anneaux élargit la classe des anneaux euclidiens est encore ouvert [5].

Les anneaux euclidiens et les anneaux principaux ayant des structures assez semblables, nous allons maintenant caractériser ces derniers en introduisant une notion d'algorithme appropriée.

CRITÈRE 2. Soit A un anneau commutatif, intègre, unifère. Alors A est un anneau principal ssi il existe une application $\psi : A \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant $\forall b \in A \setminus \{0\}, \forall a \in A, \exists v, \mu \in A$ tels que

- i) $\psi(av - b\mu) < \psi(b)$
- ii) $b \nmid a \Rightarrow \psi(0) < \psi(av - b\mu)$.

Dans ce cas, par analogie avec les algorithmes euclidiens, cette application ψ sera appelée *algorithme de primalité sur A* .

DÉMONSTRATION. Suffisance. Soient $\psi : A \rightarrow \mathbb{N}$ une telle application, I un idéal non nul de A et $b \in I$ tel que $\psi(b) = \min\{\psi(c) \mid c \in I, c \neq 0\}$. On a alors $I = (b)$. En effet, $(b) \subseteq I$ et $I \subseteq (b)$ car sinon il existe $a \in I$ tel que $b \nmid a$ et donc

$$\exists v, \mu \in A \text{ tels que } \psi(0) < \psi(av - b\mu) < \psi(b).$$

Mais $av - b\mu \in I$, $av - b\mu \neq 0$ et $\psi(av - b\mu) < \psi(b)$, ce qui contredit la minimalité de $\psi(b)$.

Nécessité. Comme A est un anneau principal, c'est un anneau factoriel et l'application $\psi : A \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\psi(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ n+1 & \text{si } a = up_1 \dots p_n, \text{ } u \text{ unité de } A, \\ & p_1, \dots, p_n \text{ éléments premiers de } A \end{cases}$$

est bien définie. Voyons que cette application vérifie la condition demandée. Soit $b \in A \setminus \{0\}$ et $a \in A$. Si $b \nmid a$, soit d un p.g.c.d. de a et b . Comme $d \mid b$ et $d \neq 0$, on a

$$\psi(0) = 0 < \psi(d) < \psi(b) .$$

De plus, A étant principal, on a le théorème de Bezout et

$$\exists v, \mu \in A \text{ tels que } d = av - b\mu .$$

Ainsi, $\exists v, \mu \in A$ tels que $\psi(0) < \psi(av - b\mu) < \psi(b)$. D'autre part, si $b \mid a$, on écrit $a = b\mu$ et on a $\psi(a - b\mu) = \psi(0) < \psi(b)$. $\square$

2. LE CAS $J(-19)$

H. Lemlein [3] a montré que l'anneau $J(-19)$ n'est pas euclidien en utilisant le cadre géométrique suivant. On considère $J(-19)$ comme sous-ensemble du plan complexe $\mathbb{C}$. Ses éléments sont les points du réseau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$, où $\omega = (1 + \sqrt{-19})/2$. Désignons par $\mathcal{D}$ la réunion des disques ouverts de rayon un centrés aux sommets de ce réseau et par $\mathcal{H}$ le complémentaire de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ (voir Fig. 1).

Ce contexte géométrique nous a conduit à formuler une preuve élémentaire du fait que $J(-19)$ est un anneau principal, preuve qui utilise le critère 2. Nous prouvons aussi qu'il n'est pas euclidien en adaptant la preuve de Lemlein au critère 1.

