

SUR LA PROPRIÉTÉ DE DARBOUX

P. Jiménez et M. Soler

1. Introduction

A.A. Liapunov [5] a prouvé que l'image d'une mesure bornée sans atome à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie est un ensemble convexe. Ce résultat est appliqué par C. Olech [8] au cas des mesures non atomiques et non bornées, dont l'image est de dimension finie. Si l'image de la mesure est un sous-ensemble du corps des nombres réels, le résultat de A.A. Liapunov implique que l'espace de mesure a la propriété de Darboux. Le cas non borné a été résolu par A. Dvoretzky, A. Wald et J. Wolfowitz [2].

Si les mesures ont des atomes, l'étude est bien différente et il est en relation avec l'étude de la propriété de Darboux pour les séries de termes positifs. S. Marcus obtient dans [6] des conditions nécessaires et suffisantes pour le cas borné. Le cas non borné a été étudié par J. Garay et M. Soler dans [3] obtenant des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, mais pas une condition nécessaire et suffisante.

B. Rodríguez-Salinas étudie dans [9] une généralisation de la propriété de Darboux appelée θ -propriété de Darboux, et il donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une mesure finie ait la θ -propriété de Darboux dans le cas borné. Pour des utilisations postérieures, nous énoncerons ci-dessous deux théorèmes de B. Rodríguez-Salinas [9]:

THÉOREME 1. Soit μ une mesure sur X telle que $\mu(X) = 1$ et $X = \bigcup_{i=0}^n A_i$, où les A_i sont des ensembles mesurables tels que $\mu(A_i) = \alpha_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, A_0 ne contient point d'atomes et les A_i restants sont des atomes tels que $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$. Alors μ a la θ -propriété de Darboux si et seulement si

$$\theta(\alpha_k) \leq \alpha_0 + \beta_k$$

pour $1 \leq k \leq n$ où $\beta_k = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i$ pour $1 \leq k < n$ et $\beta_n = 0$.

THÉOREME 2. Soit μ une mesure sur X telle que $\mu(X) = 1$ et $X = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$, où les A_i sont des ensembles mesurables tels que $\mu(A_i) = \alpha_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, A_0 ne contient point d'atome et les ensembles restants A_i sont des atomes tels que $(\alpha_i)_{i=1}^{+\infty}$ est non croissante. Alors μ a la θ -propriété de Darboux si et seulement si

$$\theta(\alpha_n) \leq \alpha_0 + \beta_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\beta_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \alpha_i$.

Le but du présent travail est l'étude de la θ -propriété de Darboux dans le cas non borné et son application à l'étude de la propriété de Darboux pour les mesures non bornées et les séries divergentes de termes positifs.

2. Sur la propriété de Darboux pour des mesures non bornées

Soit (E, Σ, μ) un espace de mesure (positive) et θ une fonction non négative et non décroissante, définie sur l'intervalle $I = [0, \mu(E))$ et vérifiant les conditions suivantes:

$$C_1 : \theta(\alpha) \leq \alpha \text{ pour tout } \alpha \in I.$$

$$C_2 : \theta(\alpha) \leq \theta(\alpha') + \alpha - \alpha' \text{ pour } \alpha, \alpha' \in I \text{ tels que } \alpha' \leq \alpha.$$

DÉFINITION. On dit que la mesure μ a la θ -propriété de Darboux (dorénavant nous écrirons simplement θ -P.D.) si, pour chaque $\alpha \in I$, il existe un ensemble mesurable A tel que

$$\theta(\alpha) \leq \mu(A) \leq \alpha.$$

Dans le cas particulier où $\theta(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in I$, la définition précédente coïncide avec le concept usuel de la propriété de Darboux.

DÉFINITION. Etant donné un espace de mesure (E, Σ, μ) , on peut définir une relation d'équivalence dans l'ensemble des atomes de mesure finie de l'espace, de la manière suivante (voir J. Garay et M. Soler [3]):

On dit que deux atomes de mesure finie A et B sont équivalents, et on écrit $A \sim B$, quand $\mu(A \cap B) \neq 0$. Evidemment, $\mu(A) = \mu(B)$ si les atomes A et B sont équivalents.

