

UNE EXTENSION D'UN RÉSULTAT DE PITMAN
EN THÉORIE DES CHAÎNES DE MARKOV ET EN THÉORIE DU RENOUVELLEMENT¹
Gaston Giroux

1. Introduction

Pour obtenir ses résultats sur les taux de convergence uniforme des chaînes de Markov, Pitman [4] démontre d'abord un résultat qu'il qualifie de "très important" et dont il dit de la démonstration qu'elle est assez tortueuse. Nous allons, dans ce travail, étendre le résultat de Pitman. Cela sera possible grâce au fait que nous allons développer une démonstration des plus directe. Le résultat de Pitman, ainsi que l'extension que nous en faisons, peut aussi bien s'énoncer dans le cadre des chaînes de Markov que dans le cadre de la théorie du renouvellement. C'est en le regardant dans ce dernier cadre que nous pouvons obtenir une démonstration plus simple. Notre extension vient du fait que nous ne supposons pas $\mu_2 = \mu_1$ dans l'énoncé suivant:

Si $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ sont deux suites indépendantes, de variables indépendantes de mêmes mesures de probabilités aperiodiques respectives μ_1 et μ_2 , de r -ièmes moments finis, variables à valeurs dans N_* , alors le r -ième moment de la longueur de la première coïncidence est finie si et seulement si les r -ièmes moments de μ_3 et μ_4 sont finis. Où μ_3 , μ_4 sont les mesures de probabilités des départs Z_1 , Z_2 , départs indépendants de $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$.

¹ Cette recherche a été conduite dans le cadre d'un projet de recherches subventionné par le C.R.S.N.G. (développement régional).

Dans cet énoncé, $N_* = \{1, 2, \dots\}$, et une mesure apériodique sur N_* signifie que $\text{p.g.d.c.}\{n \geq 1 : \mu\{n\} > 0\} = 1$. Pour arriver à démontrer cette proposition, nous devons d'abord constater que des résultats préliminaires sur les matrices couples simples sont encore vrais dans notre contexte et démontrer un lemme faisant intervenir des temps d'arrêt.

Nous croyons que notre démonstration répond au souhait de Pitman [4; p. 224].

2. Le résultat de Pitman étendu

Soit I un ensemble discret (c.-à-d. un ensemble fini ou dénombrable). I sera dit l'ensemble des états. Soit P une matrice sur $I \times I$ telle que

- i) $p_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in I \times I$,
- ii) $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$, $i \in I$; P est alors dite une matrice des transitions.

Depuis Kolmogorov, nous savons bien que pour chaque mesure de probabilité μ sur $(I, \mathcal{P}(I))$, il existe un espace de probabilité $(I^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{\mu})$ tel que les projections $(X_n)_{n \geq 0}$ forment une chaîne de Markov homogène sur I de matrice des transitions P et de mesure de probabilité initiale μ ; où $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant les ensembles de la forme $\{\omega \in I^{\mathbb{N}} : X_0(\omega) = i_0, \dots, X_n(\omega) = i_n\}$, $n \geq 0$, $i_0, \dots, i_n \in I$ fixés, c'est-à-dire $\mathcal{A} = \sigma((X_n)_{n \geq 0})$.

P est dite irréductible si, pour chaque $(i, j) \in I \times I$, il existe un entier $n > 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$; où $p_{ij}^{(n)}$ est l'élément (i, j) de la n -ième puissance de P .

P est dite apériodique si

$$\text{p.g.c.d.}\{n > 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\} = 1, \quad i \in I. \quad (1.1)$$

Dans le cas irréductible, P est apériodique dès que (1.1) est vérifié pour un $i \in I$. La matrice couple (simple) $P \otimes Q$, de deux matrices des transitions, est définie par

$$\tilde{P}_{(i,j),(k,\ell)} = P_{ik} Q_{j\ell} .$$

Cela revient à ce que, pour l'espace de probabilité $(I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}, A \otimes A, \tilde{P}_{\eta})$, où $\tilde{P}_{\eta}$ est déterminée par

$$\tilde{P}_{\eta} \{ \{ (X_0^{(1)}, X_0^{(2)}) = (i, j) \} \cap (A^{(1)} \times A^{(2)}) \} = \eta(i, j) P_i(A^{(1)}) P_j(A^{(2)}) ,$$

$$A^{(\alpha)} \in \sigma((X_n^{(\alpha)})_{n \geq 1}) , \quad \alpha = 1 \text{ et } 2 ,$$

($P_i = P_{\delta_i}$, δ_i étant la mesure de probabilité telle que $\delta_i(i) = 1$), les deux suites de projections $(X_n^{(1)})_{n \geq 1}$, $(X_n^{(2)})_{n \geq 1}$ soient indépendantes et que $(X_n^{(1)}, X_n^{(2)})_{n \geq 0}$ soit une chaîne de Markov homogène de matrice des transitions $P \otimes Q$ et de mesure de probabilité initiale η ; η étant, bien entendu, une mesure de probabilité sur $(I \times I, P(I \times I))$.

