

QUELQUES IDENTITÉS ARITHMÉTIQUES

Armel Mercier

1. Introduction

Soient n et r des entiers tels que $r > 0$ et désignons respectivement par $\phi(r)$ et $\mu(r)$ les fonctions arithmétiques d'Euler et de Möbius. L'identité de Brauer-Rademacher, qui était énoncée par H. Rademacher et démontrée par A. Brauer [1], s'énonce comme suit:

$$(1) \quad \phi(r) \sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=1}} \frac{d}{\phi(d)} \mu(r/d) = \mu(r) \sum_{d|(r,n)} d \mu(r/d) .$$

De nouvelles démonstrations ainsi que certaines généralisations de cette identité furent établies par E. Cohen (voir [2], [3] et [4]). Il y eut aussi McCarthy [5], Subbarao [6] et Szűsz [7] qui obtinrent quelques généralisations de cette remarquable identité. Notons cependant que, dans la plupart des cas, toutes ces généralisations étaient obtenues pour certaines classes de fonctions arithmétiques.

Dans le présent texte, nous établirons quelques identités arithmétiques qui nous permettront d'obtenir une généralisation de (1) dans le cas où les diviseurs d de r ne sont pas nécessairement relativement premiers avec un entier n .

2. Un lemme sur les fonctions multiplicatives

LEMME. Soient ℓ et r des entiers positifs et soient f , g et h des fonctions multiplicatives. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \sum_{d|r} f(d\ell)h(d)g(r/d) \\
&= [f(\ell) + \prod_{\substack{p^a || \ell \\ p^b || r}} \{f(p^a)g(p^b) + f(p^{a+1})h(p)g(p^{b-1}) + \dots + f(p^{a+b-1})h(p^{b-1})g(p) \\
&\quad + f(p^{a+b})h(p^b)\}] \sum_{\substack{d|r_1 \\ (d,\ell)=1}} f(d)h(d)g(r_1/d) ,
\end{aligned}$$

où r_1 est le plus grand diviseur de r tel que $(r_1, \ell) = 1$ et pour $c \geq 1$, $p^c || k$ signifie que $p^c | k$ et $p^{c+1} \nmid k$.

REMARQUE. Si $\ell = 1$ ou $r = 1$, le produit qui se trouve dans l'équation (2) est vide puisqu'il n'y a aucun nombre premier qui divise 1. Dans ce cas, nous assignons la valeur 0 à ce produit et conséquemment nous avons aussi l'égalité. Cette remarque est aussi valide pour les Théorèmes 1 et 2 que nous établirons dans la section suivante.

DEMONSTRATION. Soit $\ell = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ où $a_j \geq 1$ et p_j désigne des nombres premiers distincts. Pour chaque entier positif r , il existe un et un seul entier $b_j \geq 0$, $1 \leq j \leq s$, tel que $r = p_1^{b_1} \dots p_s^{b_s} r_1$, où $(r_1, \ell) = 1$; ainsi pour chaque entier positif d tel que $d|r$, il existe un et un seul entier $i_j \geq 0$, $1 \leq j \leq s$, tel que $d = p_1^{i_1} \dots p_s^{i_s} d_1$ où $d_1 | r_1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{d|r} f(d\ell)h(d)g(r/d) \\
&= \sum_{\substack{0 \leq i_j \leq b_j \\ d_1 | r_1 \\ (r_1, \ell)=1}} f(p_1^{a_1+i_1} \dots p_s^{a_s+i_s} d_1) h(p_1^{i_1} \dots p_s^{i_s} d_1) g\left(\frac{r_1 p_1^{b_1-i_1} \dots p_s^{b_s-i_s}}{d_1}\right)
\end{aligned}$$

et, puisque $d_1 | r_1$, alors $(d_1, \ell) = 1$ et ainsi l'équation précédente devient:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d|r} f(d\ell)h(d)g(r/d) \\
 = & \sum_{0 \leq i_j \leq b_j} f(p_1^{a_1+i_1} \dots p_s^{a_s+i_s})h(p_1^{i_1} \dots p_s^{i_s})g(p_1^{b_1-i_1} \dots p_s^{b_s-i_s}) \sum_{\substack{d|r_1 \\ (d,\ell)=1}} f(d)h(d)g(r_1/d) \\
 = & [f(\ell) + \prod_{\substack{p^a || \ell \\ p^b || r}} \{f(p^a)g(p^b) + f(p^{a+1})h(p)g(p^{b-1}) + \dots \\
 & + f(p^{a+b})h(p^b)\}] \sum_{\substack{d|r_1 \\ (d,\ell)=1}} f(d)h(d)g(r_1/d) ,
 \end{aligned}$$

où r_1 est le plus grand diviseur de r tel que $(r_1, \ell) = 1$. Ceci achève la démonstration de notre résultat.

