

CARRÉS EXACTS DE HILTON DANS DES CONTEXTES NON ABÉLIENS

Luc Van den Bril

Dans le cadre des catégories abéliennes, P. Hilton [10] a introduit la notion de carré exact (généralisation commune des carrés cartésiens et cocartésiens et des suites exactes). Cette notion a été étendue au cas d'une catégorie non additive (voir, par exemple, M. Grandis [6] et les suites exactes de P. Jaffard et G. Poitou [12] dans les catégories à objet nul). Nous caractérisons ici les carrés exacts dans $\mathbf{ENS}$ et dans la catégorie $\mathbf{Gr}$ des groupes. Ce dernier résultat redonne aussitôt la caractérisation des épimorphismes de groupes. On introduit ensuite une notion de carré exact dans le contexte d'une 2-catégorie quelconque qui généralise celle donnée dans $\mathbf{CAT}$ par R. Guitart [7].

A cet effet, on complète la notion d'adjonction entre 1-morphismes au moyen du concept plus symétrique d'*adjonction entre carrés multiplicatifs*. Dans une 2-catégorie représentable, les carrés exacts seront alors des carrés multiplicatifs "adjoints" aux carrés commas et engloberont les carrés commas, les extensions absolues et les adjonctions partielles.

On développe alors un calcul d'exactitude dans le contexte d'une 2-catégorie représentable en utilisant la notion plus stricte de *carré fortement exact* et on établit la possibilité de substituer des carrés exacts aux carrés commas pour le calcul des extensions ponctuelles.

Ce dernier résultat intervient de manière essentielle dans les extensions de théories cohomologiques (J.L. Mac Donald [15]). On retrouve aussi plusieurs

propriétés des 2-catégories représentables établies par R. Street [19]. Ainsi, le lemme de Yoneda s'exprime comme une exactitude [19]. On montre que les carrés localement exacts, cas particulier des réseaux exacts de [7], recouvrent les extensions J-absolues de Y. Diers [4] et permettent de caractériser dans une 2-catégorie les foncteurs opaques [7]. (D'après le théorème du zig-zag, un foncteur bijectif sur les objets est épimorphique ssi il est opaque.) On montre aussi qu'un foncteur J est copleinement fidèle ssi il est opaque et tout objet de son codomaine est J-projectif. On trouvera des applications à la théorie de la déduction dans les 2-catégories dans [8], et aux catégories avec modèles dans [21].

Ce travail constitue une partie de la thèse de doctorat de l'Université d'Amiens préparée sous la direction de R. Guitart dont les très nombreuses suggestions et critiques ont été indispensables.

I CARRÉS EXACTS DANS UNE CATÉGORIE

1. RAPPELS ET REMARQUES

1.1. Dans une catégorie abélienne, le carré

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{t} & Y \\
 s \downarrow & (*) & \downarrow v \\
 X & \xrightarrow{u} & B
 \end{array}$$

est dit exact (P. Hilton [10]) ssi la suite

$$A \xrightarrow{(s,t)} X \oplus Y \xrightarrow{\langle u, -v \rangle} B$$

est exacte en $X \oplus Y$.

1.2. Proposition (Grandis [6]). Le carré (*) est exact ssi il est commutatif et vérifie la condition:

(H) pour tout $X \xleftarrow{m} R \xrightarrow{n} Y$ et $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$, $um = vn$ et $fs = gt$ entraînent $fm = gn$.

1.3. *Définition.* Dans une catégorie arbitraire, le carré (*) sera appelé *exact* ssi il est commutatif et vérifie la condition (H).

1.4. *Remarques.*

1° Un carré faiblement cartésien (cocartésien) est toujours exact.

2° Dans une catégorie à objet nul 0,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$

est exact ssi la suite $A \xrightarrow{s} X \xrightarrow{u} B$ est exacte au sens de Jaffard-Poitou [12].

3° En général, la juxtaposition horizontale ou verticale ne conserve pas l'exactitude (voir le cas de ENS, cf. §2, où les relations difonctionnelles ne se composent pas).

1.5. *Notation.* On adoptera, ici et plus loin, les conventions typographiques de [7]. Le carré (*) sera donc représenté par $s \xrightarrow[u]{t} v$.

2. CARACTÉRISATION DES CARRÉS EXACTS DANS ENS

2.1. On dira qu'une relation $r = (Y, R, X)$ avec $R \subset Y \times X$ est difonctionnelle (Riguet [18], Thiébaud [20]) si elle vérifie les conditions équivalentes ci-dessous

- (i) $r = u^{-1} \circ v$ où u et v sont des applications.
- (ii) $r \circ r^{-1} \circ r = r$ ou $r \circ r^{-1} \circ r \subset r$.
- (iii) Il existe un carré bicartésien $s \xrightarrow[u]{t} v$ avec $r = s \circ t^{-1}$.

2.2. *Proposition.* Le carré (*) est exact ssi la plus petite relation difonctionnelle contenant $s \circ t^{-1}$ est $u^{-1} \circ v$, c'est-à-dire ssi "ux = vy" équivaut à "il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $x = sa_1$, $ta_1 = ta_2$, $sa_2 = sa_3$, $ta_3 = ta_4$, ..., $sa_{n-1} = sa_n$ et $ta_n = y$ ".