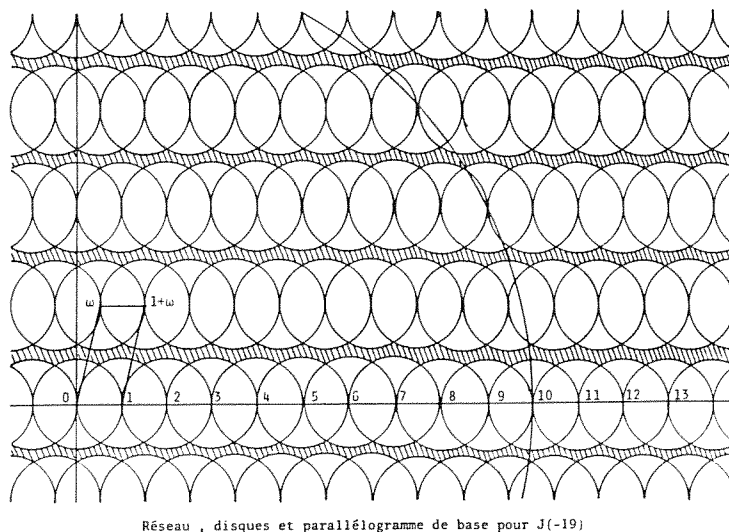


Fig. 1

THÉORÈME 1. L'anneau $J(-19)$ est principal et non euclidien.

DÉMONSTRATION. Nous pouvons voir que cet anneau n'est pas euclidien en appliquant le critère 1. A cet effet, on montre que la norme habituelle $N : J(-19) \rightarrow \mathbb{N}$, $(N(a) = a\bar{a})$, qui est une fonction multiplicative, ne satisfait pas CDF.

Pour cela, prenons $b = 10 \in J(-19)$ et voyons que $\forall c \in J(-19)$, $N(c) \geq 100 \Rightarrow \exists a \in J(-19)$ tel que $\forall q \in J(-19)$, $N(a/c - q) \geq 1$. Cet énoncé, vu de façon géométrique, signifie que pour tout point c du réseau qui est à l'extérieur du cercle ouvert de rayon 10 centré en 0, on peut trouver un multiple entier ($\in J(-19)$) de $1/c$ qui est à une distance plus grande que un de tout sommet du réseau, c'est-à-dire: qui est dans l'ensemble $\mathcal{H}$ décrit précédemment (partie hachurée de la Fig. 1). Remarquons que l'ensemble $\mathcal{H}$ est formé de "bandes" horizontales dont la largeur minimale, donnée par la distance entre les disques centrés en 0 et ω , est $\ell = \|\omega\| - 2 = \sqrt{N(\omega)} - 2 = \sqrt{5} - 2$. Ainsi, pour vérifier notre énoncé, soit $c \in J(-19)$ tel que $N(c) \geq 100$ et considérons les deux cas suivants:

i) si $c = x + y\omega$, où $y \neq 0$, alors $\|1/c\| = \frac{1}{\sqrt{N(c)}} \leq \frac{1}{10} < \sqrt{5} - 2 = \ell$, et il est clair qu'il existe $a = n \in \mathbb{N}$ tel que $n(1/c) \in \mathcal{H}$.

ii) si $c = x \in \mathbb{Z}$, alors ω/c n'est pas sur l'axe horizontal,
 $\|\omega/c\| = \frac{\sqrt{N(\omega)}}{\sqrt{N(c)}} \leq \frac{\sqrt{5}}{10} < \sqrt{5} - 2 = \ell$, et il est clair qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que
 $m(\omega/c) \in \mathcal{H}$. On prend alors $a = m\omega \in J(-19)$.

Maintenant, appliquons le critère 2 pour voir que cet anneau est principal, en montrant que la norme habituelle $N : J(-19) \rightarrow \mathbb{N}$ est un algorithme de primalité sur $J(-19)$. Il suffit alors de vérifier que

$$\forall b \in J(-19) \setminus \{0\}, \quad \forall a \in J(-19) \setminus (b), \\ \exists v, \mu \in J(-19) \text{ tels que } 0 < N(v \frac{a}{b} - \mu) < 1,$$

ce qui signifie, vu de façon géométrique, que pour tout quotient a/b qui n'est pas élément de $J(-19)$, il existe un multiple entier ($\in J(-19)$) de a/b qui appartient à l'ensemble $\mathcal{D} \setminus J(-19)$. Les quotients $a/b \in \mathcal{D} \setminus J(-19)$ satisfont cette propriété et il nous reste à examiner les quotients $a/b \in \mathcal{H}$. Ces éléments peuvent tous s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{b} = (m + \frac{p}{q}) + (n + \frac{u}{v})\omega,$$

où

$$m, n \in \mathbb{Z}, \quad p, q, u, v \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq p < q, \quad 0 < u < v, \\ (p, q) = (u, v) = 1.$$

De plus, si $v \in J(-19)$ est tel que $v(\frac{p}{q} + \frac{u}{v}\omega) \in \mathcal{D} \setminus J(-19)$, alors $v \frac{a}{b} \in \mathcal{D} \setminus J(-19)$, car $v \frac{a}{b}$ est un translaté, par un des sommets du réseau, de $v(\frac{p}{q} + \frac{u}{v}\omega)$.

