

QUELQUES CONSTRUCTIONS DE CATÉGORIES LOCALEMENT MULTIPRÉSENTABLES

Yves Diers

RÉSUMÉ

Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie et Γ est un ensemble de multicolimites dans $\mathcal{C}$, la catégorie des foncteurs $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ multicontinus pour Γ est localement multiprésentable. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie localement multiprésentable et Σ est un ensemble de morphismes de $\mathcal{A}$, la catégorie $\mathcal{A}_{\Sigma}$ des objets de $\mathcal{A}$ clos à gauche pour Σ , est localement multiprésentable. Ce sont deux cas particuliers d'une construction générale de catégories localement multiprésentables que nous donnons ici avec d'autres constructions.

0. INTRODUCTION

Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie et Γ est un ensemble de multicolimites dans $\mathcal{C}$, la catégorie des foncteurs $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ multicontinus pour Γ est localement multiprésentable. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie localement multiprésentable et Σ est un ensemble de morphismes de $\mathcal{A}$, la catégorie $\mathcal{A}_{\Sigma}$ des objets de $\mathcal{A}$ clos à gauche pour Σ , est localement multiprésentable. Ce sont deux cas particuliers d'une construction générale de catégories localement multiprésentables que nous donnons ici avec d'autres constructions.

La somme et le produit d'une petite famille de catégories localement multiprésentables sont localement multiprésentables. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie localement multiprésentable. Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ est localement multiprésentable. Toute sous-catégorie relativement

pleine multiréflexive de $\mathcal{A}$ fermée pour les colimites α -filtrantes, est localement multiprésentable. La catégorie $\mathcal{A}_{\text{mon}}$ ayant les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et ayant pour morphismes les monomorphismes de $\mathcal{A}$ est localement multiprésentable. Si A est un objet de $\mathcal{A}$, la catégorie $\mathcal{A}/A$ des objets de $\mathcal{A}$ au-dessous de A est localement multiprésentable et la catégorie A/A des objets de $\mathcal{A}$ au-dessus de A est localement présentable.

On révisé la construction suivante donnée par Gabriel-Ulmer pour les catégories localement présentables: si $\mathcal{A}$ est localement présentable et Σ est un ensemble de morphismes de $\mathcal{A}$, la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}_{\Sigma}$ de $\mathcal{A}$ ayant pour objets les objets de $\mathcal{A}$ clos à gauche pour Σ , est réflexive et est localement présentable. On remplace Σ par un ensemble Γ de petites familles $(Y_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ de morphismes de $\mathcal{A}$ de même source, on définit les objets et les morphismes clos à gauche pour Γ , pour obtenir une sous-catégorie relativement pleine multiréflexive $\mathcal{A}_{\Gamma}$ qui est localement multiprésentable. La plupart des catégories localement multiprésentables sont obtenues de cette façon. Par exemple, les catégories Locc des anneaux commutatifs locaux, Dom des domaines d'intégrité, Kc des corps commutatifs, AncInd des anneaux commutatifs indécomposables, sont de la forme Anc_{Γ} où Anc est la catégorie des anneaux commutatifs; la catégorie Ordtot des ensembles totalement ordonnés est de la forme Ord_{Γ} où Ord est la catégorie des ensembles ordonnés; les catégories de foncteurs multicontinus: $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ sont de la forme $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Ens}]_{\Gamma}$.

On utilise les notations et les résultats de [2].

1. CONSTRUCTIONS DE CATÉGORIES MULTICOMPLÈTES

1.0. *Proposition.* La somme et le produit d'une petite famille de catégories multicomplètes sont multicomplètes.

Preuve. Soit $(\mathcal{A}_k)_{k \in K}$ une petite famille de catégories multicomplètes. Posons $\mathcal{A} = \coprod_{k \in K} \mathcal{A}_k$. Pour chaque $k \in K$, on identifie $\mathcal{A}_k$ à une sous-catégorie de $\mathcal{A}$. Si $(A_i^k)_{i \in I_k}$ est une famille initiale d'objets de $\mathcal{A}_k$, alors

$$(A_i^k)_{(k,i) \in \coprod_{k \in K} I_k}$$

est une famille initiale d'objets de $\mathcal{A}$. Soit $(X_j)_{j \in J}$ un diagramme non vide de $\mathcal{A}$. Si $(X_j)_{j \in J}$ est un diagramme d'une sous-catégorie $\mathcal{A}_k$, alors sa multicolimite dans $\mathcal{A}_k$ est une multicolimite dans $\mathcal{A}$. Sinon, la multicolimite de $(X_j)_{j \in J}$ est la couronne vide. On en déduit que $\mathcal{A}$ est multicocomplète. Posons $\mathcal{B} = \prod_{k \in K} \mathcal{A}_k$. Soit $((A_i^k)_{k \in K})_{i \in I}$ un diagramme de $\mathcal{B}$. Pour chaque $k \in K$, soit

$$(l_{ji} : A_i^k \rightarrow B_j)_{(i,j) \in I \times J_k},$$

une multicolimite du diagramme $(A_i^k)_{i \in I}$ dans $\mathcal{A}_k$. Posons $J = \prod_{k \in K} J_k$, et pour $(j_k) \in J$, posons

$$B_{(j_k)} = (B_{j_k})_{k \in K}$$

et

$$l_{(j_k)i} = (l_{j_k i})_{k \in K} : (A_i^k)_{k \in K} \rightarrow B_{(j_k)}.$$

La couronne inductive

$$(l_{(j_k)i} : (A_i^k)_{k \in K} \rightarrow B_{(j_k)})_{(i, (j_k)) \in I \times J}$$

est une multicolimite de $((A_i^k)_{k \in K})_{i \in I}$ dans $\mathcal{B}$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est multicocomplète.

1.1. Proposition. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie multicocomplète et $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, la catégorie $[\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ est multicocomplète.

Preuve. Soit $(F_i)_{i \in I}$ un petit diagramme de $[\mathcal{C}, \mathcal{A}]$. Pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, choisissons une multicolimite Γ_X de $(F_i X)_{i \in I}$ dans $\mathcal{A}$. Notons J l'ensemble des cônes inductifs $(Y_i : F_i \rightarrow G)_{i \in I}$ de $[\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ tels que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $(Y_{iX} : F_i X \rightarrow GX)_{i \in I}$ appartienne à Γ_X . Pour $j = (Y_i : F_i \rightarrow G)_{i \in I} \in J$, on pose $\gamma_{ji} = Y_i$ et $G_j = G$. Montrons que $(Y_{ji} : F_i \rightarrow G_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une multicolimite de $(F_i)_{i \in I}$. Soit $(\alpha_i : F_i \rightarrow H)_{i \in I}$ un cône inductif de $[\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ de base $(F_i)_{i \in I}$. Pour chaque

objet X de $\mathbb{C}$, il existe un unique cône inductif $(\gamma_{iX} : F_i X \rightarrow GX)_{i \in \mathbb{I}}$ appartenant à Γ_X et un unique morphisme $f_X : GX \rightarrow HX$ de $\mathbb{A}$ vérifiant $\forall i \in \mathbb{I}$, $f_X \gamma_{iX} = \alpha_{iX}$. Si $u : X \rightarrow Y$ est un morphisme de $\mathbb{C}$, la relation

$$\forall i \in \mathbb{I}, \quad f_Y \gamma_{iY}(F_i u) = \alpha_{iY}(F_i u) = (Hu) \alpha_{iX} = (Hu) f_X \gamma_{iX}$$

implique l'existence d'un unique morphisme $Gu : GX \rightarrow GY$ vérifiant $\forall i \in \mathbb{I}$, $(Gu) \gamma_{iX} = \gamma_{iY}(F_i u)$ et $f_Y(Gu) = (Hu) f_X$. Il est alors immédiat que l'on définit de cette façon un foncteur $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}$, un cône inductif $(\gamma_i : F_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{I}}$ appartenant à J et une transformation naturelle $f : G \rightarrow H$ vérifiant $\forall i \in \mathbb{I}$, $f \gamma_i = \alpha_i$. En outre, si $(\gamma'_i : F_i \rightarrow G')_{i \in \mathbb{I}}$ appartient à J et $f' : G' \rightarrow H$ vérifie $\forall i \in \mathbb{I}$, $f' \gamma'_i = \alpha_i$, alors pour tout $X \in \mathbb{C}$, on a $\gamma'_{iX} = \gamma_{iX}$ et $f'_X = f_X$, donc $(\gamma'_i : F_i \rightarrow G')_{i \in \mathbb{I}} = (\gamma_i : F_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{I}}$ et $f' = f$.