3. CARACTÉRISATION DES CARRÉS EXACTS DANS GR

3.1. *Définition.* Une relation $r = (Y, R, X)$ (R est donc un sous-groupe de $Y \times X$) sera appelée *dinormale* si $\ker r = \{y : (y, 1) \in R\}$ et $\ker r^{-1} = \{x : (1, x) \in R\}$ sont des sous-groupes normaux de Y et X . Toute relation normale est dinormale et $s \circ t^{-1}$ est dinormale ssi $s(\ker t)$ et $t(\ker s)$ sont normaux.

3.2. *Théorème.* Sont équivalents

- (i) r est dinormale.
- (ii) $r = u^{-1} \circ v$ où u et v sont des morphismes de Gr .
- (iii) Il existe un carré bicartésien $s \xrightarrow[t]{t} v$ avec $r = s \circ t^{-1}$.

Démonstration. (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) est facile. Pour établir (i) $\Rightarrow$ (iii), on écrit $r = s \circ t^{-1}$ avec $\{s, t\}$ monomorphe. Il suffit alors de montrer que, pour une somme amalgamée $s \xrightarrow[t]{t} v$, $s \circ t^{-1} = u^{-1} \circ v$. Lorsque s ou t est surjective, c'est évident. Lorsque s et t sont des injections, la propriété résulte de $u(X) \cap v(Y) = us(A) = vt(A)$. (Bourbaki, Algèbre, Ch. 1, p. 83, corollaire, proposition 5.) Dans le cas général, on applique les résultats précédents aux factorisations épi-mono de s et t .

3.3. *Proposition.* Le carré (*) est exact ssi la plus petite relation dinormale contenant $s \circ t^{-1}$ est $u^{-1} \circ v$.

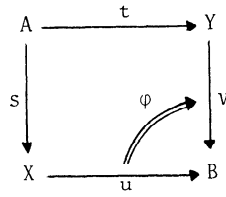
3.4. *Corollaire.* Dans Gr , tout épimorphisme est une surjection. En effet, s est un épimorphisme ssi $s \xrightarrow[1]{s} 1$ est exact, c'est-à-dire ssi $s \circ s^{-1} = 1$ ($s \circ s^{-1}$ est dinormale).

II CARRÉS EXACTS DANS UNE 2-CATÉGORIE

1. CARRÉS MULTIPLICATIFS

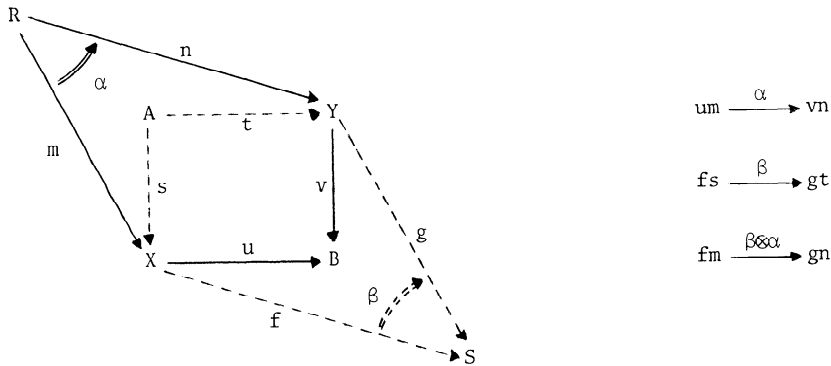
1.1. *Définition.* Dans une 2-catégorie K , un *carré multiplicatif* sur les objets X et Y , consiste en la donnée de

(i)



encore noté $\varphi : s \xrightarrow{t} v$.

(ii) Pour tout $\text{span } X \xleftarrow{m} R \xrightarrow{n} Y$ et pour tout $\text{cospan } X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$, une application $[fs, gt] \times [um, vn] \rightarrow [fm, gn] : (\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ f, g, m, n \circ \alpha$ ou, plus brièvement, $\beta \otimes \alpha$



les données vérifiant:

(i) (BILINÉARITÉ): Pour tout $\alpha \cdot \beta$, pour tout $\overline{R} \xrightarrow{p} R$ et $S \xrightarrow{q} \overline{S} : (q\beta) \otimes (\alpha p) = q(\beta \otimes \alpha)p$.

(ii) (UNITARITÉ): Pour tout $\alpha, \beta : \varphi \otimes \alpha = \alpha$ et $\beta \otimes \varphi = \beta$.

1.2. Exemples.

1° $\text{ids} : s \xrightarrow{1} s$ avec $\beta \otimes \alpha = \beta n \circ f \alpha$.

2° $\text{ids} : 1 \xrightarrow{s} 1$ avec $\beta \otimes \alpha = g \alpha \circ \beta m$.

3° Un carré comma $\varphi : s \xrightarrow{t} v$ avec $\beta \otimes \alpha = \beta a$ où a est induit par α (propriété universelle des objets commas).

4° Un carré cocomma $\varphi : s \xrightarrow[u]{t} v$ avec $\beta \otimes \alpha = b\alpha$ où b est induit par β (propriété universelle des objets cocommas).