THEOREME 1. Soit (E, Σ, μ) un espace de mesure tel que $\mu(E) = +\infty$ et $E = F \cup G$, étant F purement non atomique et G purement atomique. Si $\mathcal{A}$ est la famille des atomes de mesure finie de E , et $\mathcal{A}^* = \{A_i\}$ est l'espace quotient $\mathcal{A}/\sim$, on pose $\alpha_i = \mu(A'_i)$, où A'_i appartient à la classe A_i , et $\alpha_0 = \mu(F)$. Alors on a:

CONDITIONS SUFFISANTES

1.1. Si $\alpha_0 = +\infty$, alors μ a la θ -P.D.

1.2. Supposons que $0 < \alpha_0 < +\infty$ et qu'il existe $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq (\alpha_i)_{i \in I}$ qui vérifie

$$\limsup \alpha_n < +\infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que:

$$(1.1) \quad \limsup \alpha_n \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i + \alpha_0 .$$

Si $\beta_k = \sum_{i=k+1}^m \alpha_i$, $\beta_m = 0$ et la relation

$$(1.2) \quad \theta(\alpha_k) \leq \alpha_0 + \beta_k$$

se vérifie pour $0 \leq k \leq m$, alors μ a la θ -P.D.

1.3. Supposons que $\alpha_0 = 0$ et qu'on peut trouver $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$(\alpha'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\alpha_i)_{i \in I}$ telles que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha'_n = +\infty,$$

et

$$\limsup \alpha'_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n .$$

Si $\beta_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$ ($n \in \mathbb{N}$) et

$$(1.3) \quad \theta(\alpha_n) \leq \beta_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors μ a la θ -P.D.

CONDITIONS NÉCESSAIRES

1.4. Soit $0 \leq \alpha_0 < +\infty$. Si μ a la θ -P.D. et X est un sous-ensemble de E tel que $\mu(X) < +\infty$, $F \subseteq X$ et pour tout $\alpha_i \leq \mu(X)$ il existe un atome $A_i \subseteq X$ avec $\mu(A_i) = \alpha_i$, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la famille des atomes contenus dans X , ordonnés de manière que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($= (\mu(A_n))$) soit non décroissante, alors

$$\theta(\alpha_n) \leq \alpha_0 + \beta_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{où } \beta_n = \sum_{i \geq n+1} \alpha_i .$$

DÉMONSTRATION. 1.1. Voir A. Dvoretzky, A. Wald et J. Wolfowitz [2] ou J. Garay et M. Soler [3].

1.2. Soit $\alpha \in [0, +\infty)$. Alors on peut construire par récurrence une suite $(\lambda_n)_{n=m+1}^{+\infty}$ de nombres réels de la façon suivante:

$$\lambda_n = 1 \quad \text{si} \quad \sum_{k=m+1}^{n-1} \lambda_k \alpha_k + \alpha_n \leq \alpha$$

et

$$\lambda_n = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{k=m+1}^{n-1} \lambda_k \alpha_k + \alpha_n > \alpha .$$

Dans ces conditions, on a clairement que

$$\gamma = \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k \leq \alpha .$$

En plus, $\alpha - \gamma \leq \alpha_0 + \beta_0$ parce que si $\alpha_0 + \beta_0 < \alpha - \gamma$, on aurait que $\limsup \alpha_n < \alpha - \gamma$ et pourtant, on pourrait trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n < \alpha - \gamma$ pour tout $n \geq n_0$, et alors $\lambda_n = 1$ pour $n \geq n_0$, et

$$\alpha - \gamma \in \sum_{k=m+1}^{+\infty} \lambda_k \alpha_k = +\infty$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent,

$$\alpha - \gamma \in [0, \alpha_0 + \beta_0] .$$

Soit $X = F \cup \bigcup_{k=1}^m A_k$, où les A_k sont des atomes avec $\mu(A_k) = \alpha_k$ pour $1 \leq k \leq m$. Du Théorème 1 de B. Rodríguez-Salinas [9], on déduit l'existence d'un ensemble mesurable $A \subseteq X$ tel que