Ainsi, le problème se réduit aux éléments de la forme $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} + \frac{u}{v}\omega$, où $p, q, u, v \in \mathbb{N}$, $(p, q) = (u, v) = 1$, $0 \leq p < q$, $0 < u < v$, où nous considérons les deux cas suivants:

i) si $q \nmid v$, alors on prend $v = v$, ce qui donne $v \frac{a}{b} = \frac{vp}{q} + u\omega$, où $vp \not\equiv 0 \pmod{q}$, donc $v \frac{a}{b} = m + \frac{r}{q} + u\omega$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $0 < \frac{r}{q} < 1$, et en posant $\mu = m + u\omega \in J(-19)$, on obtient $0 < N(v \frac{a}{b} - \mu) = N(\frac{r}{q}) < 1$;

ii) si $q|v$, alors, comme $(u,v) = 1$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $um \equiv 1 \pmod v$ et on prend $v = m$, ce qui donne $v \frac{a}{b} = \frac{mp}{q} + \frac{um}{v} \omega = \ell + \frac{r_1}{r_2} + (k + \frac{1}{v})\omega$, où $\ell, k \in \mathbb{Z}$, $|\frac{r_1}{r_2}| \leq 1/2$, en posant $\mu = \ell + k\omega$, on obtient

$$0 < N(v \frac{a}{b} - \mu) = N(\frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{v} \omega) = (\frac{r_1}{r_2})^2 + \frac{r_1}{r_2 v} + \frac{5}{v^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2v} + \frac{5}{v^2}$$

et on aura $0 < N(v \frac{a}{b} - \mu) < 1$ si $v > 2$.

Ainsi, on élimine tous les cas sauf ceux où $q|v$ et $v = 2$, donc $a/b = \omega/2$ ou $(1+\omega)/2$. Ces deux éléments sont dans $\mathcal{H}$ et on doit leur trouver un v et un μ convenables. Pour $\omega/2$, on prend $v = 1 + \omega$ et $\mu = -2 + \omega$, et pour $(1+\omega)/2$, on prend $v = \omega$ et $\mu = -2 + \omega$. $\square$

3. D'AUTRES EXEMPLES

La section précédente nous a permis d'illustrer l'application de nos critères dans un cas particulier. En fait, la preuve que nous avons utilisée peut s'étendre à d'autres anneaux d'entiers quadratiques, plus précisément $J(d)$, où $d = -43, -67$ et -163 . Nous n'allons toutefois insister que sur la preuve de la principalité de ces anneaux via le critère 2 et, même si le critère 1 peut encore être appliqué pour montrer leur non euclidianité (en prenant $b = 3, 2, 2$ pour $d = -43, -67, -163$ respectivement), nous allons la démontrer directement. Cette démarche va nous permettre à la fois de présenter la méthode de preuve de leur non euclidianité décrite par Renault [4] et de montrer que leur principalité ne demande pas nécessairement les outils sophistiqués de la théorie des classes d'idéaux.

THÉORÈME 2. Les anneaux $J(-43)$, $J(-67)$ et $J(-163)$ sont principaux et non euclidiens.