5° En particulierisant aux catégories, on retrouve la notion de carré exact définie dans le paragraphe précédent.

1.3. *Définition.* Les carrés multiplicatifs sur X et Y , $\varphi : s \xrightarrow[u]{t} v$ et $\psi : p \xrightarrow[i]{q} j$ seront dits *adjoints* s'il existe des 2-morphismes $u p \xrightarrow{\lambda} v q$ et $i s \xrightarrow{\mu} j t$ tels que

$$(1) \quad \text{Pour tout } u m \xrightarrow{\alpha} v n \text{ et } f s \xrightarrow{\beta} g t$$

$$(\beta \otimes_{\varphi} \lambda) \otimes_{\psi} (\mu \otimes_{\varphi} \alpha) = \beta \otimes_{\varphi} \alpha$$

$$(2) \quad \text{Pour tout } i m \xrightarrow{\varepsilon} j n \text{ et } f p \xrightarrow{\eta} g q$$

$$(\eta \otimes_{\psi} \mu) \otimes_{\varphi} (\lambda \otimes_{\psi} \varepsilon) = \eta \otimes_{\psi} \varepsilon$$

On écrira alors $\varphi \vdash \psi \quad (\mu, \lambda)$.

1.4. *Exemple.* Soit les morphismes $A \xrightarrow{\ell} B$ et $B \xrightarrow{r} A$ et les carrés multiplicatifs $\text{id}_{\ell} : 1 \xrightarrow[\ell]{\ell} 1$ et $\text{id}_r : r \xrightarrow[1]{1} r$. On a $\text{id}_{\ell} \vdash \text{id}_r \quad (\mu, \lambda)$ ssi $\ell \vdash r \quad (\mu, \lambda)$ (adjonction usuelle des 1-morphismes).

1.5. *Théorème.* Dans l'ensemble des carrés multiplicatifs sur X et Y , la relation d'adjonction est une équivalence. De plus $\varphi \vdash \psi \quad (\mu, \lambda)$ équivaut à $\lambda \vdash \mu \quad (\psi, \varphi)$.

2. CARRÉS EXACTS

2.1. *Définition.* Soit dans une 2-catégorie représentable le carré $\varphi : s \xrightarrow[u]{t} v$ et le carré comma $\psi : d_0 \xrightarrow[u]{d_1} v$. On dira que φ est un carré exact à droite si pour tout $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$, l'application $[\text{fd}_0, \text{gd}_1] \rightarrow [\text{fs}, \text{gt}]$, $\beta \mapsto \beta \otimes_{\varphi} \psi = \beta h$ (h étant induit par φ) est bijective. Cela revient à dire qu'il existe sur φ une structure de carré multiplicatif telle que $\varphi \vdash \psi \quad (\varphi, \psi)$. Cette structure est alors nécessairement unique.

2.2. *Théorème.* $\varphi : s \xrightarrow[t]{u} v$ est exact à droite ssi φ est un carré multiplicatif sur X et Y vérifiant: pour tout carré multiplicatif $\psi : p \xrightarrow[q]{i} j$ sur X et Y et pour tout $um \xrightarrow{\alpha} vn$, $is \xrightarrow{\beta} jt$, $fp \xrightarrow{\gamma} gq$,

$$\gamma \otimes_{\psi} (\beta \otimes_{\varphi} \alpha) = (\gamma \otimes_{\psi} \beta) \otimes_{\varphi} \alpha.$$

Cela permet une définition des carrés exacts à droite dans les 2-catégories arbitraires.

2.3. *Définitions.* On dira que $\varphi : s \xrightarrow[t]{u} v$ est exact à gauche s'il est exact à droite dans la 2-catégorie obtenue en renversant le sens des 1-morphismes c'est-à-dire, φ est multiplicatif et pour tout carré multiplicatif $\psi : p \xrightarrow[q]{i} j$

$$(\beta \otimes_{\varphi} \alpha) \otimes_{\psi} \partial = \beta \otimes_{\varphi} (\alpha \otimes_{\psi} \partial).$$

Enfin, on dira que φ est exact s'il est exact à gauche et à droite.

Un carré comma (cocomma) est toujours exact à droite (à gauche) et un carré bicomma est toujours exact.

2.4. *Proposition.* Soit dans une 2-catégorie $\varphi : s \xrightarrow[t]{u} v$, $\alpha : p \xrightarrow[q]{u} v$ et $\beta : s \xrightarrow[t]{i} j$. Si φ est exact à droite (gauche), alors α est exact à droite (gauche) ssi pour tout $\bullet \xrightarrow{i} \bullet \xleftarrow{j} \bullet$, $\beta \rightarrow \beta \otimes_{\varphi} \alpha$ est bijective et β est exact à droite (gauche) ssi pour tout $\bullet \xleftarrow{p} \bullet \xrightarrow{q} \bullet$, $\alpha \rightarrow \beta \otimes_{\varphi} \alpha$ est bijective.

