

PROBLÈME D'APPROXIMATION PONDÉRÉE GÉNÉRALISÉE POUR LES ESPACES D'ORLICZ

Mario Lavoie

SOMMAIRE

Dans ce mémoire nous étendons les résultats de P. Malliavin sur la totalité de $\{t^{\lambda_n}/F(t)\}$ dans $C_0(\mathbb{R}^+)$ pour les espaces de Orlicz. Ces résultats donnent, en particulierisant les espaces de Orlicz, des généralisations des résultats de W.H.J. Fuchs et J.A. Siddiqi. De ces résultats nous tirons quelques applications. Notamment l'unicité de la solution du problème des moments de Stieltjes, le prolongement des évaluations de l'adhérence de $\{t^{\lambda_n}\}$ à l'espace entier et quelques théorèmes du type de Phragmén-Lindelöf.

INTRODUCTION

Comme le problème d'approximation qui nous intéresse est situé dans le cadre des espaces de Orlicz, nous allons rappeler brièvement leur définition.

Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue à gauche vérifiant $\phi(0) = 0$ et notons $\psi(t) = \sup \{s : \phi(s) \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Si $\phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds$ et $\psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds$, on dit qu'elles sont duales au sens de Young.

Nous noterons $L_\phi(\mathbb{R}_+^*)$ l'ensemble des fonctions f Lebesgue-mesurables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\|f\|_{\Phi} = \sup \left\{ \int_0^{\infty} |fg| dt : \int_0^{\infty} \Psi |g| dt \leq 1 \right\} < \infty ,$$

où Φ et Ψ sont deux fonctions duales au sens de Young.

Il est démontré dans Zaanan [19] que $(L_{\Phi}(\mathbb{R}_+^*), \|\cdot\|_{\Phi})$ est un espace de Banach.

Enonçons maintenant le problème d'approximation polynômiale pondérée généralisée dans les espaces de Orlicz. Etant donné Λ une suite régulière de nombres positifs ($\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$) et $w : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ un L_{Θ} -poids, c'est-à-dire $P_N(\mathbb{R}_+^*) \cdot w \subseteq L_{\Theta}(\mathbb{R}_+^*)$, où $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction de Young non identiquement nulle et où $P_{\Lambda}(\mathbb{R}_+^*)$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $\{x \rightarrow x^{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, trouvez des conditions nécessaires et suffisantes pour que $P_{\Lambda}(\mathbb{R}_+^*) \cdot w$ soit dense dans $L_{\Theta}(\mathbb{R}_+^*)$, ce qu'on abrège en disant que w est fondamental. En particulierisant Λ et Θ , on obtient des problèmes d'approximation pondérée, plus classiques. Par exemple, si on considère $\Theta(x) = x^p/p$, avec $1 \leq p < \infty$, on obtient le problème d'approximation polynômiale pondérée généralisée dans les L^p . Par abus de langage, on dit que w est un L^{∞} -poids (fondamental) si l'on remplace $L^{\infty}(\mathbb{R}_+^*)$ par $C_0(\mathbb{R}_+^*)$ l'espace de Banach des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini.

C'est ce dernier problème qui est à l'origine des problèmes d'approximation pondérée. En effet, le théorème de Weierstrass dans le contexte d'un espace X localement compact séparé ou même complètement régulier séparé s'énonce avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Or cette topologie est moins fine que la topologie sur $C(X)$ engendrée par un C_0 -poids $w \neq 0$ p.p., sur X . Ce fut S. Bernstein qui le formula pour la première fois en 1924 avec $\Lambda = \mathbb{N}$ et $p = \infty$. Il fut étudié sous cette forme par S. Bernstein [2], L. Carleson [3] et H. Pollard [13], le dernier le résolvant complètement sous cette forme restreinte, en 1955. Ensuite S.N. Mergelyan [12], E.J. Akutowicz [1] et H. Pollard [14] étudièrent le problème sous la forme $\Lambda = \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$.