DÉMONSTRATION. Pour $d < -11$, $J(d)$ n'est pas euclidien. En effet, supposons que l'un de ces anneaux soit muni d'un algorithme euclidien $\varphi : J(d) \rightarrow \mathbb{N}$ et soit $a \in J(d)$ tel que $\varphi(a) = \min\{\varphi(b) \mid b \in J(d) \setminus \{0, 1, -1\}\}$. Il existe $q, r \in J(d)$ tels que $2 = aq + r$, où $\varphi(r) < \varphi(a)$. Or, $\varphi(a)$ étant minimal, on doit avoir $r = 0, 1$ ou -1 , ce qui donne $2 = aq$, $3 = aq$ ou $1 = aq$, mais cette dernière

équation, qui dit que a est une unité, est impossible, les seules unités de $J(d)$ étant ± 1 . Donc $aq = 2$ ou $aq = 3$, ce qui, utilisant la norme, nous donne $a = \pm 2$ ou $a = \pm 3$. Soit maintenant $b \in J(d)$ choisi comme suit:

$$b = \begin{cases} 1 + \sqrt{d} & \text{si } J(d) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}, \quad (d \equiv 2, 3 \pmod{4}) \\ (1+\sqrt{d})/2 & \text{si } J(d) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(1+\sqrt{d})/2, \quad (d \equiv 1 \pmod{4}). \end{cases}$$

Il existe alors $q, r \in J(d)$ tels que $b = aq + r$, où $\varphi(r) < \varphi(a)$, et par minimalité de $\varphi(a)$, $r = 0, 1$ ou -1 , ce qui donne $q = b/a$, $(b-1)/a$ ou $(b+1)/a \in J(d)$, avec $a = \pm 2$ ou ± 3 . Or aucun de ces éléments n'appartient à $J(d)$. Ainsi $J(d)$ n'est pas euclidien pour $d < -11$, d'où $J(-43)$, $J(-67)$ et $J(-163)$ ne sont pas des anneaux euclidiens.

Voyons maintenant que $J(-43)$, $J(-67)$ et $J(-163)$ sont des anneaux principaux. Nous allons pour cela utiliser le critère 2 et montrer que la norme $N : J(d) \rightarrow \mathbb{N}$ est un algorithme de principalité sur chacun de ces anneaux. Situons-nous dans le cadre géométrique décrit précédemment, sachant que $J(d) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$, où $\omega = (1+\sqrt{d})/2$, $d = -43 \equiv -67 \equiv -163 \equiv 1 \pmod{4}$. D'une façon identique à celle utilisée pour $J(-19)$ (voir Théorème 1), on réduit le problème à trouver un v et un μ convenables pour les quotients de la forme

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} \omega, \quad \text{où } p, q, u, v \in \mathbb{N},$$

$$(p, q) = (u, v) = 1, \quad 0 \leq p < q, \quad 0 < u < v \quad \text{et} \quad q|v.$$

Alors, en prenant $v = m$, où $um \equiv 1 \pmod{v}$, et $\mu = \ell + k\omega$, où

$$v \frac{a}{b} = \ell + \frac{r_1}{r_2} + (k + \frac{1}{v})\omega, \quad \ell, k \in \mathbb{Z}, \quad \left| \frac{r_1}{r_2} \right| \leq \frac{1}{2},$$

on obtient

$$0 < N(v \frac{a}{b} - \mu) = N(\frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{v} \omega) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2v} + \frac{(1-d)}{4v^2},$$

et on aura

$$0 < N(v \frac{a}{b} - \mu) < 1 \quad \text{si} \quad v > \left[\frac{1 + \sqrt{4-3d}}{3} \right],$$

ce qui donne un nombre assez considérable de cas particuliers à examiner (pour $d = -163$, on a $2 \leq v \leq 7$ avec 90 cas). Nous avons alors jugé opportun d'utiliser un ordinateur pour effectuer cette tâche. On trouvera dans le Tableau 1 le résultat obtenu qui consiste en une liste de ces cas exceptionnels ainsi que, pour chacun d'eux, un v et un μ convenables et la norme $N(v \frac{a}{b} - \mu)$ obtenue. On peut évidemment vérifier "à la main" que dans chacun des cas on a bien $0 < N(v \frac{a}{b} - \mu) < 1$. $\square$