2.5. *Théorème.* Avec les notations de la proposition précédente, posons $\psi = \beta \otimes_{\varphi} \alpha$. Dans ces conditions, si trois carrés parmi ceux définis par α , β , φ et ψ sont exacts à droite (gauche), il en est de même pour le quatrième.

2.6. *Définition et proposition.* On appellera 2-catégorie *symétrique*, une 2-catégorie représentable et coreprésentable où les conditions équivalentes ci-dessous sont vraies

- (i) les carrés commas sont exacts;
- (ii) les carrés cocommas sont exacts;
- (iii) exact à gauche équivaut à exact à droite;

- (iv) le cocomma d'un comma est bicomma c'est-à-dire $s \xrightarrow[t]{u} v$ comma et $s \xrightarrow[t]{i} j$ cocomma entraînent $s \xrightarrow[t]{i} j$ comma;
- (v) le comma d'un cocomma est bicomma.

Les catégories à sommes amalgamées et produits fibrés et la 2-catégorie CAT sont symétriques.

2.7. *Proposition.* Sont équivalentes, dans une 2-catégorie symétrique,

- (i) $\varphi : s \xrightarrow[t]{u} v$ est multiplicatif;
- (ii) φ est exact;
- (iii) $\varphi = k v h$ où v est bicomma, vh est cocomma et kv est comma.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) a été démontré par R. Guitart [7] dans le cas de CAT et (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) par P. Hilton [10] dans le cadre des catégories abéliennes.

3. CARRÉS EXACTS DANS UNE 2-CATÉGORIE REPRÉSENTABLE

On se place maintenant dans une 2-catégorie représentable où les carrés exacts à droite seront simplement appelés exacts.

3.1. *Théorème.*

1° Un carré comma est toujours exact.

2° $\text{ids} : s \xrightarrow[1]{1} s$ et $\text{ids} : 1 \xrightarrow[s]{s} 1$ sont toujours exacts. C'est le lemme de Yoneda-Street énoncé dans [19].

3° $\varphi : s \xrightarrow[t]{1} v$ est exact ssi (v, φ) est une extension inductive absolue de s le long de t .

4° $\varphi : s \xrightarrow[u]{t} 1$ est exact ssi (u, φ) est une extension projective absolue de t le long de s .

5° $\varphi : 1 \xrightarrow[u]{t} v$ est exact ssi $t \xrightarrow[u]{1} v(\varphi)$ c'est-à-dire adjonction partielle ou relèvement absolu.

6^0 $\varphi : s \xrightarrow{1_u} v$ est exact ssi $u \xrightarrow{v} s(\varphi)$ c'est-à-dire une adjonction partielle ou relèvement absolu.

7^0 $\varepsilon : 1 \xrightarrow{s} t$ est exact ssi $s \dashv t(\varepsilon, ?)$.

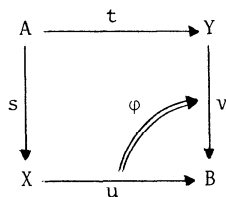
8^0 $\eta : t \xrightarrow{1_s} 1$ est exact ssi $s \dashv t(?, \eta)$.

9^0 $\text{ids} : 1 \xrightarrow{1_s} s$ est exact ssi s est pleinement fidèle.

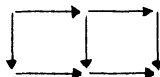
10^0 $\text{ids} : s \xrightarrow{1_s} 1$ est exact ssi s est copleinement fidèle c'est-à-dire $\theta \dashv \dashv \theta s$ sont bijectives.

3.2. *Remarque.* Dans la 2-catégorie CAT , les carrés exacts se composent horizontalement et verticalement (voir R. Guitart [7]). Cette propriété ne subsiste pas dans une 2-catégorie représentable arbitraire (cf. §I.1.4). Le but des propositions qui suivent est de montrer qu'il en est cependant ainsi dans plusieurs cas particuliers.

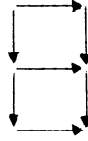
3.3. *Théorème et définition.* Si dans une 2-catégorie représentable $\mathbb{K}$, le carré



est transformé en carré exact de CAT par tous les 2-foncteurs représentables, $\mathbb{K} \xrightarrow{[\mathbb{K} \mathbb{K}, \cdot]} \text{CAT}$, alors φ définit un carré exact (il suffit que $\mathbb{K}(A, \varphi)$ et $\mathbb{K}(U \circ V, \varphi)$ soient exacts dans CAT). On dira alors que $\varphi : s \xrightarrow{t} v$ est *fortement exact* et il est immédiat que le composé horizontal,



ou vertical,



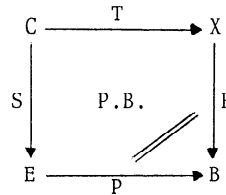
de deux carrés fortement exacts est encore fortement exact.

3.4. *Proposition.* Dans une 2-catégorie représentable, les carrés commas et les adjonctions partielles définissent des carrés fortement exacts.

3.5. *Remarque.* Il résulte de 3.4 que le composé de deux carrés commas est fortement exact (bien que ce composé ne définisse plus un carré comma).

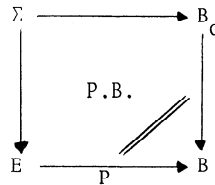
3.6. *Théorème.* Soit $E \xrightarrow{P} B$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) pour tout $X \xrightarrow{F} B$, le produit fibré



est un carré exact dans CAT.