1.2. Proposition. Si $\mathbb{A}$ est une catégorie multicocomplète et A_0 est un objet de $\mathbb{A}$, la catégorie $A_0/\mathbb{A}$ des objets de $\mathbb{A}$ au-dessous de A_0 est multicocomplète et la catégorie $\mathbb{A}/A_0$ des objets de $\mathbb{A}$ au-dessus de A_0 est co-complète.

Preuve. a) Soit $(A_i, x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un petit diagramme de $A_0/\mathbb{A}$. Notons $(\iota_{ji} : A_i \rightarrow A_j)_{(i,j) \in \mathbb{I} \times \mathbb{J}}$ une multicolimite du diagramme $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de $\mathbb{A}$. Pour chaque $j \in J$, notons $(q_k : A_j \rightarrow B_k)_{k \in K_j}$ le multiconoyau de la famille de morphismes parallèles $(\iota_{ji} x_i : A_0 \rightarrow A_j)_{i \in \mathbb{I}}$. Notons $y_k : A_0 \rightarrow B_k$ la valeur commune des morphismes $q_k \iota_{ji} x_i$, pour tout $i \in \mathbb{I}$. On obtient ainsi une famille (B_k, y_k) d'objets de $A_0/\mathbb{A}$ et une couronne inductive

$$(q_k \iota_{ji} : (A_i, x_i) \rightarrow (B_k, y_k))_{(i,k) \in \mathbb{I} \times \coprod_{j \in J} K_j},$$

de base $(A_i, x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ que l'on montre facilement être une multicolimite dans $A_0/\mathbb{A}$.

b) Soit $(A_i, x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un petit diagramme de $\mathbb{A}/A_0$. Il existe un unique cône inductif $(a_i : A_i \rightarrow A)_{i \in \mathbb{I}}$ de $\mathbb{A}$ appartenant à la multicolimite de $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ et factorisant le cône inductif $(x_i : A_i \rightarrow A_0)_{i \in \mathbb{I}}$ en un morphisme $x : A \rightarrow A_0$.

Le cône inductif $(a_i : (A_i, x_i) \rightarrow (A, x))_{i \in \mathbb{I}}$ est alors une colimite de $(A_i, x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans $\mathcal{A}/\mathcal{A}_0$.

1.3. *Proposition.* Soit $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur relativement pleinement fidèle ayant un multiadjoint à gauche.

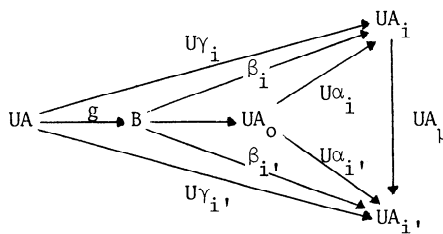
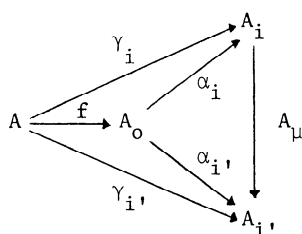
1) Si la catégorie $\mathcal{B}$ est multicocomplète, la catégorie $\mathcal{A}$ est multicocomplète.

2) Si la catégorie $\mathcal{B}$ est à limites connexes, la catégorie $\mathcal{A}$ est à limites connexes.

Preuve. 1) Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un petit diagramme de $\mathcal{A}$. Considérons une multicolimite $(\gamma_{ji} : UA_i \rightarrow B_j)_{(i,j) \in \mathbb{I} \times J}$ du diagramme $(UA_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans $\mathcal{B}$ et, pour chaque $j \in J$, une famille universelle de morphismes $(g_k : B_j \rightarrow UA_k)_{k \in K_j}$ de B_j vers U . Montrons que l'ensemble Γ des cônes inductifs $(f_i : A_i \rightarrow A_k)_{i \in \mathbb{I}}$ de $\mathcal{A}$ tels que $k \in K_j$, $j \in J$ et $Uf_i = g_k \gamma_{ji}$, est une multicolimite de $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans $\mathcal{A}$. Soit $(m_i : A_i \rightarrow A)_{i \in \mathbb{I}}$ un cône inductif de $\mathcal{A}$ de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Le cône inductif $(Um_i : UA_i \rightarrow UA)_{i \in \mathbb{I}}$ de $\mathcal{B}$ se factorise de façon unique par un cône inductif $(\gamma_{ji} : UA_i \rightarrow B_j)_{i \in \mathbb{I}}$ en un morphisme $g : B_j \rightarrow UA$ qui se factorise lui-même sous la forme $g = (Uh)g_k$ où $k \in K_j$ et $h : A_k \rightarrow A$. Le foncteur U étant relativement pleinement fidèle, il existe pour chaque $i \in \mathbb{I}$, un unique morphisme $f_i : A_i \rightarrow A_k$ vérifiant $Uf_i = g_k \gamma_{ji}$ et $hf_i = m_i$. Le cône inductif $(f_i : A_i \rightarrow A_k)_{i \in \mathbb{I}}$ appartient à Γ et il factorise le cône $(m_i : A_i \rightarrow A)_{i \in \mathbb{I}}$. On montre facilement l'unicité d'une telle factorisation.

2) Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un petit diagramme connexe de $\mathcal{A}$. Posons

$$(B, \beta) = \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} UA_i.$$



Pour tout objet i de $\mathbb{I}$, le morphisme $\beta_i : B \rightarrow UA_i$ est de la forme $\beta_i = (U\alpha_i)\beta'_i$ où (A'_i, β'_i) est un morphisme diagonalement universel de B vers U et $\alpha_i : A'_i \rightarrow A_i$ est un morphisme de $\mathcal{A}$. Puisque le diagramme $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est connexe, tous les couples (A'_i, β'_i) peuvent en fait être choisis égaux; on note (A_0, β_0) leur valeur commune. On obtient alors un cône projectif $(\alpha_i : A_0 \rightarrow A_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Montrons que c'est une limite projective. Soit $(\gamma_i : A \rightarrow A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un cône projectif de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Il existe un unique morphisme $g : UA \rightarrow B$ vérifiant $\beta_i g = U_i$ pour chaque $i \in \mathbb{I}$. Le foncteur U étant relativement pleinement fidèle, il existe pour chaque $i \in \mathbb{I}$ un unique morphisme $f_i : A \rightarrow A_0$ vérifiant $\alpha_i f_i = \gamma_i$ et $Uf_i = \beta_0 g$. Or, si $\mu : i \rightarrow i'$ est un morphisme de $\mathbb{I}$, on a $\alpha_{i'} f_{i'} = A_\mu \alpha_i f_i = A_\mu \gamma_i = \gamma_{i'}$ et donc $f_{i'} = f_i$. Puisque le diagramme $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est connexe, on en infère l'égalité $f_i = f_{i'}$ pour tous $i, i' \in \mathbb{I}$. En notant f la valeur commune des f_i , on obtient un morphisme $f : A \rightarrow A_0$ vérifiant $\alpha_i f = \gamma_i$ pour chaque $i \in \mathbb{I}$; un tel morphisme est en outre unique.