Il est alors possible de définir les premiers temps de passage suivants:

$$T_{(i,i)}^{(\omega)} = \min\{n > 0 : (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}) = (i, i)\} ,$$

$${}^{(\alpha)}T_i^{(\omega)} = \min\{n > 0 : X_n^{(\alpha)} = i\} , \quad \alpha = 1 \text{ ou } 2 ,$$

(avec la convention $\min(\emptyset) = \infty$).

Pitman [4, (4.15)] a démontré le cas particulier $Q = P$ de la proposition suivante:

PROPOSITION. Soit $r \geq 1$, un entier. Soit P et Q des matrices de transitions irréductibles et apériodiques telles que

$$E_i[({}^{(\alpha)}T_i)^r] < \infty , \quad \alpha = 1 \text{ et } 2 .$$

Alors,

$$\tilde{E}_{\eta}[(T_{(i,i)})^r] < \infty ,$$

si et seulement si

$$E_{\eta_\alpha} [({}^{(\alpha)}T_1)^r] < \infty, \quad \alpha = 1 \text{ et } 2.$$

(Où $\tilde{E}_\eta$ correspond à la matrice couple $P \otimes Q$ et η_1, η_2 sont les marginales de η .)

La direction "seulement si" est immédiate puisque ${}^{(\alpha)}T_i \leq T_{(i,i)}$. Pour arriver à la démonstration de la direction "si" de cette proposition, nous devons tout d'abord constater que le résultat suivant est vrai. Il est une extension facile de Pitman [4, (2.5)].

LEMME 1. Soient P et Q deux matrices des transitions irréductibles et apériodiques. Alors $P \otimes Q$ est irréductible et apériodique. Si de plus P et Q sont récurrentes positives, alors $P \otimes Q$ est récurrente positive.

3. Démonstration

Nous allons, de la même manière que dans Pitman [4], traduire en théorie du renouvellement, la proposition de Pitman étendue. Puis en donner une démonstration directe. La retraduction se fait alors de façon naturelle.

Commençons par quelques considérations en théorie du renouvellement.

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, et soient $Y^{(1)} = (Y_n^{(1)})_{n \geq 1}$, $Y^{(2)} = (Y_n^{(2)})_{n \geq 1}$ deux suites indépendantes, de variables aléatoires indépendantes de mêmes mesures de probabilités respectives μ_1 et μ_2 , variables à valeurs dans N_* .

Soit L la longueur de la première coïncidence de $(\sum_{m=1}^n Y_m^{(1)})_{n \geq 1}$ et $(\sum_{m=1}^n Y_m^{(2)})_{n \geq 1}$:

$$L(\omega) : = \sum_{m=1}^{N^{(1)}(\omega)} Y_m^{(1)}(\omega) = \sum_{m=1}^{N^{(2)}(\omega)} Y_m^{(2)}(\omega),$$

où, pour $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$,

$$N^{(\alpha)}(\omega) := \min\{n \geq 1 : (\exists n' \geq 1) \left(\sum_{m=1}^n Y_m^{(\alpha)}(\omega) = \sum_{m=1}^{n'} Y_m^{(\beta)}(\omega) \right)\}.$$

Soit, pour les mêmes (α, β)

$$F_n^{(\alpha)} = \sigma(Y_1^{(\alpha)}, \dots, Y_n^{(\alpha)}, (Y_m^{(\beta)})_{m \geq 1}).$$

Alors $N^{(\alpha)}$ est manifestement un temps d'arrêt de $(F_n^{(\alpha)})_{n \geq 1}$.

$$\text{LEMME 2. } \theta_{N^{(1)}} Y^{(1)} := \left(Y_{N^{(1)}+n}^{(1)} \right)_{n \geq 1}, \quad \theta_{N^{(2)}} Y^{(2)} := \left(Y_{N^{(2)}+n}^{(2)} \right)_{n \geq 1} \text{ sont}$$

deux suites indépendantes de variables indépendantes de mêmes mesures de probabilités respectives μ_1 et μ_2 .

DÉMONSTRATION. $N^{(\alpha)}$ étant un temps d'arrêt de $(F_n^{(\alpha)})_{n \geq 1}$, en utilisant la partition $(\{N^{(\alpha)} = m\})_{m \geq 1}$, nous obtenons que $\left(Y_{N^{(\alpha)}+n}^{(\alpha)} \right)_{n \geq 1}$ est formée de variables indépendantes de même mesure μ_α .