(ii)



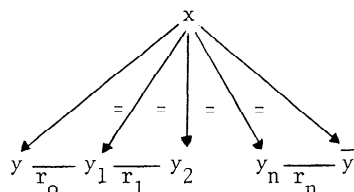
est un carré exact dans CAT où Σ est la sous-catégorie de E ayant les mêmes objets et pour morphismes les $x \xrightarrow{f} y \in E$ tels que $P(f) = \text{identité}$.

(iii) P vérifie les deux conditions suivantes

- (1) pour tout $Px \xrightarrow{m} b \in B$, il existe $x \xrightarrow{t} y$ tel que $Pt = m$;
- (2) si $x \xrightarrow{t} y$ et $x \xrightarrow{\bar{t}} \bar{y}$ vérifient $Pt = P\bar{t}$, alors il existe dans E un chemin $y \xrightarrow{r_0} y_1 \xrightarrow{r_1} y_2 \dots y_n \xrightarrow{r_n} \bar{y}$ et des morphismes $x \rightarrow y_i$ tels que

a) $P(r_0) = \dots = P(r_n) = \text{id PY}$ c'est-à-dire le chemin est dans la fibre au-dessus de PY.

b)



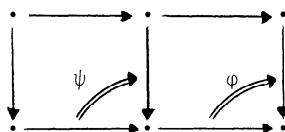
les conditions sont réalisées lorsque P est une cofibration ou lorsque $P \dashv D(\varepsilon, \text{id})$. On en déduit:

3.7. *Proposition.* Si u est une cofibration au sens de R. Street [19], alors tout produit fibré $\text{id} : s \xrightarrow[u]{t} v$ est un carré fortement exact.

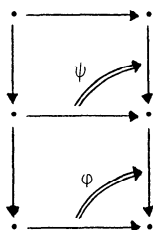
3.8. *Proposition.* Soit $\varphi : s \xrightarrow[u]{t} v$ avec $t \dashv \bar{t}$ et $u \dashv \bar{u}$. Les conditions ci-dessous sont équivalentes

- (i) le compagnon de φ (cf. Kelly et Street [13]), $\bar{s}t \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{u}v$, est un isomorphisme.
- (ii) φ est fortement exact.
- (iii) φ est exact.

3.9. *Théorème* (composition des carrés exacts). Soit

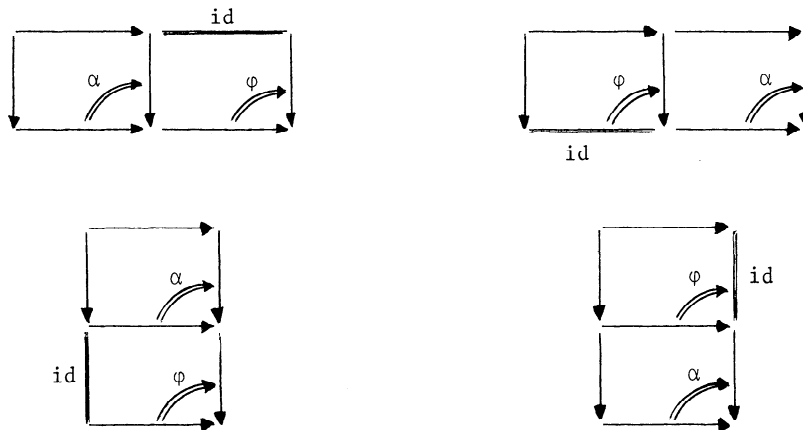


et



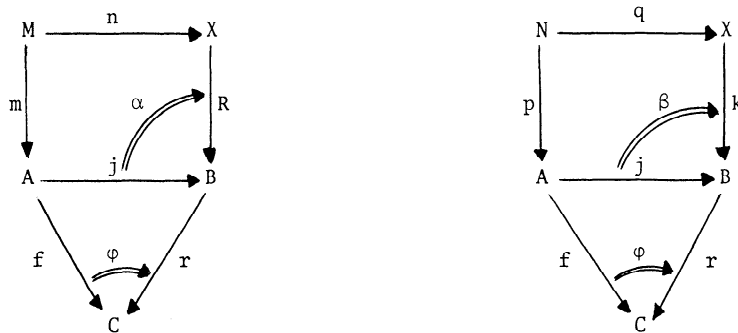
Si ψ est exact et ϕ fortement exact, alors les deux composés ci-dessus sont exacts.

3.10. *Théorème* (réflexion de l'exactitude). Considérons au choix un des quatre diagrammes ci-dessous.



où ϕ est exact. Dans ces conditions, α est exact ssi le composé est exact.