1.4. *Remarque.* Les Propositions 1.0, 1.1, 1.2, 1.3 sont encore vraies si l'on substitue α -multicocomplète à multicocomplète.

2. CONSTRUCTIONS SIMPLES DE CATÉGORIES LOCALEMENT MULTIPRÉSENTABLES

2.0. *Proposition.* 1) La somme d'une petite famille de catégories localement α -multiprésentables est localement α -multiprésentable.

2) Le produit d'une famille α -petite de catégories localement α -multiprésentables est localement α -multiprésentable.

Preuve. Soit $(A_k)_{k \in K}$ une petite famille de catégories localement α -multiprésentables. Pour chaque $k \in K$, soit G_k un ensemble générateur propre de A_k formé d'objets α -présentables. L'ensemble $\coprod_{k \in K} G_k$ est un ensemble générateur propre de la catégorie $\coprod_{k \in K} A_k$ formé d'objets α -présentables. La catégorie $\coprod_{k \in K} A_k$ est à colimites α -filtrantes et est α -multicocomplète (Proposition 1.0). C'est donc une catégorie localement α -multiprésentable.

L'ensemble $\{(A_k)_{k \in K} : \forall k \in K, (A_k \in G_k) \text{ ou } (A_k \text{ appartient à une famille initiale d'objets de } A_k)\}$ est un ensemble générateur propre de la catégorie $\prod_{k \in K} A_k$ formé d'objets α -présentables, et la catégorie $\prod_{k \in K} A_k$ est à colimites α -filtrantes et est α -multicocomplète (Proposition 1.0); c'est donc une catégorie localement α -multiprésentable.

2.1. Proposition. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie localement α -multiprésentable et $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, la catégorie $[\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ est localement α -multiprésentable.

Preuve. La catégorie $[\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ est α -multicocomplète (Proposition 1.1) et est à colimites α -filtrantes. Etudions les générateurs.

a) Soit X_0 un objet de $\mathcal{C}$ et A_0 un objet de $\mathcal{A}$. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on note

$$(\gamma_{jX} : A_0 \rightarrow B_j)_{(x,j) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, X) \times J_X}$$

une multisomme de l'objet A_0 pris $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, X)$ fois. On note Γ_{X_0, A_0} l'ensemble des couples $(H, (\iota_X)_{X \in \mathcal{C}})$ formé d'un foncteur $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ et, pour tout $x \in \mathcal{C}$, d'un cône inductif discret

$$(\iota_{Xx} : A_0 \rightarrow Hx)_{x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, X)}$$

appartenant à la multisomme précédente, i.e. tel que $\exists j \in J_X, \forall x : X_0 \rightarrow X$,

$\iota_{Xx} = \gamma_{xj}$. On pose

$$\iota_0 = \iota_{X_0, \iota_{X_0}} : A_0 \rightarrow HX_0.$$

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur et $(H, (\iota_X))$ un élément de Γ_{X_0, A_0} . A toute transformation naturelle $\alpha : H \rightarrow F$, on associe le morphisme

$$\varphi(\alpha) = \alpha_{X_0} \iota_0 : A_0 \rightarrow FX_0.$$

Montrons que φ établit une bijection entre les ensembles

$$\coprod_{(H, (1_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, F) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_0, FX_0) ,$$

en construisant l'application réciproque. Soit $f : A_0 \rightarrow FX_0$ un morphisme de $\mathbf{A}$. Pour tout objet X de $\mathbf{C}$, le cône inductif

$$(\alpha_{XX} : A_0 \rightarrow FX)_{X \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_0, X)} ,$$

défini par $\alpha_{XX} = (Fx)f$, détermine de façon unique un cône inductif appartenant à la multisomme de l'objet A_0 pris $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_0, X)$ fois, que l'on note

$$(1_{XX} : A_0 \rightarrow HX)_{X \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_0, X)} ,$$

ainsi qu'un morphisme $\beta_X : HX \rightarrow FX$. Il est alors immédiat que HX est défini fonctoriellement et que β_X définit une transformation naturelle $\beta : H \rightarrow F$.

b) Soit G un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables de $\mathbf{A}$. Notons $[\mathbf{C}, \mathbf{A}]_0$ l'ensemble des foncteurs

$$\{H : \exists X_0 \in \mathbf{C}, \exists A_0 \in G, \exists (1_X)_{X \in \mathbf{C}}, (H, (1_X)_{X \in \mathbf{C}}) \in \Gamma_{X_0, A_0}\} .$$

Montrons que $[\mathbf{C}, \mathbf{A}]_0$ est un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables de $[\mathbf{C}, \mathbf{A}]$. Soit $\alpha, \beta : F \rightarrow G$ deux morphismes de $[\mathbf{C}, \mathbf{A}]$ tels que $\text{Nat}(H, \alpha) = \text{Nat}(H, \beta)$ pour tout $h \in [\mathbf{C}, \mathbf{A}]_0$. Pour tout objet A_0 de G et tout objet X_0 de $\mathbf{C}$, on a d'après le a),

$$\text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_0, \alpha_{X_0}) \simeq \coprod_{(H, (1_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, \alpha) \simeq \coprod_{(H, (1_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, \beta) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_0, \beta_{X_0}) .$$

On en déduit que $\alpha_{X_0} = \beta_{X_0}$ et par suite que $\alpha = \beta$. Soit $\alpha : F \rightarrow G$ un morphisme de $[\mathbf{C}, \mathbf{A}]$ tel que l'application $\text{Nat}(H, \alpha)$ soit bijective pour tout $H \in [\mathbf{C}, \mathbf{A}]_0$. Alors, pour tout $X_0 \in \mathbf{C}$ et tout $A_0 \in G$, l'application:

$$\text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_0, \alpha_{X_0}) \simeq \coprod_{(H, (1_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, \alpha)$$

est bijective; par suite α_{X_0} est un isomorphisme, donc α aussi. Soit $(F_i)_{i \in I}$

un diagramme α -filtrant de $[\mathbb{C}, \mathbb{A}]$ et H un objet de $[\mathbb{C}, \mathbb{A}]_0$. On a

$$\begin{aligned} & \coprod_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, \varinjlim_{i \in I} F_i) \\ & \simeq \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \varinjlim_{i \in I} F_i X_0) \simeq \varinjlim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, F_i X_0) \\ & \simeq \varinjlim_{i \in I} \coprod_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, F_i) = \coprod_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \varinjlim_{i \in I} \text{Nat}(H, F_i). \end{aligned}$$

On en déduit $\text{Nat}(H, \varinjlim_{i \in I} F_i) \simeq \varinjlim_{i \in I} \text{Nat}(H, F_i)$, ce qui prouve que H est α -présentable.

2.2. Proposition. Si $\mathbb{A}$ est une catégorie localement α -multiprésentable et A_0 est un objet de $\mathbb{A}$, la catégorie $A_0/\mathbb{A}$ des objets de $\mathbb{A}$ au-dessous de A_0 est localement α -multiprésentable et la catégorie $\mathbb{A}/A_0$ des objets de $\mathbb{A}$ au-dessus de A_0 est localement α -présentable.