Entre-temps, W.H.J. Fuchs [4] s'intéressa au problème sous la forme suivante: Λ une suite régulière de nombres positifs, $1 \leq p \leq \infty$ et $w(x) = e^{-x}$. Il

donna en 1946 une condition suffisante pour résoudre le problème et montra que cette condition est nécessaire et suffisante pour $p = 2$. J.A. Siddiqi [16] compléta son travail en montrant en 1973, que la condition de Fuchs est aussi nécessaire pour les $1 \leq p \leq \infty$. Pour ce qui est du problème énoncé pour Λ , une suite régulière de nombres positifs et pour $p = \infty$, P. Malliavin [7] l'avait complètement résolu en 1955 avec l'aide de la méthode que S. Mandelbrojt [10] avait développé pour résoudre des problèmes connexes. L'étude de ces travaux nous permit de résoudre complètement le problème d'approximation polynômiale pondérée généralisée pour les L^p , $1 \leq p \leq \infty$ (cf. M. Lavoie [5]) et pour les L_Θ , avec $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction vérifiant une certaine condition de croissance. Ceci est l'objet de cet article. Disons pour terminer que nous avons situé dans un cadre plus global (cf. [6]) le problème d'approximation polynômiale pondérée généralisée, mais que dans cette direction nous n'avons prouvé que la suffisance des conditions.

Une fois ce problème résolu, une question légitime de se poser est la suivante: quelle est la nature ou de quoi est composé le sous-espace fermé engendré par les polynômes généralisés, lorsqu'une des conditions nécessaires et suffisantes n'est pas satisfaite? Cette question donne lieu au problème dit de la non-totalité qui peut s'énoncer ainsi: caractérisez l'adhérence de $P_\Lambda(\mathbb{R}_+^*) \cdot w$ dans $L_\Theta(\mathbb{R}_+^*)$, où $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction de Young non identiquement nulle. L'étude de ce problème occupe la dernière partie de cet article et les résultats trouvés généralisent ceux de J.A. Siddiqi [16].

ÉNONCÉ DES RÉSULTATS FONDAMENTAUX

Dans cet article, nous démontrerons entre autre chose, les deux théorèmes suivants:

Théorème A. Soient Λ une suite régulière de nombres non-négatifs et $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $1/F$ soit un L_Θ -poids, où $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction de Young non identiquement nulle qui vérifie la condition suivante: il existe $M > 0$, tel que $\Theta(2x) \leq M \Theta(x)$, pour tout $x \geq 0$.

a) Si la condition $U(M_n, \lambda(r))$ est vérifiée i.e. pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty M(\lambda(r) - a) \frac{dr}{r^2} = +\infty, \quad (1)$$

où λ est la fonction caractéristique de Λ et M est la fonction de trace de la suite $(\log M_n)$ définie par

$$M_n = \|t^n\|_{\Theta, 1/F}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

alors la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ est totale et topologiquement linéairement dépendante dans $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$.

b) Réciproquement, si on suppose en plus que F est bornée dans un intervalle contenant zéro, que la fonction $x \mapsto \log F(e^x)$ est convexe et que la condition $U(M_n, \lambda(r))$ n'est pas vérifiée, alors la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ est non-totale et topologiquement linéairement indépendante dans $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$.

Théorème B. Etant donné Λ une suite régulière de nombres positifs et $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction bornée au voisinage de zéro telle que $1/F$ est un L_Θ -poids, où $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction de Young non identiquement nulle qui vérifie la condition suivante: il existe $M > 0$, tel que $\Theta(2x) \leq M \Theta(x)$, pour tout $x \geq 0$, et tel que $\Phi = \log \circ F \circ \exp$ est une fonction convexe, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$\int_0^\infty \Phi(\lambda(r) - a) \frac{dr}{r^2} < +\infty, \quad (3)$$

alors toute fonction G appartenant à l'adhérence de $P_\Lambda(\mathbb{R}_+^*)$ dans $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$, vérifie les propriétés suivantes:

$$G(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k x^{\lambda_k} \text{ presque partout sur } \mathbb{R}_+^*, \quad (4)$$

où les c_k sont des réels uniquement déterminés par G et la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, qui vérifient

$$|c_k| \leq A_\Psi (B \exp \lambda(\lambda_k))^{-\lambda_k} \|G\|_{\Theta, 1/F}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

A. PROBLÈME D'APPROXIMATION POLYNOMIALE PONDERÉE GÉNÉRALISÉE

A.1. Approximation dans les espaces de Orlicz pondérés.

