

FORMES NORMALES DES MATRICES RECTANGULAIRES DANS UN TOPOS ET APPLICATIONS

Christiane Rousseau

1. Introduction

Dans ce papier, nous nous intéressons au problème de l'équivalence des matrices rectangulaires réelles ou complexes, dans tout topos élémentaire avec objet de nombres naturels. Nous démontrons que toute matrice A , $m \times n$, de rang r est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Notre résultat, interprété dans les topos de faisceaux sur des espaces topologiques (en particulier sur des variétés), sur les divers objets de nombres réels et complexes [3], nous donne une forme normale pour les matrices rectangulaires dépendant de manière continue (C^∞ , analytique, holomorphe) de paramètres. En termes de déformations, nous obtenons une déformation verselle de toute matrice rectangulaire, qui coïncide avec la déformation verselle calculée par Arnold dans [1]. Comme la déformation verselle d'Arnold est minimale, nous obtenons en contrepartie que notre résultat dans le topos est le "meilleur possible" : nous entendons par cela que, dans le cas général, il n'est pas possible de montrer que B a des entrées nulles (B triangulaire par exemple).

Signalons que l'auteur a considéré dans le même esprit le problème de la similitude des matrices symétriques réelles ou hermitiennes dans [4].

2. Equivalence des matrices rectangulaires dans un topos

Nous considérons un topos élémentaire $\underline{E}$ avec objet de nombres naturels. Dans ce topos, nous avons l'objet des réels de Dedekind $\mathbb{R}$ (cf. [2]) et des complexes de Dedekind $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dans un topos de faisceaux sur un espace topologique X , $\text{Fais}(X)$, $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) est le faisceau de germes de fonctions réelles (resp. complexes) continues sur X . Dans le cas où X est une variété, il existe d'autres objets de nombres réels (complexes) qui sont des sous-corps denses de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), convenables pour l'analyse réelle (complexe). Nous obtenons par exemple les faisceaux de germes de fonctions C^∞ (analytiques, holomorphes) sur la variété X qui est elle-même C^∞ (analytique, holomorphe) (cf. [3]). Un tel objet $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) vérifie les propriétés suivantes:

$$\exists x \text{ inversible} \rightarrow x = 0 ,$$

$$x \neq 0 \iff x \text{ inversible}.$$

DEFINITION. Soit A une matrice $m \times n$ à coefficients dans un objet de nombres réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{C}$. $\text{Rang}(A) \geq r$ si et seulement s'il existe un mineur d'ordre r inversible.

THEOREME 1. Si $\text{rang}(A) \geq r$, alors il existe deux matrices P et Q inversibles d'ordres respectifs m et n telles que:

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

PREUVE. Supposons que la sous-matrice A' de A , formée des r premières rangées et colonnes, ait un déterminant inversible:

$$\det A' = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} a_{i1} \det A'(i|1) \neq 0 .$$

Il existe i tel que $a_{i1} \neq 0$. On peut supposer $a_{11} \neq 0$. On fait des opérations rangées et colonnes pour rendre nuls les coefficients de la première rangée et de la première colonne de A , à l'exception de a_{11} . Soit A'' la sous-

matrice obtenue formée des r premières rangées et colonnes. Alors, $\det A' = a_{11} \det A''(1|1) \neq 0$. Donc, $\det A''(1|1) \neq 0$. On itère le procédé. P (resp. Q) s'obtient en faisant subir à I_m (resp. I_n) toutes les opérations rangées (resp. colonnes) effectuées sur A .

3. Interprétation dans les topos de faisceaux

Le Théorème 1 s'interprète comme le théorème suivant:

THÉOREME 2. Soit $A(\lambda)$ une matrice $m \times n$ dépendant de manière continue (C^∞ , analytique, holomorphe) de paramètres réels ou complexes $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, et telle que $\text{rang}(A(\lambda_0)) = r$. Il existe des matrices P et Q inversibles, d'ordre respectifs m et n , et une matrice B , $(m-r) \times (n-r)$, dépendant toutes trois de manière continue (C^∞ , analytique, holomorphe) des paramètres λ dans un voisinage de λ_0 , et telles que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Le même résultat s'interprète aussi en termes de déformation verselle. Une déformation verselle de A_0 est une déformation $A(\lambda)$ de A_0 qui "contient", à équivalence près, toutes les déformations de A_0 , plus précisément:

DÉFINITION. $A : \Lambda \rightarrow \text{Mat}(m \times n)$ est une déformation verselle de A_0 si et seulement si $A(0) = A_0$ et, pour toute déformation, $C : M \rightarrow \text{Mat}(m \times n)$ de A_0 (i.e., $C(0) = A_0$), il existe un voisinage V de 0 dans M et des fonctions $\varphi : V \rightarrow \Lambda$, $P : V \rightarrow \text{Gl}(m, \mathbb{R})$, $Q : V \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, continues (C^∞ , analytiques, holomorphes) telles que $P(0) = I_m$, $Q(0) = I_n$, $\varphi(0) = 0$, et $C(\mu) = P(\mu)A(\varphi(\mu))Q(\mu)$. (Si on s'intéresse plutôt aux matrices complexes, P et Q sont à valeurs dans $\text{Gl}(m, \mathbb{C})$ et $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$ respectivement.)

THÉOREME 3. Soit

$$A_0 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} I_r & & 0 \\ & \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,n-r} \\ 0 & \vdots & & \\ & \lambda_{m-r,1} & \dots & \lambda_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

est une déformation verselle de A_0 .

PREUVE. Ceci découle immédiatement du Théorème 2 et de la définition de déformation verselle.

Arnold a calculé cette déformation verselle dans [1] par des méthodes classiques. Il a obtenu de plus que cette déformation est minimale, i.e., fait intervenir le nombre minimal de paramètres. Ceci nous donne en contrepartie le résultat suivant dans le topos.

THÉOREME 4. Le Théorème 1 est le meilleur résultat possible avec les hypothèses données dans le topos, i.e., nous ne pouvons espérer démontrer que B a des entrées nulles.

RÉFÉRENCES

- [1] ARNOLD, V.I., *Matrices depending on parameters*, Russ. Math. Sur. 26 (1971).
- [2] MULVEY, C.J., *Intuitionistic algebra and representation of rings*, Mem. A.M.S. 148 (1974).
- [3] ROUSSEAU, C., *Nombres réels et complexes dans les topos spatiaux*, Ann. Math. du Québec, vol. III, no 1 (1979).
- [4] ROUSSEAU, C., *Spectral decomposition theorem for real symmetric matrices in topoi and applications*, à paraître dans le Jour. of Pure and Applied Algebra.

Département de mathématiques
et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3J 3C7

Manuscrit reçu le 23 février 1981.