Preuve. Ce sont des catégories à colimites α -filtrantes. La catégorie $A_0/\mathbb{A}$ est α -multicocomplète et la catégorie $\mathbb{A}/A_0$ est α -cocomplète (Proposition 1.2). Le foncteur $U : A_0/\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ défini par $U(A, x) = A$ et $Uf = f$ a un multiadjoint à gauche. En effet, soit A un objet de $\mathbb{A}$. Notons $(\iota_j^0 : A_0 \rightarrow A_j, \iota_j : A \rightarrow A_j)_{j \in J}$ une multisomme des deux objets A et A_0 . On obtient alors une famille $(A_j, \iota_j^0)_{j \in J}$ d'objets de $A_0/\mathbb{A}$ et une famille universelle de morphismes $(\iota_j : A \rightarrow U(A_j, \iota_j^0))_{j \in J}$ de A vers U . Le foncteur U est fidèle et crée les isomorphismes et les colimites α -filtrantes. On obtient alors un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables de $A_0/\mathbb{A}$ par la méthode utilisée dans la démonstration de la Proposition 2.3 e), f), g), h). Pour la catégorie $\mathbb{A}/A_0$, l'ensemble des objets de $\mathbb{A}/A_0$ de la forme (A, x) pour $A \in G$, est un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables.

2.3. Proposition. Soit $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur relativement pleinement fidèle qui a un multiadjoint à gauche et relève les colimites α -filtrantes. Si la catégorie $\mathbb{B}$ est localement α -multiprésentable, la catégorie $\mathbb{A}$ l'est aussi.

Preuve. a) U relève les colimites α -filtrantes signifie: tout diagramme α -filtrant de $\mathcal{A}$ dont l'image par U a une colimite, a une colimite préservée par U . La catégorie $\mathcal{A}$ est donc à colimites α -filtrantes préservées par U .

b) La catégorie $\mathcal{B}$ étant multicocomplète et à limites connexes, il en est de même de la catégorie $\mathcal{A}$ (Proposition 1.3).

c) Montrons que U est fidèle. Soit $f, f' : A \rightarrow A'$ deux morphismes de $\mathcal{A}$ tels que $Uf = Uf'$. L'image par U du noyau $k : K \rightarrow A$ de (f, f') est le noyau de (Uf, Uf') ; c'est donc un isomorphisme. Le foncteur U étant localement pleinement fidèle, il existe un unique morphisme $h : A \rightarrow K$ vérifiant $Uh = (Uk)^{-1}$ et $kh = 1_A$. Cela implique que k est un isomorphisme et par suite, que $f = f'$.

d) Montrons que U reflète les isomorphismes. Soit $f : A \rightarrow A'$ un morphisme de $\mathcal{A}$ tel que Uf est un isomorphisme. Puisque U est fidèle, f est un monomorphisme. Puisque U est localement pleinement fidèle, il existe un morphisme $h : A' \rightarrow A$ tel que $Uh = (Uf)^{-1}$ et $fh = 1_{A'}$. Par suite, f est un isomorphisme.

e) Soit H un ensemble générateur propre de $\mathcal{B}$ formé d'objets α -présentables. Pour chaque objet B_0 de H , soit

$$(g_i : B_0 \rightarrow UA_i)_{i \in I_{B_0}}$$

une famille universelle de morphismes de B_0 vers U . Montrons que

$$G = \bigcup_{B_0 \in H} \{A_i : i \in I_{B_0}\}$$

est un ensemble générateur propre de $\mathcal{A}$ formé d'objets α -présentables.

f) Soient $f, f' : A \rightarrow A'$ deux morphismes de $\mathcal{A}$ tels que, pour tout $A_0 \in G$, on ait $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_0, f) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_0, f')$. Pour tout objet $B_0 \in H$, on a

$$\text{Hom}_{\mathbf{B}}(B_0, Uf) \simeq \coprod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_i, f) \simeq \coprod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_i, f') \simeq \text{Hom}_{\mathbf{B}}(B_0, Uf') .$$

On en déduit que $Uf = Uf'$ et par suite, que $f = f'$.

g) Soit $f : A \rightarrow A'$ un morphisme de $\mathbf{A}$ tel que pour tout objet A_0 de $\mathbf{G}$, $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_0, f)$ est une bijection. Pour tout objet B_0 de $\mathbf{H}$, l'application

$$\text{Hom}_{\mathbf{B}}(B_0, Uf) \simeq \coprod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_i, f)$$

est bijective. On en déduit que Uf est un isomorphisme et par suite, que f en est un aussi.

h) Soit $(A_k)_{k \in K}$ un diagramme α -filtrant de $\mathbf{A}$. Pour $B_0 \in \mathbf{H}$ et $i \in I_{B_0}$, on note $f_i : \varinjlim_{k \in K} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_i, A_k) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_i, \varinjlim_{k \in K} A_k)$ l'application canonique. L'application

$$\coprod_{i \in I_{B_0}} f_i$$

est alors composée des bijections suivantes:

$$\begin{aligned} \coprod_{i \in I_{B_0}} \varinjlim_{k \in K} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_i, A_k) &\simeq \varinjlim_{k \in K} \coprod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_i, A_k) \simeq \varinjlim_{k \in K} \text{Hom}_{\mathbf{B}}(B_0, UA_k) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{B}}(B_0, U \varinjlim_{k \in K} A_k) \simeq \coprod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(A_i, \varinjlim_{k \in K} A_k) . \end{aligned}$$

C'est donc une bijection, et par suite, chaque f_i est une bijection; cela prouve que les éléments de $\mathbf{G}$ sont α -présentables.

2.4. Exemples.

2.4.1. La Proposition 2.3 s'applique aux foncteurs ensemble sous-jacent des catégories $\mathbf{Kc}$, $\mathbf{Philb}$, $\mathbf{Met}$, $\mathbf{OrdTot}$, aux foncteurs inclusion $\mathbf{Locc} \rightarrow \mathbf{Anc}$, $\mathbf{Dom} \rightarrow \mathbf{Anc}$, $\mathbf{Red} \rightarrow \mathbf{Anc}$, $\mathbf{AncInd} \rightarrow \mathbf{Anc}$, etc. [2].

2.4.2. Si A est un anneau commutatif unitaire, la catégorie A/Anc est la catégorie des A -algèbres. Si k est un corps commutatif, la catégorie k/Kc est la catégorie des extensions de k ; par exemple les corps commutatifs de caractéristique p . La catégorie K/k est la catégorie des corps qui sont sous-corps de k ; elle est localement $\aleph_0$ -présentable.