$$\theta(\alpha - \gamma) \leq \mu(A) \leq \alpha - \gamma .$$

Considérons maintenant

$$B = A \cup \bigcup_{\substack{k \geq m+1 \\ \lambda_k = 1}} A_k .$$

Alors

$$\begin{aligned} \alpha \geq \mu(B) &= \mu(A) + \mu\left(\bigcup_{\substack{k \geq m+1 \\ \lambda_k = 1}} A_k\right) \\ &\geq \theta(\alpha - \gamma) + \gamma \\ &= \theta(\alpha - \gamma) + \alpha - (\alpha - \gamma) \\ &\geq \theta(\alpha) \end{aligned}$$

et μ a la θ -P.D.

1.3. D'une façon similaire à la démonstration précédente, on construit une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en employant $(\alpha'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si

$$\gamma = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \lambda_k \alpha'_k$$

alors

$$\alpha - \gamma \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n .$$

Soit $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, où les A_n sont des atomes avec $\mu(A_n) = \alpha_n$. Du Théorème 2 de B. Rodríguez-Salinas [9], on déduit l'existence de $A \subseteq X$ tel que

$$\theta(\alpha - \gamma) \leq \mu(A) \leq \alpha - \gamma .$$

Maintenant, pour finir la démonstration, il suffit de procéder comme dans le cas précédent.

1.4. Soit $\tilde{\mu}$ la restriction de μ à $\Sigma = \tilde{\Sigma} \cap X$ et $\tilde{\theta}$ la restriction de l'application θ à $[0, \mu(X))$. On va prouver d'abord que la mesure $\tilde{\mu}$ a la $\tilde{\theta}$ -P.D. Comme μ a la θ -P.D. pour $0 \leq \alpha < \mu(X)$, on peut trouver $A \in \Sigma$ tel que

$$\theta(\alpha) \leq \mu(A) \leq \alpha .$$

Evidemment, $A = (A \cap F) \cup (A \cap G)$ et

$$\mu(A) = \mu(A \cap F) + \mu(A \cap G) ,$$

étant donné que $E = F \cup G$ et $F \cap G = \emptyset$.

D'autre part, $A \cap F \in \tilde{\Sigma}$ et comme G est purement atomique, $A \cap G$ est formé par des atomes A_i (au plus une quantité dénombrable) tels que $\mu(A_i) \leq \mu(X)$. Soit B_i un atome équivalent à A_i contenu dans X . Clairement,

$$\mu(A \cap G) = \Sigma \mu(A_i) = \Sigma \mu(B_i) = \mu(B \cap G)$$

où $B = \cup B_i$. Ainsi,

$$C = (A \cap F) \cup (B \cap G) \in \tilde{\Sigma}$$

et en plus

$$\tilde{\theta}(\alpha) = \theta(\alpha) \leq \mu(C) = \mu(A) \leq \alpha .$$

Par conséquent, $\tilde{\mu}$ a la $\tilde{\theta}$ -P.D. Maintenant, il n'y a plus qu'à appliquer le Théorème 2 de B. Rodríguez-Salinas [9].

COROLLAIRE 2. Dans les conditions et notations du Théorème 1, avec $\alpha_0 = 0$, si l'on peut trouver deux suites $(\alpha_n) \subset (\alpha_i)_{i \in I}$ et $(\gamma_n) \subseteq (\alpha_n)$ telles que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n < +\infty , \quad \limsup \alpha_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n ,$$

et

$$\theta(\gamma_n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \gamma_k \quad (n \in \mathbb{N}) ,$$

alors μ a la θ -P.D.