3.11. *Théorème*. Soit dans une 2-catégorie représentable



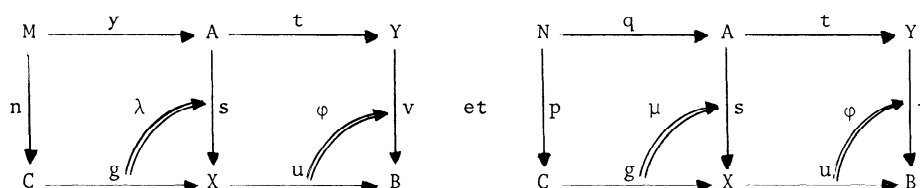
où α et β sont exacts. Dans ces conditions, le diagramme de gauche est une extension ssi le diagramme de droite est une extension. Il en résulte que dans le calcul des extensions ponctuelles, on peut substituer les carrés exacts au commas, c'est-à-dire une extension ponctuelle surmontée par un carré exact (fortement exact) est une extension (ponctuelle). Dans CAT , cette propriété caractérise

d'ailleurs les carrés exacts (R. Guitart [7]).

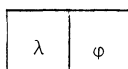
3.12. *Remarque.* Le théorème précédent permet de retrouver plusieurs résultats de R. Street [19] et J.L. Mac Donald [14].

4. CARRÉS LOCALEMENT EXACTS

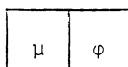
4.1. *Définition.* Soit



où λ et μ sont des carrés exacts. Dans ce cas,



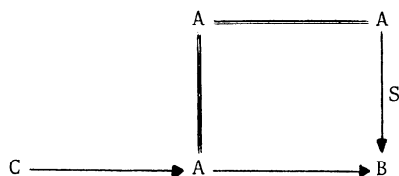
est exact ssi



est exact. Lorsque ces conditions sont réalisées, on dira que le carré $us \xrightarrow{\varphi} vt$ est *g-exact*. On a un résultat et une définition analogue pour $D \xrightarrow{g} Y$.

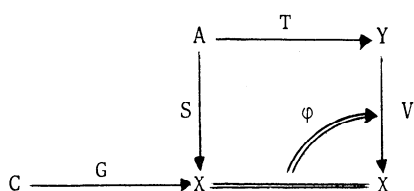
Si les composés ci-dessus sont fortement exacts, on dira que φ est *fortement g-exact*. (Dans CAT , exact équivaut à fortement exact.)

4.2. *Exemples.* Soit dans CAT , les foncteurs $C \xrightarrow{G} A \xrightarrow{S} B$. S est pleinement fidèle sur les couples (Gc, a) ssi



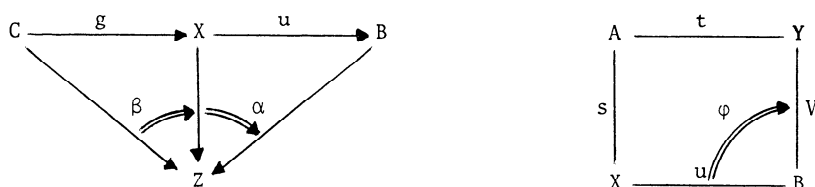
est G -exact.

Soit dans CAT , le diagramme



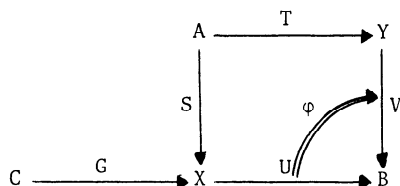
ϕ est G -exact ssi (V, ϕ) est une extension G -absolue (Y. Diers [4]) de S le long de T . D'où la définition des extensions g -absolues dans une 2-catégorie représentable.

4.3. *Proposition.* Soit dans une 2-catégorie représentable



où β et α sont des extensions ponctuelles et ϕ est (fortement) g -exact. Alors ϕ est transformé en extension (ponctuelle) par α .

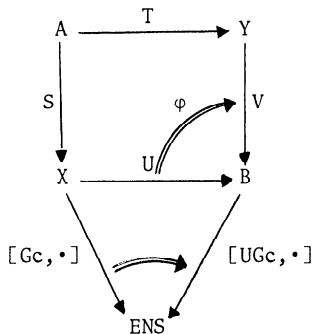
4.4. *Théorème.* Soit dans CAT , le diagramme



Les conditions ci-dessous sont équivalentes:

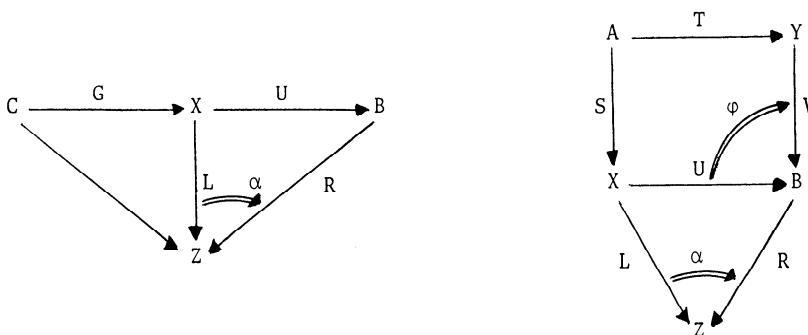
(i) φ est G-exact.

(ii) Pour tout $c \in C_0$,



est une extension ponctuelle.

(iii) Pour tout couple d'extensions ponctuelles

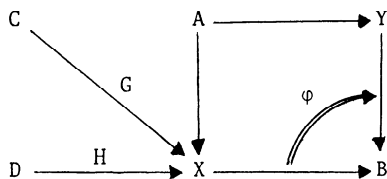


est une extension ponctuelle.

