

SOMME DE FONCTIONS MULTIPLICATIVES RESTREINTE À UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

Armel Mercier

1. INTRODUCTION

Soit r un entier positif tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \zeta^r(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'(n)}{n^s} ,$$

ζ désigne la fonction zeta de Riemann, alors il s'ensuit que

$$g(n) = \sum_{d|n} d_r \left(\frac{n}{d} \right) g'(d) ,$$

où

$$d_r(n) = \sum_{d_1 d_2 \dots d_r = n} 1 .$$

Le but de cette note est de trouver une formule asymptotique pour

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} g(n) , \quad k, \ell \in \mathbf{N} , \text{ en utilisant seulement des méthodes élémentaires.}$$

L'expression asymptotique est connue lorsque $r = 1$ (voir [1]) et aussi lorsque

$k = 1$, $\ell = 0$ et r est un entier positif arbitraire (voir [2], [4]).

2. NOTATION

Nous désignerons par σ_a l'abscisse de convergence absolue des séries de Dirichlet. Pour $a \geq 1$, $p^a || d$ signifie que $p^a | d$ et $p^{a+1} \nmid d$.

3. L'ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Théorème 1. Soit g une fonction multiplicative telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \zeta^r(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'(n)}{n^s}$$

avec $r \geq 2$, et supposons que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g'(n) \log n}{n}$ converge absolument. Alors, pour

$k, \ell \in \mathbb{N}$, nous avons

$$(1) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} g(n) = \prod_{p|k} \left(1 + \frac{g(p)}{p} + \frac{g(p^2)}{p^2} + \dots \right)^{-1} \prod_{p|k'} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \times$$

$$\prod_{\substack{p^a || d \\ p \nmid k'}} \left(g(p^a) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g(p^{a+i})}{p^i} \right) \left(\frac{1}{(r-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'(n)}{n} \right) \frac{x}{k} \log^{r-1} x + O(x \log^{r-2} x),$$

où $d = (k, \ell)$ et $k = k'd$.

Remarque. Si g est une fonction complètement multiplicative, alors l'équation (1) devient

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} g(n) = \frac{g(d)}{d\phi(k/d)} \prod_{p|k} \left(1 - \frac{g(p)}{p} \right) \prod_{\substack{p|d \\ p \nmid \frac{k}{d}}} \left(1 - \frac{g(p)}{p} \right)^{-1} \times$$

$$\left(\frac{1}{(r-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'(n)}{n} \right) x \log^{r-1} x + O(x \log^{r-2} x),$$

où $d = (k, \ell)$ et ϕ désigne la fonction d'Euler.

4. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

Puisque $r \geq 2$, alors nous avons pour $\sigma > \sigma_a$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} &= \zeta^r(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'(n)}{n^s} \\ &= \zeta(s) \left(\zeta^{r-1}(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'(n)}{n^s} \right) \\ &= \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} . \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons

$$g(n) = \sum_{d|n} h(d) ,$$

d'où

$$(2) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} g(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d|n \\ n \equiv \ell(k)}} h(d) .$$

Il s'agit maintenant de trouver le nombre d'entiers $n \leq x$ tel que $n \equiv \ell(k)$ et $d|n$. On a $n = ak + \ell \equiv 0(d)$, c'est-à-dire $ak \equiv -\ell(d)$. Soit $(k, d) = e$. Alors cette dernière congruence possède exactement e solutions si $e|\ell$, donc $ak \equiv -\ell(d)$ devient $ak_1 \equiv -\ell_1(d_1)$, où $k = k_1e$, $\ell = \ell_1e$ et $d = d_1e$.

Or la congruence

$$ak_1 \equiv -\ell_1(d_1)$$

possède exactement une solution, d'où le nombre de solutions est

$$\left[\frac{x - \ell + k}{kd_1} \right] \text{ ou } \left[\frac{x - \ell + k}{kd_1} \right] + 1 ,$$

($[y]$ désigne le plus grand entier $\leq y$), i.e. le nombre de solutions est

$$\left[\frac{x}{[k, d]} \right] + b_x , \quad |b_x| \leq 2 ,$$

($[k, d]$ désigne le plus petit commun multiple de k et d).