Tableau 1

a/b	v	μ	$N(v \frac{a}{b} - \mu)$
D = -43 $2 \leq v \leq 4$			
(1/2)W	1 + W	-6 + W	0.25000
(1/2)+(1/2)W	W	-6 + W	0.25000
(1/3)W	-1 + W	-4	0.11111
(1/3)+(1/3)W	1 + W	-3 + W	0.11111
(2/3)+(1/3)W	W	-3 + W	0.44444
(2/3)W	-1 + W	-8	0.44444
(1/3)+(2/3)W	W	-7 + W	0.11111
(2/3)+(2/3)W	1 + W	-6 + 2W	0.44444
(1/4)W	1	0	0.68750
(1/2)+(1/4)W	1	1	0.81250
(1/4)+(1/4)W	1	0	0.81250
(3/4)+(1/4)W	1	1	0.68750
(3/4)W	1	W	0.68750
(1/2)+(3/4)W	1	W	0.81250
(1/4)+(3/4)W	1	W	0.68750
(3/4)+(3/4)W	1	1 + W	0.81250
D = -67 $2 \leq v \leq 5$			
(1/2)W	1 + W	-9 + W	0.25000
(1/2)+(1/2)W	W	-9 + W	0.25000
(1/3)W	-1 + W	-6	0.11111
(1/3)+(1/3)W	1 + W	-5 + W	0.11111
(2/3)+(1/3)W	W	-5 + W	0.44444
(2/3)W	-1 + W	-12	0.44444
(1/3)+(2/3)W	W	-11 + W	0.11111
(2/3)+(2/3)W	1 + W	-10 + 2W	0.44444
(1/4)W	-1 + W	-5	0.56250
(1/2)+(1/4)W	1 + W	-4 + W	0.06250
(1/4)+(1/4)W	2W	-9 + W	0.25000
(3/4)+(1/4)W	W	-5 + W	0.56250
(3/4)W	-1 + W	-13	0.06250
(1/2)+(3/4)W	1 + W	-13 + 2W	0.56250
(1/4)+(3/4)W	W	-13 + W	0.06250
(3/4)+(3/4)W	2W	-26 + 3W	0.25000
(1/5)W	1	0	0.68000
(1/5)+(1/5)W	1	0	0.76000
(2/5)+(1/5)W	1	0	0.92000
(3/5)+(1/5)W	1	1	0.76000
(4/5)+(1/5)W	1	1	0.68000
(2/5)W	2	W	0.68000
(1/5)+(2/5)W	2	W	0.76000
(2/5)+(2/5)W	W	-7 + W	0.68000
(3/5)+(2/5)W	W	-7 + W	0.04000
(4/5)+(2/5)W	W	-7 + W	0.76000
(3/5)W	2	W	0.68000
(1/5)+(3/5)W	W	-10 + W	0.76000
(2/5)+(3/5)W	W	-11 + W	0.64000
(3/5)+(3/5)W	W	-10 + W	0.68000
(4/5)+(3/5)W	2	2 + W	0.76000
(4/5)W	1	W	0.68000
(1/5)+(4/5)W	1	W	0.68000
(2/5)+(4/5)W	1	W	0.76000
(3/5)+(4/5)W	1	1 + W	0.92000
(4/5)+(4/5)W	1	1 + W	0.76000
D = -163 $2 \leq v \leq 7$			
(1/2)W	1 + W	-21 + W	0.25000
(1/2)+(1/2)W	W	-21 + W	0.25000
(1/3)W	-1 + W	-14	0.11111
(1/3)+(1/3)W	1 + W	-13 + W	0.11111