Il suffit que cette condition soit réalisée lorsque $C \rightarrow Z = C \rightarrow \hat{C}$ (plongement de Yoneda) et L = foncteur singulier associé à G .

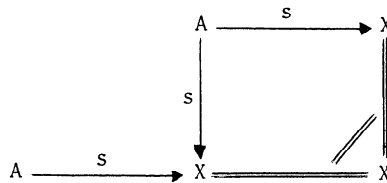
(iv) Pour tout $c \in C_0$, $Gc \downarrow S \xrightarrow{\text{canon.}} UGc \downarrow V$ est initial.

4.5. Proposition. Soit dans CAT, le diagramme



On suppose que tout objet de X G -projectif (i.e. les $x \in X_0$ tels que $\text{id}_x = x \rightarrow Gc \rightarrow x$) est aussi H -projectif. Dans ces conditions, φ H -exact entraîne φ G -exact. Donc lorsque G et H admettent les mêmes projectifs, H -exact équivaut à G -exact.

4.6. *Définition des morphismes opaques.* Dans une 2-catégorie représentable, on dira que $A \xrightarrow{s} X$ est opaque si

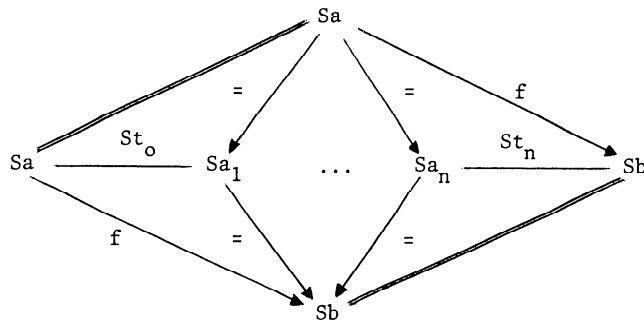


est fortement s -exact.

4.7. *Proposition.* Pour un foncteur $A \xrightarrow{s} X$, les conditions suivantes sont équivalentes

(i) S est opaque.

(ii) Pour tout $Sa \xrightarrow{f} Sb \in X$, il existe dans A un chemin $a \xrightarrow{t_0} a_1 \dots a_n \xrightarrow{t_n} b$ et des morphismes dans B , $Sa \rightarrow Sa_i \rightarrow Sb$

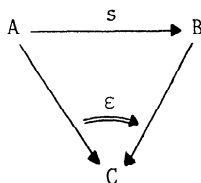


(iii) La monade associée T^0T dans la bicatégorie des distributeurs est idempotente (Gouzou-Grunig [5]).

Il en résulte que les foncteurs riches sont opaques. Les morphismes opaques permettent de comparer adjonctions partielles et extensions (ce qui avait été

observé par Y. Diers pour les foncteurs pleinement fidèles denses).

4.8. *Proposition* (cf. Y. Diers [4]). Soit dans une 2-catégorie représentable l'adjonction partielle $s \underset{j}{\dashv} t(\varepsilon)$



Dans ces conditions

- (i) Si j est opaque, alors (t, ε) est une extension j -absolue de j le long de s .
- (ii) Si j est opaque et dense, alors (t, ε) est une extension ponctuelle.

4.9. *Théorème* (caractérisation des foncteurs copleinement fidèles). Un foncteur $A \xrightarrow{S} X$ est copleinement fidèle ssi S est opaque et tout objet de X est S -projectif.

4.10. *Proposition*. Un foncteur $A \xrightarrow{S} X$ est opaque ssi S admet une décomposition $S = I \circ J$ où I est pleinement fidèle et S copleinement fidèle.

4.11. *Proposition*. Soit $A \xrightarrow{S} X$ une cofibration dans CAT . Alors S est opaque (copleinement fidèle) ssi les fibres sont connexes (connexes et non vides).

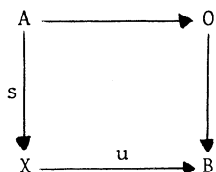
4.12. *Exemples de foncteurs copleinement fidèles.*

1^o Si Σ est une sous-catégorie de X et $X \rightarrow \bar{X}$ la catégorie des fractions strictes de X par Σ , alors P est copleinement fidèle.

2^o Si $S \dashv T(\varepsilon, \eta)$, alors ε est un isomorphisme ssi S est pleinement fidèle ssi T est copleinement fidèle.