3. Quelques identités concernant les fonctions multiplicatives

THÉORÈME 1. Soient ℓ , n et r des entiers positifs tels que $\ell|n$ et $\ell|r$ et soient f et g deux fonctions multiplicatives. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} f(d)g(r/d) \\
 = & [f(\ell) + \prod_{\substack{p^a || \ell \\ p^b || \frac{r}{\ell}}} \{f(p^a)g(p^b) + f(p^{a+1})h(p)g(p^{b-1}) + \dots + f(p^{a+b})h(p^b)\}] \\
 & \times \sum_{\substack{d|r_1 \\ (d,n)=1}} f(d)g(r_1/d) ,
 \end{aligned}$$

où r_1 est le plus grand diviseur de $\frac{r}{\ell}$ tel que $(r_1, \ell) = 1$ et

$$h(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } (m, \frac{n}{\ell}) = 1 \\ 0 & \text{autrement .} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Nous avons $n = n'\ell$, $d = d'\ell$ et $r = r'\ell$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} f(d)g(r/d) &= \sum_{\substack{d'|r' \\ (d',n')=1}} f(d'\ell)g(r'/d') \\ &= \sum_{d'|r'} f(d'\ell)h(d')g(r'/d') \end{aligned}$$

où

$$h(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } (m, \frac{n}{\ell}) = 1 \\ 0 & \text{autrement ;} \end{cases}$$

et, d'après le lemme, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} f(d)g(r/d) \\ &= \sum_{d|\frac{r}{\ell}} f(d\ell)h(d)g\left(\frac{r/\ell}{d}\right) \\ &= [f(\ell) + \prod_{\substack{p^a \parallel \ell \\ p^b \parallel \frac{r}{\ell}}} \{f(p^a)g(p^b) + f(p^{a+1})h(p)g(p^{b-1}) + \dots + f(p^{a+b})h(p^b)\}] \\ &\quad \times \sum_{\substack{d|r_1 \\ (d,\ell)=1}} f(d)h(d)g(r_1/d) , \end{aligned}$$

où r_1 est le plus grand diviseur de $\frac{r}{\ell}$ tel que $(r_1, \ell) = 1$. En utilisant la définition de la fonction h , il est aisé d'obtenir le résultat demandé.

COROLLAIRE 1. Soient ℓ , n et r des entiers positifs tels que $\ell|n$ et $\ell|r$. Si $(\ell, \frac{r}{\ell}) = 1$, alors pour toutes fonctions multiplicatives f et g , nous avons

$$(4) \quad \sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} f(d)g(r/d) = f(\ell) \sum_{\substack{d|\frac{r}{\ell} \\ (d,n)=1}} f(d)g\left(\frac{r/\ell}{d}\right).$$

DÉMONSTRATION. Conséquence immédiate du théorème précédent.

THÉOREME 2. Soient f et g deux fonctions multiplicatives et soient ℓ , k et r des entiers positifs tels que $d = (k, \ell) | r$. Alors nous avons

$$(5) \quad \sum_{\substack{n|r \\ n \equiv \ell(k)}} f(n)g(r/n) \\ = \frac{1}{\phi(k/d)} \sum_{\chi} \left[\frac{1}{\chi(\ell/d)} (f(d) + \prod_{\substack{p^a || d \\ p^b || \frac{r}{d}}} \{f(p^a)g(p^b) + f(p^{a+1})\chi(p)g(p^{b-1}) + \dots \right. \\ \left. + f(p^{a+b})\chi(p^b)\} \right) \sum_{\substack{n|r_1 \\ (n,d)=1}} f(n)\chi(n)g(r_1/n) \right],$$

où r_1 est le plus grand diviseur de $\frac{r}{d}$ tel que $(r_1, d) = 1$ et χ désigne les caractères de Dirichlet mod k/d .