a/b	v	u	$N(v\frac{a}{b} - u)$
$(2/3)+(1/3)W$		$-13 + W$	0.44444
$(2/3)W$	$-1 + W$	-28	0.44444
$(1/3)+(2/3)W$	W	$-27 + W$	0.11111
$(2/3)+(2/3)W$	$1 + W$	$-26 + 2W$	0.44444
$(1/4)W$	$-1 + W$	-11	0.56250
$(1/2)+(1/4)W$	$1 + W$	$-10 + W$	0.06250
$(1/4)+(1/4)W$	$2W$	$-21 + W$	0.25000
$(3/4)+(1/4)W$	W	$-11 + W$	0.56250
$(3/4)W$	$-1 + W$	-31	0.06250
$(1/2)+(3/4)W$	$1 + W$	$-31 + 2W$	0.56250
$(1/4)+(3/4)W$	W	$-31 + W$	0.06250
$(3/4)+(3/4)W$	$2W$	$-62 + 3W$	0.25000
$(1/5)W$	$-1 + W$	-9	0.64000
$(1/5)+(1/5)W$	$1 + 2W$	$-16 + W$	0.04000
$(2/5)+(1/5)W$	$2 + W$	$-7 + W$	0.16000
$(3/5)+(1/5)W$	$1 + W$	$-8 + W$	0.16000
$(4/5)+(1/5)W$	W	$-8 + W$	0.04000
$(2/5)W$	$-1 + W$	-17	0.36000
$(1/5)+(2/5)W$	$1 + W$	$-16 + W$	0.04000
$(2/5)+(2/5)W$	$1 + 2W$	$-32 + 2W$	0.16000
$(3/5)+(2/5)W$	W	$-17 + W$	0.36000
$(4/5)+(2/5)W$	$2 + W$	$-14 + 2W$	0.64000
$(3/5)W$	$-1 + W$	-25	0.16000
$(1/5)+(3/5)W$	$2 + W$	$-25 + 2W$	0.64000
$(2/5)+(3/5)W$	W	$-25 + W$	0.16000
$(3/5)+(3/5)W$	$1 + 2W$	$-49 + 3W$	0.16000
$(4/5)+(3/5)W$	$1 + W$	$-24 + 2W$	0.04000
$(4/5)W$	$-1 + W$	-33	0.04000
$(1/5)+(4/5)W$	W	$-32 + W$	0.64000
$(2/5)+(4/5)W$	$1 + W$	$-32 + 2W$	0.16000
$(3/5)+(4/5)W$	$2 + W$	$-31 + 3W$	0.36000
$(4/5)+(4/5)W$	$1 + 2W$	$-64 + 4W$	0.64000
$(1/6)W$	$-1 + W$	-7	0.02778
$(1/2)+(1/6)W$	$3W$	$-20 + 2W$	0.25000
$(1/3)+(1/6)W$	$2W$	$-13 + W$	0.44444
$(2/3)+(1/6)W$	$1 + W$	$-6 + W$	0.02778
$(1/6)+(1/6)W$	$3W$	$-20 + W$	0.25000
$(5/6)+(1/6)W$	W	$-7 + W$	0.02778
$(5/6)W$	$-1 + W$	-35	0.69444
$(1/2)+(5/6)W$	$3W$	$-103 + 4W$	0.25000
$(1/3)+(5/6)W$	$1 + W$	$-34 + 2W$	0.02778
$(2/3)+(5/6)W$	$2W$	$-69 + 3W$	0.44444
$(1/6)+(5/6)W$	W	$-35 + W$	0.69444
$(5/6)+(5/6)W$	$3W$	$-103 + 5W$	0.25000
$(1/7)W$	1	0	0.83673
$(1/7)+(1/7)W$	1	0	0.87755
$(2/7)+(1/7)W$	1	0	0.95918
$(3/7)+(1/7)W$	$2W$	$-12 + W$	0.95918
$(4/7)+(1/7)W$	1	1	0.95918
$(5/7)+(1/7)W$	1	1	0.87755
$(6/7)+(1/7)W$	1	1	0.83673
$(2/7)W$	$-1 + W$	-12	0.08163
$(1/7)+(2/7)W$	$-1 + W$	-12	0.87755
$(2/7)+(2/7)W$	$2W$	$-23 + W$	0.95918
$(3/7)+(2/7)W$	$1 + W$	$-12 + W$	0.51020
$(4/7)+(2/7)W$	W	$-12 + W$	0.87755
$(5/7)+(2/7)W$	W	$-12 + W$	0.08163
$(6/7)+(2/7)W$	W	$-12 + W$	0.95918
$(3/7)W$	2	W	0.83673
$(1/7)+(3/7)W$	2	W	0.87755
$(2/7)+(3/7)W$	$1 + W$	$-17 + W$	0.87755
$(3/7)+(3/7)W$	W	$-18 + W$	0.95918
$(4/7)+(3/7)W$	W	$-18 + W$	0.18367
$(5/7)+(3/7)W$	2	$1 + W$	0.95918
$(6/7)+(3/7)W$	2	$2 + W$	0.95918
$(4/7)W$	2	W	0.83673
$(1/7)+(4/7)W$	2	W	0.95918
$(2/7)+(4/7)W$	2	$1 + W$	0.95918
$(3/7)+(4/7)W$	W	$-24 + W$	0.32653
$(4/7)+(4/7)W$	W	$-23 + W$	0.95918
$(5/7)+(4/7)W$	$1 + W$	$-23 + 2W$	0.87755
$(6/7)+(4/7)W$	2	$2 + W$	0.87755
$(5/7)W$	$-1 + W$	-30	0.51020
$(1/7)+(5/7)W$	W	$-29 + W$	0.95918
$(2/7)+(5/7)W$	W	$-30 + W$	0.51020
$(3/7)+(5/7)W$	W	$-29 + W$	0.87755
$(4/7)+(5/7)W$	$1 + W$	$-29 + 2W$	0.08163
$(5/7)+(5/7)W$	$2W$	$-59 + 3W$	0.95918
$(6/7)+(5/7)W$	$-1 + W$	$-30 + W$	0.87755
$(6/7)W$	1	W	0.83673
$(1/7)+(6/7)W$	1	W	0.83673
$(2/7)+(6/7)W$	1	W	0.87755
$(3/7)+(6/7)W$	1	W	0.95918
$(4/7)+(6/7)W$	$2W$	$-70 + 3W$	0.95918
$(5/7)+(6/7)W$	1	$1 + W$	0.95918
$(6/7)+(6/7)W$	1	$1 + W$	0.87755