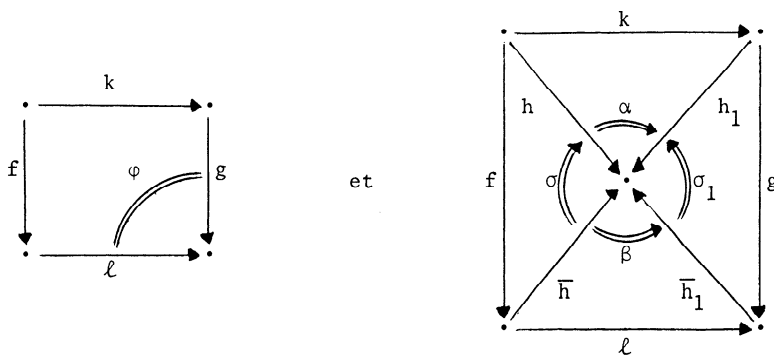
5. ILLUSTRATIONS

5.1. Proposition. Le diagramme de morphismes de groupes



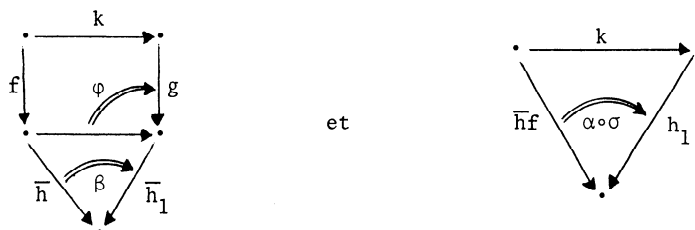
est exact dans la 2-catégorie CAT ssi $s(A)$ est un sous-groupe normal de X tel que la suite $A \xrightarrow{s} X \xrightarrow{u} B \longrightarrow O$ soit exacte ($B \simeq X \mid sA$). On retrouve les théorèmes classiques d'isomorphie en composant des carrés exacts dans CAT.

5.2. Théorème. Soit dans une 2-catégorie représentable K



où

- (i) φ est un carré exact;
- (ii) β est une extension ponctuelle
- (iii) σ est un isomorphisme
- (iv) σ_1 est induit par



Dans ces conditions, σ_1 est un isomorphisme ssi α est une extension ponctuelle.

On retrouve les résultats de Mac Donald [15] en faisant $\mathbb{K} = \text{CAT}$ et $\phi = \text{identité}$ et en utilisant les critères d'exactitude de [7].

6. RÉFÉRENCES

- [1] Applegate, H. et Tierney, M., *Categories with models*, Lecture Notes in Math. 80, Springer, 1969.
- [2] Barr, M. et Beck, J., *Homology and standard constructions*, Lecture Notes in Math. 80, Springer, 1969.
- [3] Bénabou, J., *Les distributeurs*, Rapport no 33, Séminaire de mathématiques pures 1973, Louvain.
- [4] Diers, Y., *J-adjonction, $\lim$ J-absolue et J-théorie algébrique*, C.R.A.S. Paris, T. 278 (1974), p. 1009.
- [5] Gouzou, M.F. et Grunig, R., *Caractérisation de Dist.*, C.R.A.S. Paris, T. 276 (1973), p. 519.
- [6] Grandis, M., *Symétrisations de catégories et factorisations quaternaires*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Série VIII, Vol. XIV, Fasc. 5, Roma, 1977.
- [7] Guitart, R., *Relations et carrés exacts*, Ann. sc. math. Qué., Vol. 4, No 2, 1980.
- [8] Guitart, R., *Qu'est-ce que la logique dans une catégorie?* 3^e Colloque sur les catégories dédié à Charles Ehresmann, Amiens, juillet 1980, à paraître dans Cahiers top. géo. diff., Vol. XXII-1.
- [9] Harting, R., *Distributoren und Kan, Erweiterungen*, Archiv. Math., Vol. XXIX, Fasc. 4, 1977.

- [10] Hilton, P., *Correspondences and exact squares*, Proceedings of the Conference on categorical algebra, La Jolla, Springer, 1966.
- [11] Isbell, J.R., *Epimorphisms and dominions*, Proceedings of the Conference on categorical algebra, La Jolla, Springer, 1966.
- [12] Jaffard, P. et Poitou, G., *Introduction aux catégories et aux problèmes universels*, Ediscience, Paris, 1971, p. 237.
- [13] Kelly, G.M. et Street, R.H., *Review of the elements of 2-categories*, Cat. Sem. Sydney, Lecture Notes in Math., 420 (1974), p. 87.
- [14] Lambek, J., *Goursat's theorem and the Zassenhaus lemma*, Can. Journal Mathematics (1958).
- [15] Mac Donald, J.L., *Natural factorizations and the Kan extension of cohomology theory*, Cahiers top. géo. dif., Vol. XVII-1, 1976, p. 1.
- [16] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.
- [17] Paré, R., *Absolutness property in category theory*, Thesis, Mc Gill Univ., June 1969.
- [18] Riguet, J., *Quelques propriétés des relations difonctionnelles*, C.R.S.A., Paris, T. 230 (1950), p. 1999.
- [19] Street, R.H., *Fibrations and Yoneda's lemma in a 2-category*, Cat. Sem. Sydney, Lecture Notes in Math., 420 (1974).
- [20] Thiebaud, M., *Self dual structure - semantics and algebraic categories*, Thesis, Halifax, 1971.
- [21] Van den Bril, L., *Exactitude dans les Yoneda-structures*, à paraître dans Cahiers top. géo. dif., Vol. XXII-1.

U.E.R. de Mathématiques
a/s René Guitart
Université Paris 7
2, place Jussieu
75005 Paris 20

Manuscrit reçu le 15 janvier 1979.
Révisé le 15 novembre 1980.