2.4.3. Les catégories A_{mon} .

Soit A une catégorie localement α -multiprésentable. On note A_{mon} la catégorie ayant les mêmes objets que A et ayant pour morphismes les monomorphismes de A . Montrons que A_{mon} est localement α -multiprésentable. C'est une sous-catégorie relativement pleine de A . Elle est multiréflexive puisque si A est un objet de A et si $(B_i, g_i)_{i \in I}$ est une famille représentative des quotients extrémaux de A , tout morphisme $g : A \rightarrow B$ de A se factorise d'une unique façon sous la forme $g = fg_i$ où $i \in I$ et $f : B_i \rightarrow B$ est un monomorphisme (Proposition 5.1 [2]). En outre, soit $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme α -filtrant de A_{mon} de colimite (A, ι) dans A . Si A_0 un objet α -présentable de A et si $x, y : A_0 \rightarrowtail A_i$ sont deux morphismes de A vérifiant $\iota_i x = \iota_i y$, il existe un morphisme $\alpha : i \rightarrow i'$ de $\mathbb{I}$ vérifiant $A_\alpha x = A_\alpha y$ et puisque A_α est monomorphe, on en déduit $x = y$. Les objets α -présentables engendrant A , on en infère que les ι_i sont monomorphiques et par suite, que (A, ι) est un cône de A_{mon} . Ce cône est une colimite dans A_{mon} puisque si $(\mu_i : A_i \rightarrow B)_{i \in \mathbb{I}}$ est un cône inductif de A_{mon} de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$, le morphisme $f : A \rightarrow B$ défini par $f \iota_i = \mu_i$ pour tout $i \in \mathbb{I}$, est monomorphe (Proposition 5.0 [2]). La catégorie A_{mon} est alors localement α -multiprésentable (Proposition 2.3). Remarquons que les objets α -présentables de A_{mon} sont exactement les objets α -engendrés de A . En effet, ce sont les buts des morphismes diagonalement universels des objets α -présentables de A vers A_{mon} . Ce sont donc les quotients extrémaux des objets α -présentables de A qui sont précisément les objets α -engendrés de A [4].

3. CATÉGORIES A_Γ D'OBJETS CLOS À GAUCHE POUR Γ

3.0. *Un exemple.* Considérons la catégorie Anc des anneaux commutatifs unitaires et le couple de morphismes de même source

$$(\gamma_0 : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[X,Y]/(XY-1) , \gamma_1 : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[X,Y]/((X-1)Y-1))$$

défini par $\gamma_0(P(X)) = \overline{P(X)}$ et $\gamma_1(P(X)) = \overline{P(X)}$. Pour tout anneau commutatif A , le couple d'applications de même but,

$$(\text{Hom}_{Anc}(\gamma_0, A) : \text{Hom}_{Anc}(\mathbb{Z}[X,Y]/(XY-1), A) \rightarrow \text{Hom}_{Anc}(\mathbb{Z}[X], A)) ,$$

$$(\text{Hom}_{Anc}(\gamma_1, A) : \text{Hom}_{Anc}(\mathbb{Z}[X,Y]/((X-1)Y-1), A) \rightarrow \text{Hom}_{Anc}(\mathbb{Z}[X], A)) ,$$

a pour image $\{x \in A : x \text{ est inversible ou } (1-x) \text{ est inversible}\}$ en identifiant $\text{Hom}_{Anc}(\mathbb{Z}[X], A)$ avec l'ensemble A . Ce couple d'applications de même but sera donc surjectif si et seulement si l'anneau A satisfait l'axiome: $\forall x \in A$, x est inversible ou $1-x$ est inversible.

Si on considère la famille vide de morphismes de Anc ayant pour source l'anneau 0 , alors pour chaque anneau A , son image par le foncteur $\text{Hom}_{Anc}(-, A)$ est la famille vide d'applications de but $\text{Hom}_{Anc}(0, A)$. Cette famille sera surjective si et seulement si il n'existe aucun morphisme de 0 dans A , c'est-à-dire si et seulement si l'anneau A satisfait l'axiome: $0 \neq 1$. Les anneaux locaux peuvent donc être définis par les deux familles précédentes de morphismes. Les morphismes γ_0, γ_1 permettent aussi de définir les homomorphismes locaux. En effet, un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ est local si et seulement si pour tout morphisme $m : \mathbb{Z}[X] \rightarrow A$ et tout morphisme $n : \mathbb{Z}[X,Y]/(XY-1) \rightarrow B$ vérifiant $fm = n\gamma_0$, il existe un morphisme $g : \mathbb{Z}[X,Y]/(XY-1) \rightarrow A$ vérifiant $g\gamma_0 = m$. On aurait pu tout aussi bien prendre le morphisme γ_1 .

Ainsi, la catégorie $Locc$ est construite à partir de Anc à partir de familles de morphismes de même source. Ce procédé de construction de catégories localement multiprésentables est très général.

3.1. Définition des catégories $\mathbb{A}_\Gamma$. On considère une catégorie localement α -multiprésentable $\mathbb{A}$ et un ensemble Γ de petites familles de morphismes de mêmes sources de $\mathbb{A}$ dont les sources et buts sont α -présentables. Un objet X de $\mathbb{A}$ est dit *clos à gauche pour Γ* si, pour chaque famille $(\gamma_j : A \rightarrow A_j)_{j \in J}$ de Γ , les applications $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_j, X) : \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_j, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A, X)$ sont injectives pour $j \in J$ et la famille d'applications de même but $(\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_j, X))_{j \in J}$ est surjective. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathbb{A}$ est dit *clos à gauche pour Γ* si, pour chaque famille $(\gamma_j : A \rightarrow A_j)_{j \in J}$ de Γ et chaque $j \in J$, et pour chaque couple de morphismes $m : A \rightarrow X$, $n : A_j \rightarrow Y$ vérifiant $fm = n\gamma_j$, il existe un unique morphisme $g : A_j \rightarrow X$ vérifiant $g\gamma_j = m$. Les objets et morphismes clos à gauche pour Γ constituent la catégorie $\mathbb{A}_\Gamma$.

On peut noter que si la famille vide de source A_0 appartient à Γ , la condition demandée pour un objet A de $\mathbb{A}_\Gamma$ est $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, A) = \emptyset$.

3.2. Théorème. $\mathbb{A}_\Gamma$ est une sous-catégorie relativement pleine multiréflexive de $\mathbb{A}$ fermée pour les colimites α -filtrantes et elle est localement α -multiprésentable.

3.3. Preuve du théorème. Soit $\Gamma = \{(\gamma_j^k : A^k \rightarrow B_j^k)_{j \in J_k}\}_{k \in K}$.

3.3.0. $\mathbb{A}_\Gamma$ est une sous-catégorie relativement pleine de $\mathbb{A}$. Considérons en effet deux morphismes $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ de $\mathbb{A}$ tels que gf appartiennent à $\mathbb{A}_\Gamma$. Pour tout morphisme $x : A^k \rightarrow A$ et tout morphisme $y : B_j^k \rightarrow B$ vérifiant $y\gamma_j^k = fx$, le morphisme $gy : B_j^k \rightarrow C$ vérifie $gy\gamma_j^k = gfx$ et par suite, il existe un unique morphisme $z : B_j^k \rightarrow A$ vérifiant $z\gamma_j^k = x$. Le morphisme f appartient donc à $\mathbb{A}_\Gamma$.