A titre d'information, nous explicitons ici la méthode employée pour obtenir le Tableau 1: pour d donné, on calcule le maximum pour v et on fait dresser (par ordre lexicographique) la liste des éléments à examiner. Puis, pour chacun de ces éléments, on calcule le produit $v \frac{a}{b}$ et la distance de ce point aux quatre sommets du parallélogramme du réseau le contenant, en engendrant v comme suit: $v = m + n\omega$, où $|m + n| = 1, 2, 3, \dots$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Le premier v rencontré ayant la propriété que l'une de ces quatre distances est < 1 est explicité et le sommet correspondant devient " μ ". Remarquons qu'il arrive parfois que $v = 1$; ceci signifie que le quotient a/b considéré est dans l'ensemble $\mathcal{D} \setminus J(d)$ et alors le μ correspondant est le centre du disque contenant ce point (en fait, cet élément n'avait pas besoin d'être examiné, n'étant pas dans $\mathcal{H}$, cf. Théorème 1). Ce sont de plus les seuls points de la liste ayant cette propriété car l'algorithme utilisé donne toujours le "plus petit" v convenable.

L'auteur désire remercier A. Joyal, G. Labelle et A. Lascu pour leur encouragement et leurs suggestions.

RÉFÉRENCES

- [1] DÉCOSTE, H., *Sur les anneaux euclidiens et principaux*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 1978.
- [2] LASCU, A., *A supra împartirii întregi*, Bulletin Ştiinţific, Secţiunea de Ştiinţe Matematice şi Fizice, T. VII, No 3, pp. 507-515, 1955.
- [3] LEMNLEIN, H., *O evklidovî koltah i koltah glavnîh idealov*, Doklady Akademija nauk SSSR, T. XCVII, No 4, pp. 585-587, 1954.
- [4] RENAULT, G., *Anneaux principaux et anneaux euclidiens*, La gazette des sciences mathématiques du Québec, Vol. 1, No 3, pp. 16-22, 1977.
- [5] SAMUEL, P., *About euclidean rings*, Journal of Algebra, Vol. 19, pp. 282-301, 1971.

Département de mathématiques
et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3C 3J7

Manuscrit reçu le 21 décembre 1980.
Revisé le 18 mai 1981.