Nous avons déjà défini ce que nous entendons par approximation polynômiale pondérée. Introduisons maintenant le concept d'espace de Orlicz pondéré, ce qui nous permettra subséquemment de parler d'approximation polynômiale généralisée dans ces espaces.

Soient Θ et $\Psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ deux fonctions duales au sens de Young (voir Zaenen [19]), (X, S, μ) un espace mesuré σ -fini, où S est une tribu, et $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $(S-)$ mesurable, finie et non-nulle μ -presque partout (μ -p.p.). Nous noterons $L_{\Theta, 1/F}(X, S, \mu)$ le quotient par la relation d'équivalence " $= \mu$ -p.p." de l'espace vectoriel engendré par la famille des fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables vérifiant $\int_X \Theta |f/F| d\mu < \infty$. Nous le normerons par:

$$\|f\|_{\Theta, 1/F} = \sup \left\{ \int_X |fg| d\mu : \int_X \Psi |gF| d\mu \leq 1 \right\}.$$

Il est intéressant de remarquer que le dual de $L_{\Theta, 1/F}(X, S, \mu)$ est $L_{\Psi, F}(X, S, \mu)$ pourvu que Θ vérifie la condition de croissance

$$(\exists M > 0) (\forall x \geq 0) (\Theta(2x) \leq M \Theta(x)). \quad (6)$$

Ce qui nous donne pour des Θ particuliers des résultats déjà connus (voir [5]). En effet, pour chaque $1 \leq p \leq \infty$, on pose $\Theta_1(x) = x^p/p$, $x \geq 0$ et on obtient alors

$$(L_{1/F}^p(X, S, \mu))' = (L^p(X, S, 1/F d\mu))' = L_F^q(X, S, \mu),$$

où $1/p + 1/q = 1$. Cependant, ce ne sont pas les seuls espaces de Orlicz pondérés à vérifier la condition (6). On n'a qu'à prendre par exemple:

$$\begin{aligned} \Theta_2(x) &= (1+x) \log(1+x) - x, \quad x \geq 0; \\ \Theta_3(x) &= x^p (|\log x| + 1), \quad x > 0, \\ &= 0, \quad x = 0; \quad \text{pour chaque } 1 \leq p < \infty; \\ \Theta_4(x) &= x^2 / \log(x+e), \quad x \geq 0; \text{ etc.} \end{aligned}$$

Définissons maintenant le concept d'approximation polynômiale généralisée dans certains espaces de Orlicz pondérés. Soit Λ une suite de nombres non-négatifs et $P_{\Lambda}(\mathbb{R}_+^*)$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{t^{\lambda} : x \rightarrow x^{\lambda}; \text{ si } \lambda \neq 0 \text{ et } 1 \text{ si } \lambda = 0 : \lambda \in \Lambda\}$. Nous dirons que la fonction $w : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ est un L_{θ} -poids, si elle est (Lebesgue-) mesurable et si $P_{\Lambda}(\mathbb{R}_+^*) \subseteq L_{\theta, w}(\mathbb{R}_+^*)$. A remarquer, que pour un θ donné, la cardinalité de l'ensemble des L_{θ} -poids est celle du continu. Ceci étend un résultat analogue pour les L^p -poids, $1 \leq p < \infty$ et les C_0 -poids.

A.2. Enoncé équivalent.

Avant de donner la preuve du théorème A, donnons immédiatement une conséquence de ce théorème.