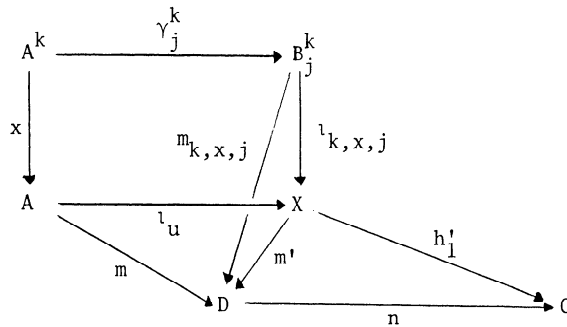
3.3.1. Multiréflexivité. Soit A un objet de $\mathbb{A}$, C un objet de $\mathbb{A}_\Gamma$ et $h : A \rightarrow C$ un morphisme de $\mathbb{A}$. On cherche une factorisation universelle $h = gf$ où $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathbb{A}$, B est un objet de $\mathbb{A}_\Gamma$ et $g : B \rightarrow C$ est un morphisme de $\mathbb{A}_\Gamma$.

a) Notons Λ l'ensemble des triples (k, x, j) formés d'un élément k de K , d'un morphisme $x : A^k \rightarrow A$ et d'un élément j de J_k pour lesquels il existe un morphisme $z_{k,x,j} : B_j^k \rightarrow C$ vérifiant $z_{k,x,j} \gamma_j^k = hx$. Notons $\mathbb{A}$ le type de diagramme dont les objets sont constitués par un objet u et par deux objets $V_{k,x,j}$, $W_{k,x,j}$ pour chaque triple (k, x, j) de Λ et ayant un seul morphisme $V_{k,x,j} \rightarrow u$ et un seul morphisme $V_{k,x,j} \rightarrow W_{k,x,j}$ pour chaque (k, x, j) . Notons $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{A}$ le diagramme de $\mathcal{A}$ défini par $\Phi(u) = A$, $\Phi(V_{k,x,j}) = A^k$, $\Phi(W_{k,x,j}) = B_j^k$, $\Phi(V_{k,x,j} \rightarrow u) = x$ et $\Phi(V_{k,x,j} \rightarrow W_{k,x,j}) = \gamma_j^k$. Notons $\alpha : \Phi \rightarrow C$ le cône inductif de base Φ défini par

$$\alpha_u = h, \quad \alpha_{W_{k,x,j}} = z_{k,x,j} \quad \text{et} \quad \alpha_{V_{k,x,j}} = hx.$$

La catégorie $\mathcal{A}$ étant multicomplète, le diagramme Φ possède une multicolimite. Soit $\iota : \Phi \rightarrow X$ le cône inductif appartenant à la multicolimite de Φ et factorisant le cône α en un morphisme $h'_1 : X \rightarrow C$ qui vérifie donc $h'_1 \iota_u = h$ et $h'_1 \iota_{k,x,j} = z_{k,x,j}$ pour chaque $(k, x, j) \in \Lambda$.

b) Etudions une propriété de ι_u . Soit $h = nm$ une factorisation de h telle que $m : A \rightarrow D$ est un morphisme de $\mathcal{A}$, D est un objet de $\mathcal{A}_\Gamma$ et $n : D \rightarrow C$ est un morphisme de $\mathcal{A}_\Gamma$. Montrons que m se factorise de façon unique sous la forme $m = m' \iota_u$ et que dans ces conditions on a $nm' = h'_1$.

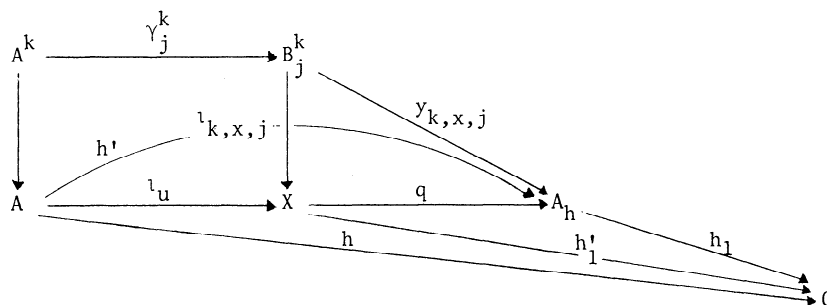


Pour chaque $(k, x, j) \in \Lambda$, le morphisme $h'_1 \iota_{k,x,j} : B_j^k \rightarrow C$ vérifiant $h'_1 \iota_{k,x,j} \gamma_j^k = h'_1 \iota_u x = hx = nm x$, et le morphisme n étant dans $\mathcal{A}_\Gamma$, il existe un unique morphisme $m_{k,x,j} : B_j^k \rightarrow D$ vérifiant $m_{k,x,j} \gamma_j^k = mx$. On en déduit

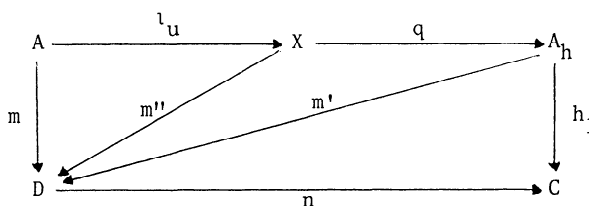
l'existence d'un unique morphisme $m' : X \rightarrow D$ vérifiant $m' \iota_u = m$ et $m' \iota_{k,x,j} = m_{k,x,j}$ pour tout $(k,x,j) \in \Lambda$, c'est-à-dire vérifiant $m' \iota_u = m$. Dans ces conditions, on a $nm' = h'_1$. Si $m'' : X \rightarrow D$ est un autre morphisme vérifiant $m'' \iota_u = m$, alors pour tout $(k,x,j) \in \Lambda$, les égalités $m'' \iota_{k,x,j} \gamma_j^k = m'' \iota_u x = mx = m' \iota_u x = m' \iota_{k,x,j} \gamma_j^k$ jointes au fait que l'objet D est dans $\mathbb{A}_T$, impliquent $m'' \iota_{k,x,j} = m' \iota_{k,x,j}$ et par suite, $m'' = m'$.

c) Notons C l'ensemble des couples de morphismes

$\{(\iota_u y, \iota_u z) \mid k \in K, j \in J_k, (y,z) : B_j^k \rightrightarrows A \text{ tels que } y \gamma_j^k = z \gamma_j^k\}$. L'ensemble C a un multiconoyau dans A . Pour tout $(\iota_u y, \iota_u z) \in C$, on a $h'_1 \iota_u y \gamma_j^k = h'_1 \iota_u z \gamma_j^k$. Puisque C est un objet de $\mathbb{A}_T$, on en déduit $h'_1 \iota_u y = h'_1 \iota_u z$. Il existe alors un unique morphisme $q : X \rightarrow A_h$ appartenant au multiconoyau de C et un unique morphisme $h_1 : A_h \rightarrow C$ vérifiant $h_1 q = h'_1$. Posons $h' = q \iota_u$ et $y_{k,x,j} = q \iota_{k,x,j}$. On a $h = h_1 h'$ et $h'x = y_{k,x,j} \gamma_j^k$.



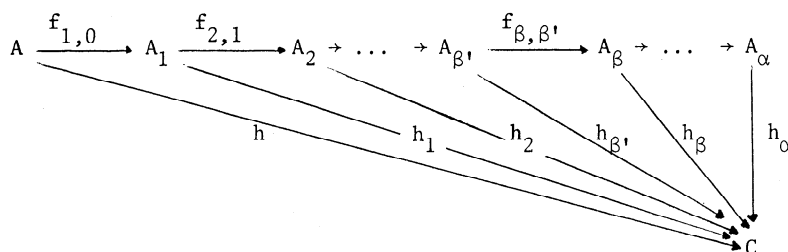
d) Etudions une propriété de h' . Soit $h = nm$ une factorisation de h telle que $n : D \rightarrow C$ soit un morphisme de $\mathbb{A}_T$. Montrons que m se factorise de façon unique sous la forme $m = m'h'$ et que dans ces conditions, on a $nm' = h'_1$.