Mais, comme de plus

$$\{N^{(1)} = m_1, N^{(2)} = m_2\} \in \sigma(Y_1^{(1)}, \dots, Y_{m_1}^{(1)}, Y_1^{(2)}, \dots, Y_{m_2}^{(2)}),$$

il s'ensuit, de la même manière, que les deux suites sont indépendantes.

Soit, pour $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$N_{k, \ell}^{(1)}(\omega) := \min\{n \geq 1 : (\exists n' \geq 1) (k + \sum_{m=1}^n Y_m^{(1)}(\omega) = \ell + \sum_{m=1}^{n'} Y_m^{(2)}(\omega))\}$$

$$N_{k, \ell}^{(2)}(\omega) := \min\{n' \geq 1 : (\exists n \geq 1) (k + \sum_{m=1}^n Y_m^{(1)}(\omega) = \ell + \sum_{m=1}^{n'} Y_m^{(2)}(\omega))\}.$$

Ce sont manifestement des temps d'arrêt de $(F_n^{(\alpha)})_{n \geq 1}$, et il est facile de voir que le Lemme 2 se généralise pour ces temps d'arrêts. Posons

$$L_{k, \ell}(\omega) := \sum_{m=1}^{N_{k, \ell}^{(2)}(\omega)} Y_m^{(2)}(\omega) + \ell,$$

et de façon plus générale $\theta_{N,M}^{L_{k,\ell}}$ la variable obtenue de cette manière mais à partir des suites $\theta_N^{Y^{(1)}}$, $\theta_M^{Y^{(2)}}$, où N, M sont des temps aléatoires.

Notons encore $\theta_{N,M}^{N_{k,\ell}^{(\alpha)}}$ les temps aléatoires analogues aux $N_{k,\ell}^{(\alpha)}$, mais pour les suites $\theta_N^{Y^{(1)}}$, $\theta_M^{Y^{(2)}}$. Comme nous avons

$$\sum_{m=1}^{N(\omega)} Y_m^{(1)}(\omega) + k = \sum_{m=1}^{M(\omega)} Y_m^{(2)}(\omega)$$

lorsque

$$N = N_{1,0}^{(1)} + \theta_{N_{1,0}^{(1)}, N_{1,0}^{(2)}} N_{k-1,0}^{(1)}$$

et

$$M = N_{1,0}^{(2)} + \theta_{N_{1,0}^{(1)}, N_{1,0}^{(2)}} N_{k-1,0}^{(2)},$$

il suit de la définition de $N_{k,0}^{(2)}$ que

$$N_{k,0}^{(2)} \leq N_{1,0}^{(2)} + \theta_{N_{1,0}^{(1)}, N_{1,0}^{(2)}} N_{k-1,0}^{(2)},$$

et que

$$L_{k,0} \leq L_{1,0} + \theta_{N_{1,0}^{(1)}, N_{1,0}^{(2)}} L_{k-1,0}.$$

Il suit alors du Lemme 2 généralisé que

$$\mathbb{E}[L_{k,0}] \leq k\mathbb{E}[L_{1,0}].$$

Remarquons encore que pour $k \geq \ell$

$$L_{k,\ell} = L_{k-\ell,0} + \ell.$$

Alors, pour $r \in \mathbb{N}_*$, grâce à l'inégalité

$$(a_1 + \dots + a_m)^r \leq m^{r-1} (a_1^r + \dots + a_m^r), \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}_+,$$

nous avons pour $k > \ell$:

$$\mathbb{E}[L_{k,\ell}^r] \leq (k+1)^r \mathbb{E}[L_{1,0}^r] + (k+1)^r \ell^r.$$

Pour énoncer notre extension dans le cadre de la théorie du renouvellement, il nous faut encore introduire les notations suivantes:

Soit Z_1, Z_2 des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ de mesure conjointe η . Soit

$$N_\eta^{(1)} := \min\{n \geq 1 : (\exists n' \geq 1) (Z_1 + \sum_{m=1}^n Y_m^{(1)} = Z_2 + \sum_{m=1}^{n'} Y_m^{(2)})\}$$

$$N_\eta^{(2)} := \min\{n' \geq 1 : (\exists n \geq 1) (Z_1 + \sum_{m=1}^n Y_m^{(1)} = Z_2 + \sum_{m=1}^{n'} Y_m^{(2)})\}$$

et

$$L_\eta(\omega) := Z_2(\omega) + \sum_{m=1}^{N_\eta^{(2)}(\omega)} Y_m^{(2)}(\omega).$$

Notons μ_3, μ_4 les marginales de η et $a_\alpha^{(r)} := \sum_{n \geq 1} n^r \mu_\alpha(n)$.

PROPOSITION. Soient $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ deux suites indépendantes, de variables indépendantes de mêmes mesures discrètes apériodiques respectives μ_1 et μ_2 , variables à valeurs dans $\mathbb{N}_*$.