DÉMONSTRATION. Elle se déduit facilement du Théorème 1.3 parce que la suite

$(\delta_n) = (\alpha_n) \setminus (\gamma_n)$ est telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n = +\infty$$

et

$$\limsup \delta_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n.$$

REMARQUE. Dans les notations et conditions du Théorème 1.2, excepté la condition (1.2), et s'il existe $A_i \in \mathcal{A}_i$ pour $i = 1, \dots, m$, tels que l'espace $(\tilde{X}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ a la $\tilde{\theta}$ -P.D., où $\tilde{X} = F \cup \bigcup_{i=1}^m A_i$, $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cap X$, $\tilde{\mu}$ est la restriction de μ à $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\theta}$ est la restriction de l'application θ à $[0, \mu(\tilde{X}))$. Alors, du Théorème 1 de B. Rodríguez-Salinas [9], on déduit que la condition (1.2) se vérifie.

3. Applications à la propriété de Darboux pour les séries

DÉFINITION. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série de termes positifs et θ une fonction non négative et non décroissante définie sur l'intervalle $I = [0, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n)$ qui vérifie les conditions C_1 et C_2 . On dit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a la θ -propriété de Darboux (en abrégé, θ -P.D.) si, pour chaque $\alpha \in I$, on peut trouver une sous-série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$ telle que

$$\theta(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n_k} \leq \alpha.$$

Dans le cas particulier où θ est l'identité, la définition précédente coïncide avec le concept usuel de propriété de Darboux pour les séries de termes positifs.

Deux résultats classiques sur la propriété de Darboux pour les séries de termes positifs sont: le Théorème de Kakeya (pour des séries convergentes, voir S. Kakeya [4]) et le Théorème de Banarjee et Lahiri (pour des séries divergentes, voir C.R. Banerjee et B.K. Lahiri [1]).

THÉOREME (Kakeya). Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est une série convergente de termes posi-

tifs tels que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ et

$$a_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

alors, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a la propriété de Darboux.

THÉOREME (Banerjee-Lahiri). Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série divergente de termes positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Alors, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a la propriété de Darboux.

Les deux théorèmes suivants se rapportent à la θ -propriété de Darboux pour les séries. Le premier théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série convergente de termes positifs ait la θ -P.D., tandis que, dans le deuxième théorème, on trouve une condition suffisante pour qu'une série divergente de termes positifs ait la θ -propriété de Darboux.

THÉOREME 3. Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est une série convergente de termes positifs et $a_1 \geq a_2 \geq \dots$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a la θ -propriété de Darboux si et seulement si

$$(a_n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION. Elle se déduit facilement du Théorème 2 de [9].

THÉOREME 4. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série divergente à termes positifs. Supposons qu'il existe une sous-série convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$ ayant la θ -propriété de

Darboux¹ et telle que

$$\limsup a_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}.$$

Alors, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a la θ -propriété de Darboux.

DEMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du Corollaire 2.

REMARQUE. Dans le cas particulier où θ est l'identité, le Théorème 3 contient le Théorème de Kakeya, mettant en lumière que la condition suffisante donnée par Kakeya est aussi nécessaire. Ceci n'est pas vrai pour la condition donnée dans le Théorème de Banerjee-Lahiri, comme le prouve facilement l'exemple suivant:

Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, où

$$a_{2n} = \frac{1}{2}^n \text{ et } a_{2n+1} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Cette série est une série divergente, à termes positifs, qui a la propriété de Darboux, mais la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'existe pas.

L'exemple précédent prouve aussi qu'on ne peut pas déduire le Théorème 4 d'après le Théorème de Banerjee-Lahiri, même dans le cas où θ est l'identité.

4. Applications à la propriété de Darboux pour des mesures positives non bornées

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace de mesure positive et non bornée. J. Garay et M. Soler donnent, dans [3], sous les mêmes conditions générales que le Théorème 1, la condition suffisante suivante:

¹ D'après le Théorème 3, cette condition est équivalente à $\theta(a_{n_k}) \leq \sum_{j=k+1}^{+\infty} a_{n_j}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

"Si $0 \leq \alpha_0 < +\infty$, et s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\alpha_i)_{i \in I}$ qui vérifie les deux conditions suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_n \alpha_n = 0,$$

alors μ a la propriété de Darboux".