DÉMONSTRATION. Soit $d = (k, \ell)$. Alors $\ell = \ell' d$ et $k = k' d$ et nous remarquons que la condition $n \equiv \ell(k)$ est équivalente à $n = dn'$ et $n' \equiv \ell'(k')$, $(\ell', k') = 1$. Ainsi nous avons

$$\sum_{\substack{n|r \\ n \equiv \ell(k)}} f(n)g(r/n) = \sum_{\substack{n|r \\ n=dn' \\ n' \equiv \ell'(k')}} f(n)g(r/n) = \sum_{\substack{n'|r' \\ n' \equiv \ell'(k')}} f(n'd)g(r'/n'),$$

où $r = dr'$. Désignons par χ les caractères mod k/d . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n|r \\ n \equiv \ell(k)}} f(n)g(r/n) &= \frac{1}{\phi(k/d)} \sum_{n|r'} \{f(n'd)g(r'/n')\} \sum_{\chi} \frac{1}{\chi(\ell/d)} \chi(n') \\ &= \frac{1}{\phi(k/d)} \sum_{\chi} \left\{ \frac{1}{\chi(\ell/d)} \sum_{n|r'} f(dn)\chi(n)g(r'/n) \right\}, \end{aligned}$$

et, en utilisant le lemme, nous obtenons le résultat escompté.

A l'aide du Théorème 2, il est aisé de démontrer le résultat suivant.

COROLLAIRE 2. Soient k , ℓ et r des entiers positifs tels que $d = (k, \ell) | r$. Si $(d, \frac{r}{d}) = 1$, alors pour toutes fonctions multiplicatives f et g , nous avons

$$(6) \quad \sum_{\substack{n|r \\ n \equiv \ell(k)}} f(n)g(r/n) = \frac{f(d)}{\phi(k/d)} \sum_{\chi} \left\{ \frac{1}{\chi(\ell/d)} \sum_{\substack{n|\frac{r}{d} \\ (n,d)=1}} f(n)\chi(n)g\left(\frac{r/d}{n}\right) \right\}.$$

Une autre conséquence intéressante du Théorème 2 est donnée par le résultat suivant.

COROLLAIRE 3. Soient k et r des entiers positifs tels que $k | r$. Si $(k, \frac{r}{k}) = 1$, alors pour toutes fonctions multiplicatives f et g , nous avons

$$\sum_{\substack{n|r \\ n \equiv 0(k)}} f(n)g(r/n) = f(k) \sum_{\substack{n|\frac{r}{k} \\ (n,k)=1}} f(n)g\left(\frac{r/k}{n}\right).$$

4. Quelques exemples

1) Soit f une fonction multiplicative telle que $f(p) = f(p^a)$, $a \in \mathbb{N}$ et soient ℓ , n et r des entiers positifs tels que $\ell | n$ et $\ell | r$. Alors l'équation (3) devient

$$\begin{aligned} (7) \quad \sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} f(d)\mu(r/d) \\ = [f(\ell) + \sum_{\substack{p^a || \ell \\ p^b || \frac{r}{\ell}}} \{f(p^a)(h(p^b) - h(p^{b-1}))\}] \sum_{\substack{d|r_1 \\ (d,n)=1}} f(d)\mu(r_1/d). \end{aligned}$$

En particulier, si $f(n) = \frac{n}{\phi(n)}$, l'équation (7) s'écrit sous la forme

$$\sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} \frac{d}{\phi(d)} \mu(r/d) \\ = \left[\frac{\ell}{\phi(\ell)} + \prod_{\substack{p|\ell \\ p^b \parallel \frac{r}{\ell}}} \left\{ \frac{p}{p-1} (h(p^b) - h(p^{b-1})) \right\} \right] \sum_{\substack{d|r_1 \\ (d,n)=1}} \frac{d}{\phi(d)} \mu(r_1/d) ,$$

et, en utilisant l'équation (1), nous obtenons

$$(8) \quad \sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} \frac{d}{\phi(d)} \mu(r/d) \\ = \frac{\mu(r_1)}{\phi(r_1)} \left[\frac{\ell}{\phi(\ell)} + \prod_{\substack{p|\ell \\ p^b \parallel \frac{r}{\ell}}} \left\{ \frac{p}{p-1} (h(p^b) - h(p^{b-1})) \right\} \right] \sum_{d|(r_1,n)} d \mu(r_1/d) ,$$

où r_1 est le plus grand diviseur de $\frac{r}{\ell}$ tel que $(r_1, \ell) = 1$ et

$$h(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } (m, \frac{n}{\ell}) = 1 \\ 0 & \text{autrement .} \end{cases}$$