Le morphisme $h_1 q : X \rightarrow C$ vérifie $h_1 q \iota_u = h_1 h' = h = nm$. D'après b), il existe un unique morphisme $m'' : X \rightarrow D$ vérifiant $m'' \iota_u = m$ et $nm'' = h_1 q$. Pour tout $(\iota_u y, \iota_u z) \in C$, on a $m'' \iota_u y \gamma_j^k = m'' \iota_u z \gamma_j^k$. L'objet D appartenant à A_Γ , on en déduit $m'' \iota_u y = m'' \iota_u z$. Par suite, le morphisme m'' factorise de façon unique sous la forme $m'' = m' q$ où $m' : A_h \rightarrow D$ vérifie en plus $nm' = h_1$. On en déduit $m = m'' \iota_u = m' q \iota_u = m' h'$. Si $m'_1 : A_h \rightarrow D$ est un autre morphisme vérifiant $m'_1 h' = m$, on a $m'_1 q \iota_u = m = m' q \iota_u$, donc $m'_1 q = m' q$ puis $m'_1 = m'$.

e) Pour tout ordinal β , on définit un objet A_β de A et un morphisme $h_\beta : A_\beta \rightarrow C$ et, pour tout couple d'ordinaux β, β' tels que $\beta' < \beta$, on définit un morphisme $f_{\beta, \beta'} : A_{\beta'} \rightarrow A_\beta$ de A par induction transfinie de la façon suivante, en utilisant les notations précédentes:

- 1) $A_0 = A$, $h_0 = h$.
- 2) $A_{\beta+1} = A_h$, $h_{\beta+1} = (h_\beta)_1$, $f_{\beta+1, \beta'} = (h_\beta)' f_{\beta, \beta'}$.
- 3) Si γ est un ordinal limite, $(A_\gamma, (f_{\gamma\beta})_{\beta < \gamma})$ est un cône inductif appartenant à une multicolimite du diagramme $(A_\beta)_{\beta < \gamma}$ et factorisant le cône inductif $(h_\beta : A_\beta \rightarrow C)_{\beta < \gamma}$, par un morphisme que l'on note $h_\gamma : A_\gamma \rightarrow C$.



Notons que, pour $\gamma = \alpha$, on a $A_\alpha = \lim_{\beta < \alpha} A_\beta$ car le diagramme $(A_\beta)_{\beta < \alpha}$ est α -filtrant et la catégorie A est à colimites α -filtrantes.

f) Montrons que A_α est un objet de A_Γ . Soit $k \in K$ et $\bar{x} : A^k \rightarrow A_\alpha$. Puisque A^k est α -présentable, il existe un ordinal $\beta < \alpha$ et un morphisme $x_\beta : A^k \rightarrow A_\beta$ tel que $\bar{x} = f_{\alpha, \beta} x_\beta$. Puisque l'objet C appartient à A_Γ , le morphisme $h_\beta x_\beta : A^k \rightarrow C$ se factorise sous la forme $h_\beta x_\beta = z \gamma_j^k$ où $z : B_j^k \rightarrow C$ avec $j \in J_k$. Le morphisme $y_{k, x_\beta, j} : B_j^k \rightarrow A_{\beta+1}$ vérifie alors

$$y_{k,x_\beta,j} \gamma_j^k = f_{\beta+1,\beta} x_\beta.$$

En posant

$$\bar{y} = f_{\alpha,\beta+1} y_{k,x_\beta,j} : B_j^k \rightarrow A_\alpha,$$

on a

$$\bar{y} \gamma_j^k = f_{\alpha,\beta+1} y_{k,x_\beta,j} \gamma_j^k = f_{\alpha,\beta+1} f_{\beta+1,\beta} x_\beta = f_{\alpha,\beta} x_\beta = \bar{x}.$$

Soit $\bar{z} : B_j^k \rightarrow A_\alpha$ un autre morphisme vérifiant $\bar{z} \gamma_j^k = \bar{x}$. L'objet B_j^k étant α -présentable, il existe un ordinal $\beta < \alpha$ et deux morphismes $y_\beta, z_\beta : B_j^k \rightarrow A_\beta$ vérifiant $\bar{y} = f_{\alpha,\beta} y_\beta$ et $\bar{z} = f_{\alpha,\beta} z_\beta$. On a alors $f_{\alpha,\beta} y_\beta \gamma_j^k = f_{\alpha,\beta} z_\beta \gamma_j^k$. Il existe donc un ordinal $\beta' > \beta$ tel que l'on ait $f_{\beta',\beta} y_\beta \gamma_j^k = f_{\beta',\beta} z_\beta \gamma_j^k$. Par construction de $A_{\beta'+1}$, on en déduit la relation $f_{\beta'+1,\beta'} f_{\beta',\beta} y_\beta = f_{\beta'+1,\beta'} f_{\beta',\beta} z_\beta$ soit $f_{\beta'+1,\beta'} y_\beta = f_{\beta'+1,\beta'} z_\beta$. On en infère $\bar{y} = f_{\alpha,\beta} y_\beta = f_{\alpha,\beta'+1} f_{\beta'+1,\beta'} y_\beta = f_{\alpha,\beta'+1} f_{\beta'+1,\beta'} z_\beta = f_{\alpha,\beta'} z_\beta = \bar{z}$.

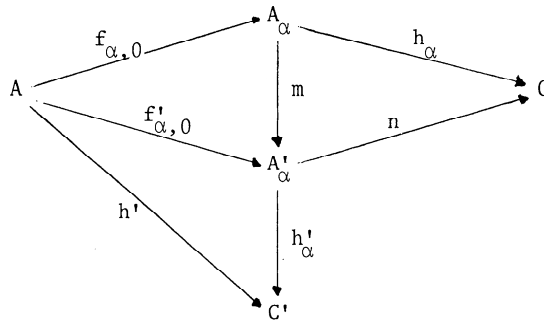
g) Montrons que le morphisme $h_\alpha : A_\alpha \rightarrow C$ appartient à A_Γ . Soit $\bar{x} : A^k \rightarrow A_\alpha$ et $\bar{y} : B_j^k \rightarrow C$ deux morphismes de A vérifiant $h_\alpha \bar{x} = \bar{y} \gamma_j^k$. Le morphisme $\bar{x}$ est de la forme $\bar{x} = f_{\alpha,\beta} x_\beta$. Par construction de $A_{\beta+1}$, le morphisme $y_{k,x_\beta,j} : B_j^k \rightarrow A_{\beta+1}$ vérifie $y_{k,x_\beta,j} \gamma_j^k = f_{\beta+1,\beta} x_\beta$. En posant $\bar{z} = f_{\alpha,\beta+1} y_{k,x_\beta,j}$, on a $\bar{z} \gamma_j^k = f_{\alpha,\beta+1} f_{\beta+1,\beta} x_\beta = f_{\alpha,\beta} x_\beta = \bar{x}$.

h) Le morphisme h est de la forme $h = h_\alpha f_{\alpha,0}$. Soit $h = nm$ une factorisation de h telle que n est un morphisme de A_Γ . Il est immédiat à partir de d) et par récurrence transfinie qu'il existe un unique morphisme m_α vérifiant $m = m_\alpha f_{\alpha,0}$ et qu'en plus, on a $nm_\alpha = h_\alpha$.

i) Les objets de la forme A_α , quand A est fixé et que le morphisme $h : A \rightarrow C$ varie, forment (à isomorphismes près) un ensemble. En effet, avec les notations de a), les objets de la forme X forment un ensemble puisque les diagrammes de la forme Λ forment un ensemble; avec les notations de c) les objets de la forme A_h forment un ensemble; avec les notations de e) les objets de la

forme A_1 forment un ensemble; par récurrence transfinie, les objets de la forme A_α forment un ensemble.

j) Montrons qu'un ensemble de représentants des classes d'isomorphie des morphismes de la forme $f_{\alpha,0} : A \rightarrow A_\alpha$ quand A est fixé et que $h : A \rightarrow C$ varie, forment une famille universelle de morphismes de A vers A_Γ . Tout morphisme $h : A \rightarrow C$ avec $C \in A_\Gamma$ se factorisant sous la forme $h = h_\alpha f_{\alpha,0}$, il suffit de montrer l'unicité d'une telle factorisation. Soit $h' : A \rightarrow C'$ un morphisme de A tel que $C' \in A_\Gamma$. On note $h' = h'_\alpha f'_{\alpha,0}$ sa factorisation. Considérons une factorisation $h = n f'_{\alpha,0}$ de h telle que n appartient à A_Γ .