D'après le Théorème 1.2, on peut déduire, quand $0 < \alpha_0 < +\infty$, une condition suffisante (qui sera donnée ci-dessous) qui est plus faible que la condition donnée (dans ce cas) par J. Garay et M. Soler dans [3].

THEOREME 5. Dans les conditions et notations du Théorème 1 avec $0 < \alpha_0 < +\infty$, et s'il existe $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\alpha_i)_{i \in I}$ telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty \quad \text{et} \quad \limsup_n \alpha_n < +\infty.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\limsup_n \alpha_n \leq \sum_{n=1}^m \alpha_n + \alpha_0.$$

Si

$$\alpha_k \leq \alpha_0 + \sum_{n=k+1}^m \alpha_n \quad (k < m)$$

et $\alpha_m \leq \alpha_0$, alors la mesure μ a la propriété de Darboux.

DEMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du Théorème 1.2, où θ est l'identité.

REMARQUE. Voyons maintenant que la condition précédente est plus faible que la condition imposée dans [3]. En effet, soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_n \alpha_n = 0.$$

Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n \leq \alpha_0$ pour tout $n \geq n_0$. Considérons la suite $(\alpha_n)_{n \in n_0}$, qui, évidemment, est telle que

$$\sum_{n \geq n_0} \alpha_n = +\infty \quad \text{et} \quad \limsup \alpha_n < +\infty.$$

Soit $m = n_0$. Ainsi on a

$$\limsup \alpha_n = \lim \alpha_n = 0 \leq \alpha_0 + \alpha_{n_0}$$

et, en plus,

$$\alpha_0 \leq \alpha_0 + \alpha_{n_0} \quad \text{et} \quad \alpha_{n_0} \leq \alpha_0.$$

Donc, toute série qui vérifie le premier énoncé a une sous-série qui vérifie le second et, par conséquent, la seconde condition est plus faible que la première. Il est évident qu'elle est strictement plus faible.

THÉOREME 6. Dans les conditions et notations du Théorème 1 avec $\alpha_0 = 0$ et supposée l'existence de deux suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\alpha_i)_{i \in I}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n < +\infty, \quad \limsup \alpha_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n$$

et

$$\gamma_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \gamma_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Alors la mesure μ a la propriété de Darboux.

DÉMONSTRATION. C'est un cas particulier du Corollaire 2.

RÉFÉRENCES

- [1] BANARJEE, C.R. and LAHIRI, B.K., *On subseries of divergent series*, Amer. Math. Monthly 71, 7 (1964), 767-768.

- [2] DVORETZKY, A., WALD, A. and WOLFOWITZ, J., *Relations among certain ranges of vector measures*, Pacific J. Math. 1 (1951), 59-74.
- [3] GARAY, J. et SOLER, M., *Sobre la propiedad de Darboux para medidas positivas*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. (à paraître).
- [4] KAKEYA, S., *On the partial sums of an infinite series*, Science Reports of the Tohoku Imperial University 1, 3 (1914), 159-163.
- [5] LIAPUNOV, A.A., *Sur les fonctions-vecteurs complètement additives*, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 8 (1940), 465-478.
- [6] MARCUS, S., *Atomic measures and Darboux property*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 7, 2 (1962), 327-332.
- [7] MARCUS, S., *On the Darboux property for atomic measures and for series with positive terms*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 11, 6 (1966), 647-652.
- [8] OLECH, C., *On the range of an unbounded vector-valued measure*, Math. Systems Theory 2 (1968), 251-256.
- [9] RODRÍGUEZ-SALINAS, B., *Las medidas atómicas y la θ -propiedad de Darboux*, No II Centenario da Acad. das Ci. de Lisboa, Estudos de Algebra, Geometria e Analise, Lisboa (1978), 209-219.

Departamento de Teoría de Funciones
 Facultad de C. Matemáticas
 Universidad Complutense
 Ciudad Universitaria
 Madrid-3 (Espagne)

Manuscrit reçu le 18 août 1980.
 Révisé le 28 mars 1981.