Théorème 1. Soient Λ une suite régulière de nombres non-négatifs et $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $1/F$ est un L_{θ} -poids, où $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de Young non identiquement nulle qui vérifie (6).

a) Si la condition $M(F, \lambda(r))$ est vérifiée, i.e. pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^{\infty} \phi(\lambda(r)-a) \frac{dr}{r^2} = +\infty, \text{ où } \phi \text{ est la régularisée convexe de la fonction } x \rightarrow \log F(e^x) \text{ et } \lambda \text{ la fonction caractéristique de la suite } \Lambda, \text{ alors la famille } \{t^{\lambda} : \lambda \in \Lambda\} \text{ est totale et topologiquement linéaire dépendante dans } L_{\theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*).$$

b) Réciproquement, si on suppose en plus que F est bornée dans un intervalle à droite de zéro, que la fonction $x \rightarrow \log F(e^x)$ est convexe et que la condition $M(F, \lambda(r))$ n'est pas vérifiée, alors la famille $\{t^{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ est non-totale et topologiquement linéairement indépendante dans $L_{\theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$.

Démontrons que le théorème 1 est une conséquence du théorème A. Pour ce faire, prouvons les lemmes suivants:

Lemme 1. Soient Λ une suite régulière de nombres non-négatifs, θ et $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ deux fonctions duales au sens de Young et $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $1/F$ est un L_{θ} -poids. Si on définit la suite (M_n) par l'équation

$$M_n = \|t^n\|_{\Theta, 1/F}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Alors

$$M_n \leq \Psi^{-1}(1)(\exp \phi(n) + \exp \phi(n+2)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

où ϕ est la première conjuguée de la fonction $x \rightarrow \log F(e^x)$.

Démonstration. Considérons pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} M_n &\leq \exp \phi(n) \sup \int_0^1 |g(t)| dt + \exp \phi(n+2) \sup \int_1^\infty |g(t)| \frac{dt}{t^2} \\ &\leq \Psi^{-1}(1)(\exp \phi(n) + \exp \phi(n+2)). \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 2. Si $\int_0^\infty \phi(\lambda(r)) \frac{dr}{r^2} = +\infty$, où ϕ est la régularisée convexe de la fonction $x \rightarrow \log F(e^x)$ et λ la fonction caractéristique d'une suite régulière Λ , i.e. $\lambda(r) = 2 \sum_{\lambda < r} 1/\lambda$, alors

$$(\log F(e^x))/x \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Démonstration. Si non, il existerait une suite divergente (x_n) pour laquelle

$$\log \circ F \circ \exp(x_n) \leq B x_n, \quad B > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Mais comme ϕ est la régularisée convexe de la fonction $x \rightarrow \log \circ F \circ \exp(x)$, on a

$$\phi(x) \leq Bx, \quad x \geq x_0,$$

ce qui entraîne que

$$\int_{x_0}^\infty \phi(\lambda(r)) \frac{dr}{r^2} \leq B \int_{x_0}^\infty \lambda(r) \frac{dr}{r^2} < +\infty$$

puisque Λ est une suite régulière. $\square$

Lemme 3. Soient Λ une suite régulière de nombres non-négatifs,

Θ et $\Psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ deux fonctions duales au sens de Young et $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $1/F$ est un L_Θ -poids.

a) La condition $M(F, \lambda(r))$ entraîne la condition $U(M_n, \lambda(r))$.

b) Réciproquement, si on suppose en plus que F est asymptotiquement croissante, alors la condition $U(M_n, \lambda(r))$ entraîne la condition $M(F, \lambda(r))$.

Démonstration.

a) Supposons que la condition $M(F, \lambda(r))$ soit vérifiée. A cause des lemmes 1 et 2 et du fait que ϕ est la première conjuguée de $x \rightarrow \log F(e^x)$, on a

$$-\log M_n \geq -\log 2\Psi^{-1}(1) - \phi(x+2) \quad \text{où } n = [x];$$

d'où

$$ns - \log M_n \geq -\log 2\Psi^{-1}(1) - 3s + (x+2)s - \phi(x+2)$$

pour $s \in \mathbb{R}_+$ et $x \geq b$. Alors on a, puisque la condition (8) est vérifiée et puisque ϕ est la régularisé convexe de $x \rightarrow \log F(e^x)$, que pour $b \geq 0$, il existe $a > 0$ tel que pour $s \geq a$