Utilisant cette dernière formule, l'équation (2) devient

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} g(n) &= \sum_{\substack{n \leq x \\ (k,n) | \ell}} h(n) \left[\frac{x}{[k,n]} \right] + \sum_{\substack{n \leq x \\ (k,n) | \ell}} b_x h(n) \\
 &= \frac{x}{k} \sum_{\substack{n \leq x \\ (k,n) | \ell}} \frac{(k,n)h(n)}{n} + o \left(\sum_{n \leq x} |h(n)| \right).
 \end{aligned}$$

Or, par définition

$$h(n) = \sum_{d|n} g'(d) d_{r-1}(n/d)$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq x} |h(n)| &\leq \sum_{n \leq x} \left(\sum_{d|n} |g'(d)| d_{r-1}(n/d) \right) \\
 &= \sum_{d \leq x} |g'(d)| \sum_{\substack{m \leq \frac{x}{d}}} d_{r-1}(m).
 \end{aligned}$$

Posons

$$D_r(x) = \sum_{n \leq x} d_r(n).$$

Alors

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \sum_{n \leq x} |h(n)| &= \sum_{d \leq \frac{x}{2}} |g'(d)| D_{r-1}(x/d) + \sum_{\frac{x}{2} < d \leq x} |g'(d)| D_{r-1}(x/d) \\
 &= O(x \log^{r-2} x) \text{ par [4]}.
 \end{aligned}$$

Pour évaluer

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (k,n) | \ell}} \frac{(k,n)h(n)}{n},$$

nous procédons de la façon suivante:

Soit χ la fonction multiplicative définie par

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (k,n) | \ell \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Alors, pour $\sigma > \sigma_a$,

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \sum_{\substack{n=1 \\ (k,n) \mid \ell}}^{\infty} \frac{(k,n)h(n)}{n^s} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k,n)h(n)\chi(n)}{n^s} \\
 &= \prod_p \left(1 + \frac{(k,p)h(p)\chi(p)}{p^s} + \frac{(k,p^2)h(p^2)\chi(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) \\
 &= \prod_{p \mid k} \left(1 + \frac{h(p)}{p^s} + \frac{h(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{-1} \prod_{p \nmid k} \left(1 + \frac{(k,p)h(p)\chi(p)}{p^s} + \dots \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.
 \end{aligned}$$

Mais,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \zeta^{r-1}(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'(n)}{n^s},$$

d'où pour $r \geq 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{n \leq x \\ (k,n) \mid \ell}} (k,n)h(n) &= \prod_{p \mid k} \left(1 + \frac{h(p)}{p} + \dots \right)^{-1} \prod_{p \nmid k} \left(1 + \frac{h(p)(k,p)\chi(p)}{p} + \dots \right) \times \\
 &\quad \left(\frac{1}{(r-2)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'(n)}{n} \right) x \log^{r-2} x + O(x \log^{r-3} x),
 \end{aligned}$$

(voir [2], [5]), et par le lemme d'Abel [3], cette dernière équation devient

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \sum_{\substack{n \leq x \\ (k,n) \mid \ell}} \frac{(k,n)h(n)}{n} = \prod_{p \mid k} \left(1 + \frac{h(p)}{p} + \dots \right)^{-1} \prod_{p \nmid k} \left(1 + \frac{(k,p)h(p)\chi(p)}{p} + \dots \right) \times \\
 & \quad \left(\frac{1}{(r-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'(n)}{n} \right) \log^{r-1} x + O(\log^{r-2} x).
 \end{aligned}$$