D'après h), il existe un unique morphisme $m : A_\alpha \rightarrow A'_\alpha$ vérifiant $mf_{\alpha,0} = f'_{\alpha,0}$ et $nm = h_\alpha$. Les morphismes m et $h'_\alpha m$ appartiennent à A_Γ . La relation $h'_\alpha mf_{\alpha,0} = h'_\alpha f'_{\alpha,0} = h'$ implique l'existence d'un morphisme $p : A'_\alpha \rightarrow A$ vérifiant $pf'_{\alpha,0} = f_{\alpha,0}$. On a alors $pmf_{\alpha,0} = f_{\alpha,0}$ et $mpf'_{\alpha,0} = f'_{\alpha,0}$, soit $pm = 1_{A_\alpha}$ et $mp = 1_{A'_\alpha}$. Ainsi m est un isomorphisme. Ce qui achève de prouver l'unicité, à isomorphismes près, de la factorisation de $h : A \rightarrow C$.

3.3.2. Fermeture pour les colimites α -filtrantes.

Soit $(C_i)_{i \in I}$ un diagramme α -filtrant de A_Γ et soit $(\iota_i : C_i \rightarrow C)_{i \in I}$ sa colimite dans A . Montrons que C est dans A_Γ . Pour chaque morphisme $\gamma_j^k : A^k \rightarrow B_j^k$, les objets A^k , B_j^k étant α -présentables, l'application $\text{Hom}_A(\gamma_j^k, C)$ est colimite α -filtrante des applications $(\text{Hom}_A(\gamma_j^k, C_i))_{i \in I}$. Puisque $C_i \in A_\Gamma$, les applications $\text{Hom}_A(\gamma_j^k, C_i)$ sont injectives et par suite, l'application $\text{Hom}_A(\gamma_j^k, C)$ est injective. De même, la famille d'applications de même

4.0. *Théorème.* $\mathcal{A}_{(\Gamma)}$ est une sous-catégorie multiréflexive de $\mathcal{A}$ fermée pour les colimites α -filtrantes et elle est localement α -multiprésentable.

Preuve. Pour chaque famille $(\gamma_j : A \rightarrow A_j)_{j \in J}$ de Γ et chaque couple (j_1, j_2) d'éléments distincts de J , on note

$$(i_k^1 : A_{j_1} \rightarrow B_k, i_k^2 : A_{j_2} \rightarrow B_k)_{k \in K_{j_1, j_2}}$$

une multicolimite du diagramme $(\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2})$. On note Γ_0 l'ensemble des familles vides de source B_k , pour k variant dans K_{j_1, j_2} , (j_1, j_2) étant un couple d'éléments distincts de J et la famille $(\gamma_j)_{j \in J}$ variant dans Γ . Un objet X de $\mathcal{A}$ est clos à gauche pour Γ_0 si et seulement s'il n'y a aucun morphisme $B_k \rightarrow X$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun couple de morphismes

$(\gamma_1 : A_{j_1} \rightarrow X, \gamma_2 : A_{j_2} \rightarrow X)$ tel que $j_1 \neq j_2$ et $\gamma_1 \gamma_{j_1} = \gamma_2 \gamma_{j_2}$. On en déduit que les objets de $\mathcal{A}$ strictement clos à gauche pour Γ sont précisément les objets clos à gauche pour $\Gamma \cup \Gamma_0$. Si X, Y sont deux objets strictement clos à gauche pour Γ , tout morphisme $f : A \rightarrow B$ est clos à gauche pour Γ , donc aussi pour $\Gamma \cup \Gamma_0$. Ainsi, $\mathcal{A}_{(\Gamma)} = \mathcal{A}_{\Gamma \cup \Gamma_0}$ et le théorème se déduit du Théorème 3.2.

5. CATÉGORIES DE FONCTEURS Γ -MULTICONTINUS

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et Γ un ensemble de couronnes inductives de $\mathcal{C}$ de bases α -petites. Un foncteur $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ est Γ -multicontinu si, pour toute couronne inductive, $(\gamma_{ji} : A_i \rightarrow B_j)_{(i,j) \in \mathbb{I} \times J}$ de Γ , l'application canonique $\langle F\gamma_{ji} \rangle : \coprod_{j \in J} FB_j \rightarrow \lim_{i \in \mathbb{I}} FA_i$ est bijective. On note $\text{Mulcont}_{\Gamma}[\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Ens}]$ la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Ens}]$ ayant pour objets les foncteurs Γ -multicontinus.

5.0. *Théorème.* $\text{Mulcont}_{\Gamma}[\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Ens}]$ est une sous-catégorie multiréflexive de $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Ens}]$ fermée pour les colimites α -filtrantes et elle est localement α -multiprésentable.

Preuve. Une couronne inductive $(\gamma_{ji} : A_i \rightarrow B_j)_{(i,j) \in I \times J}$ de Γ détermine une couronne inductive $(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, \gamma_{ji}) : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, A_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, B_j))_{(i,j) \in I \times J}$ dans la catégorie $[\mathbb{C}^{\text{op}}, \text{Ens}]$; elle détermine même une famille de morphismes de même source dans $[\mathbb{C}^{\text{op}}, \text{Ens}] : (\langle \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, \gamma_{ji}) \rangle : \varinjlim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, A_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, B_j))_{j \in J}$. Notons encore Γ l'ensemble de ces familles de morphismes de $[\mathbb{C}^{\text{op}}, \text{Ens}]$. Un foncteur $F : \mathbb{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ est Γ -multicontinu si et seulement si les applications $\langle \text{Nat}(\langle \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, \gamma_{ji}) \rangle, F) \rangle : \coprod_{j \in J} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, B_j), F) \rightarrow \text{Nat}(\varinjlim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, A_i), F)$ sont bijectives, c'est-à-dire si et seulement si F est un objet strictement clos à gauche pour Γ . Le théorème se déduit alors du Théorème 4.0.

RÉFÉRENCES

- [0] Coste, M., *Localisation dans les catégories de modèles*, Thèse de l'Université de Paris, 1978.
- [1] Diers, Y., *Familles universelles de morphismes*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Tome 93, III, 1979, 175-195.
- [2] Diers, Y., *Catégories localement multiprésentables*, Archiv Der Mathematik, à paraître, 1980.
- [3] Diers, Y., *Multimonads and multimonadics categories*, Journal of Pure and Applied Algebra, à paraître, 1980.
- [4] Gabriel, P. et Ulmer, F., *Lokal Präsentierbare Kategorien*, Lecture Notes in Mathematics, 221, Springer, 1971.
- [5] Ulmer, F., *Locally α -presentable and locally α -generated categories*, Lecture Notes in Mathematics, 195, Springer, 1971, 230-247.

Département de Mathématiques
U.E.R. de sciences
Université de Valenciennes
59326 Valenciennes, France

Manuscrit reçu le 25 février 1980.