Soient Z_1, Z_2 deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}_*$, indépendantes de $Y^{(1)}, Y^{(2)}$, de mesure conjointe discrète η .

Si $a_\alpha^{(r)} < \infty$, $\alpha = 1, 2, 3$ et 4 , alors

$$\mathbb{E}[L_\eta^r] < \infty.$$

DÉMONSTRATION. $\mathbb{E}[L_\eta^r] = \sum_{n,m} \eta(n,m) \mathbb{E}[L_\eta^r \mid Z_1 = n, Z_2 = m]$. Mais

$$\mathbb{E}[L_\eta^r \mid Z_1 = n, Z_2 = m] = \mathbb{E}[L_{n,m}^r].$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_{\eta}^r] &= \sum_k \eta(k,k) \mathbb{E}[L_{k,k}^r] + \sum_{k>\ell} \eta(k,\ell) \mathbb{E}[L_{k,\ell}^r] + \sum_{k<\ell} \eta(k,\ell) \mathbb{E}[L_{k,\ell}^r] \\
&\leq 2^{r-1} \sum_k \eta(k,k) (\mathbb{E}[L_{0,0}^r] + k^r) + \sum_{k>\ell} \eta(k,\ell) ((k+1)^r \mathbb{E}[L_{1,0}^r] + (k+1)^r \ell^r) \\
&\quad + \sum_{k<\ell} \eta(k,\ell) ((\ell+1)^r \mathbb{E}[L_{0,1}^r] + k^r (\ell+1)^r) \\
&\leq 2^{r-1} (\mathbb{E}[L_{0,0}^r] + a_3^{(r)}) + 2^r [a_3^{(r)} \mathbb{E}[L_{1,0}^r] + a_3^{(r)} a_4^{(r)}] \\
&\quad + 2^r [a_4^{(r)} \mathbb{E}[L_{0,1}^r] + a_3^{(r)} a_4^{(r)}] .
\end{aligned}$$

Mais, pour $r = 1$, nous savons que $a_{\alpha}^{(1)} < \infty$, $\alpha = 1$ et 2 , implique $\mathbb{E}[L_{0,0}] < \infty$, $\mathbb{E}[L_{1,0}] < \infty$, et $\mathbb{E}[L_{0,1}] < \infty$, et le résultat est démontré pour $r = 1$. (Cela résulte du fait que la chaîne couple des chaînes associées, Pitman [4, p. 222] est dans ce cas irréductible et récurrente positive, grâce au Lemme 1.) Notons π_1 et π_2 les mesures de probabilité stationnaires des chaînes associées et

$$b_{\alpha}^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^r \pi_{\alpha}(n), \quad \alpha = 1 \text{ et } 2 .$$

Supposons le résultat vrai pour r .

Par Kemeny-Snell-Knapp [3, 9.65], $a_{\alpha}^{(r+1)} < \infty$ implique $b_{\alpha}^{(r)} < \infty$. Donc, en prenant $\eta = \pi_1 \otimes \pi_2$, nous avons

$$\mathbb{E}[L_{\pi_1, \pi_2}^r] < \infty$$

par notre hypothèse d'induction. Mais par Kemeny-Snell-Knapp [3, 9.65, 9.67] appliqué à la chaîne couple ($\pi_1 \otimes \pi_2$ est la mesure de probabilité stationnaire de la chaîne couple) nous obtenons

$$\mathbb{E}[L_{0,0}^{r+1}] < \infty, \quad \mathbb{E}[L_{1,0}^{r+1}] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[L_{0,1}^{r+1}] < \infty$$

et l'inégalité donne alors le résultat.

En retraduisant notre proposition en théorie des chaînes de Markov, nous avons

$$Z_{\alpha} = (\alpha)_{T_i}$$

$$L_{\eta} = T_{(i,i)}$$

et la direction "si" de l'extension du résultat de Pitman est démontré.

Nous tenons à remercier l'un des examinateurs pour nous avoir signalé une erreur dans une première version de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GIROUX, G., *Une nouvelle démonstration d'un résultat de Pitman en théorie des chaînes de Markov et en théorie du renouvellement*, Rapport de recherche EROS-7, Université de Sherbrooke, 1980.
- [2] HOËL, P.G., PORT, S.C. and STONE, C.J., *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin, Boston, 1972.
- [3] KEMENY, L.G., SNELL, J.L. and KNAPP, A.W., *Denumerable Markov Chains*, Graduate Texts in Mathematics 40, Springer-Verlag, New York 1976.
- [4] PITMAN, J.W., *Uniform Rates of Convergence for Markov Chain Transition Probabilities*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 29, 1974, 193-227.

Département de mathématiques
et d'informatique
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec
J1K 2R1

Manuscrit reçu le 2 août 1980.
Révisé le 30 janvier 1981.