Le deuxième produit de l'équation (6) peut s'écrire d'une autre façon. En effet, considérons tous les nombres premiers p tels que $p^c \parallel k$, ce même nombre premier doit diviser aussi ℓ car autrement le produit se réduit à 1. Donc, il faut considérer tous les nombres premiers p tels que $p^b \parallel \ell$ d'où

$$p^a \parallel (k, \ell) = d, \quad a = \min \{c, b\}.$$

Si $p \nmid \frac{k}{d} = k'$, alors $\chi(p^i) = 1$ pour $i > a$, et alors

$$\prod_{p|k} \left(1 + \frac{h(p)(k,p)\chi(p)}{p} + \dots \right) = \prod_{p^a \parallel d} \left(1 + h(p) + \dots + h(p^a) + \sum_{\substack{i=1 \\ p \nmid k'}}^{\infty} \frac{h(p^{a+i})}{p^i} \right)$$

et remarquant que

$$\prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \prod_{p|k'} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \prod_{\substack{p|d \\ p \nmid k'}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1},$$

alors

$$\begin{aligned} (7) \quad \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \prod_{p|k} \left(1 + \frac{(k,p)h(p)\chi(p)}{p} + \dots \right) \\ = \prod_{p^a \parallel d} \left(g(p^a) + \sum_{\substack{i=1 \\ p \nmid k'}}^{\infty} \frac{g(p^{a+i})}{p^i} \right) \prod_{p|k'} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \end{aligned}$$

puisque $g(n) = \sum_{d|n} h(d)$. De même, par définition, on a

$$(8) \quad \prod_{p|k} \left(1 + \frac{h(p)}{p} + \dots \right)^{-1} = \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \prod_{p|k} \left(1 + \frac{g(p)}{p} + \dots \right)^{-1}.$$

Remplaçant les équations (7), (8) dans (6) et substituant cette nouvelle équation, ainsi que (4), dans (3), nous obtenons le résultat désiré.

Le prochain résultat est une conséquence immédiate du théorème 1.

Théorème 2. Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n . Alors, pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} d(n) = C x \log x + O(x),$$

où

$$C = \left(\frac{\phi^2(k)}{k^3} \right) \left(\frac{k/d}{\phi(k/d)} \right) \prod_{p^a \parallel d} \left(a + 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ p \nmid \frac{k}{d}}}^{\infty} \frac{a+1+i}{p^i} \right),$$

et $d = (k, \ell)$.

On peut, à partir du théorème 1, obtenir de nombreuses applications. Cependant, dans la preuve de ce théorème, il est intéressant de remarquer que l'équation (5) nous donne un nouveau type de séries de Dirichlet. En effet, cette équation nous donne le résultat suivant:

Théorème 3. Soit h une fonction multiplicative telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$ converge absolument pour tout nombre complexe $s = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_a$. Alors, pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$ et pour tout nombre complexe $s = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_a$, nous avons

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (k,n)|\ell}}^{\infty} \frac{(k,n)h(n)}{n^s} = \prod_{p|k} \left(1 + \frac{h(p)}{p^s} + \frac{h(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{-1} \times \\ \prod_{\substack{p^a || d \\ p \nmid k'}} \left(1 + \frac{h(p)}{p^{s-1}} + \dots + \frac{h(p^a)}{(p^a)^{s-1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h(p^{a+i})}{p^{(a+i)s-a}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

où $d = (k, \ell)$, $k' = k/d$.

Comme conséquence, nous avons le résultat suivant:

Théorème 4. Pour tout nombre complexe $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, nous avons, pour $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (k,n)|\ell}}^{\infty} \frac{(k,n)\mu(n)}{n^s} = \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{s-1}} \right) \frac{1}{\zeta(s)},$$

où μ désigne la fonction de Möbius et $d = (k, \ell)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATHINSON, F.V. et CHERWELL, L., The mean-values of arithmetical functions. Quart. Journ. of Math. (Oxford), 20, 1949, 65-79.
- [2] BURR, S.A., On uniform elementary estimates of arithmetic sums. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 39, 3, 1973, 497-502.

- [3] CHANDRASEKHARAN, K., Introduction to analytic number theory. Springer-Verlag, 1968.
- [4] COHEN, E., Arithmetical notes, 1. On a theorem of Van der Corput. Proc. Amer. Math. Soc., 12, 1961, 214-217.
- [5] RENYI, A., Additive and multiplicative number theoretic functions. Lecture notes, University of Michigan, Ann Arbor, 1965.

*Module de mathématiques
Université du Québec à Chicoutimi
930, rue Jacques-Cartier est
Chicoutimi, Québec
Canada*

*Manuscrit reçu le 26 mai 1978.
Révisé le 3 août 1978.*