Il est intéressant de constater que, pour des entiers ℓ , n et r tels que $\ell|n$, $\ell|r$ et $(\ell, \frac{r}{\ell}) = 1$, l'équation (8) devient

$$\sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} \frac{d}{\phi(d)} \mu(r/d) = \frac{\ell \mu(r/\ell)}{\phi(r)} \sum_{d|(\frac{r}{\ell}, n)} d \mu(\frac{r/\ell}{d}) .$$

2) L'équation (7) nous permet d'obtenir l'identité suivante

$$(9) \quad \sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} 2^{\omega(d)} \mu(r/d) \\ = \left[2^{\omega(\ell)} + \prod_{\substack{p|\ell \\ p^b \parallel \frac{r}{\ell}}} 2(h(p^b) - h(p^{b-1})) \right] \sum_{\substack{d|r_1 \\ (d,n)=1}} 2^{\omega(d)} \mu(r_1/d) ,$$

où ℓ , r et n sont des entiers positifs tels que $\ell|n$ et $\ell|r$, $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$, r_1 est le plus grand diviseur de $\frac{r}{\ell}$ tel que $(r_1, \ell) = 1$ et

$$h(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } (m, \frac{n}{\ell}) = 1 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Si, de plus, $(\ell, \frac{r}{\ell}) = 1$, alors l'équation (9) devient

$$\sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=\ell}} 2^{\omega(d)} \mu(r/d) = 2^{\omega(\ell)} \sum_{\substack{d|\frac{r}{\ell} \\ (d,n)=1}} 2^{\omega(d)} \mu(\frac{r/\ell}{d}).$$

3) Par une méthode semblable, nous pouvons démontrer les énoncés suivants:

a) Soient k et r des entiers positifs tels que $k|r$. Alors

$$\sum_{\substack{n|r \\ n \equiv 0(k)}} \frac{n}{\phi(n)} \mu(r/d) = \frac{\mu(r_1)}{\phi(r_1)} \frac{k}{\phi(k)} \sum_{d|(r_1, k)} d \mu(r_1/d),$$

où r_1 est le plus grand diviseur de $\frac{r}{k}$ tel que $(r_1, k) = 1$. Si de plus $(k, \frac{r}{k}) = 1$, alors l'équation précédente devient

$$\sum_{\substack{n|r \\ n \equiv 0(k)}} \frac{n}{\phi(n)} \mu(r/n) = \frac{k \mu(r/k)}{\phi(r)}.$$

b) Soient k et r des entiers positifs tels que $k|r$. Si $(k, \frac{r}{k}) = 1$, alors

$$\sum_{\substack{n|r \\ n \equiv 0(k)}} 2^{\omega(n)} \mu(r/n) = 2^{\omega(k)} \sum_{\substack{n|\frac{r}{k} \\ (n,k)=1}} 2^{\omega(n)} \mu(\frac{r/k}{n}),$$

et, en utilisant le théorème principal de [6], cette dernière équation peut aussi s'écrire sous la forme

$$\sum_{\substack{n|r \\ n \equiv 0(k)}} 2^{\omega(n)} \mu(r/n) = 2^{\omega(k)} \mu^2(r/k).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRAUER, A. et RADEMACHER, H., *Aufgabe 31, Iber*, Deutsch. Math. Verein. 35 (1926), 94-95 (supplément).
- [2] COHEN, E., *The Brauer-Rademacher identity*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 30-33.
- [3] COHEN, E., *Arithmetical inversion formulas*, Canadian J. of Math. 12 (1960), 399-409.
- [4] COHEN, E., *Representations of even functions (mod r) : Cauchy products*, Duke Math. J. 26 (1959), 165-182.
- [5] MCCARTHY, P.J., *Some remarks on arithmetical identities*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 539-548.
- [6] SUBBARAO, M.V., *The Brauer-Rademacher identity*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 135-138.
- [7] SZÜSZ, P., *Once more the Brauer-Rademacher identity*, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 570-571.

Département des sciences pures
 Université du Québec à Chicoutimi
 Chicoutimi, Québec
 Canada
 G7H 2B1

Manuscrit reçu le 15 octobre 1980.
 Révisé le 15 février 1981.