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \sup \{xs - \phi(x) : x \geq b\} \\ &= \sup \{(x+2)s - \phi(x+2) : x \geq b-2\}, \quad s \geq a. \end{aligned}$$

En résumé, il existe $a > 0$ pour lequel

$$M(s) \geq \phi(s) - 3s - \log 2\Psi^{-1}(1), \quad s \geq a$$

et ceci démontre (a) en se rappelant que $\int_0^\infty \lambda(r) \frac{dr}{r^2} < \infty$.

b) Considérons pour un $n \in \mathbb{N}$ et un $x \in \mathbb{R}$

$$nx - \log M_n \leq \log F^*(e^{x+\log 2}) - \log \int_{e^x}^{2e^x} \frac{x_I(t)}{\|x_I\|_\Psi} dt,$$

où $I = [e^x, 2e^x]$

$$\begin{aligned} &\leq \log F^*(e^{x+\log 2}) + \log(\Psi(1)+1) \\ &\leq \log F(e^{x+\log 2}) + K. \end{aligned}$$

D'où, en prenant le $\sup$ sur les $n \in \mathbb{N}$, on obtient,

$$-K + M(x) \leq \log F(e^{x+\log 2}) ;$$

comme la première fonction de l'inégalité précédente est convexe,

$$M(x) \leq \Phi(x+\log 2) + K$$

et ceci démontre (b). $\square$

Rappel. Rappelons que l'on dit d'une fonction $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, qu'elle est asymptotiquement croissante si

$$\sup \{k^*(r) - k(r) : r \in \mathbb{R}_+\} = D < +\infty$$

où $k^*(r) = \sup \{k(t) : t \leq r\}$.

A.3. Suffisance des conditions.

Donnons la démonstration de la partie (a) du théorème A.

Démonstration du théorème A. (a). Montrons d'abord que la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ est totale dans $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$, si la condition $U(M_n, \lambda(r))$ est vérifiée. Pour ce faire, il suffit de montrer que tout élément du dual de $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$ qui s'annule sur $\mathcal{P}_\Lambda(\mathbb{R}_+^*)$ est identiquement nul. Or le dual de $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$ étant $L_{\Psi, F}(\mathbb{R}_+^*)$, avec Θ et Ψ deux fonctions duales au sens de Young, on est ramené à montrer que tout $g \in L_{\Psi, F}(\mathbb{R}_+^*)$ vérifiant $\int_0^\infty t^\lambda g(t) dt = 0$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, est $g = 0$.

Evaluons

$$\int_0^\infty t^n |g(t)| dt \leq \|t^n\|_{\Theta, 1/F} \|g\|_{\Psi, F} = M_n \|g\|_{\Psi, F}.$$

Supposons, pour obtenir une contradiction, que g est non nulle. Considérons la fonction holomorphe dans $\operatorname{Re} z > 0$

$$h(z) = \int_0^\infty t^z d\alpha(t)$$

avec $d\alpha(t) = g(t)/\|g\|_{\Psi, F} dt$. On a alors deux possibilités; ou bien $h = 0$ et alors $g = 0$ par l'unicité des transformées de Fourier-Stieljes et ceci est contraire à notre hypothèse; ou bien $h \neq 0$ et alors h est une fonction holomorphe qui s'annule sur Λ et qui vérifie

$$|h(z)| \leq N_n = \max \{M_n, M_{n+1}\}, \quad n = [\operatorname{Re} z].$$

Ceci est impossible, puisque par hypothèse la condition $U(M_n, \lambda(r))$ est vérifiée et que

$$M(x) \geq N(x) \geq M(s) - s - c, \quad \text{pour } s \text{ assez grand};$$

d'où il vient que la condition $U(N_n, \lambda(r))$ est satisfaite et qu'alors $h = 0$, par le théorème 2.1 de Malliavin [7], ce qui est absurde. On a donc $g = 0$ et la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ est totale dans $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$.

De plus, cette famille est topologiquement linéairement dépendante, puisque si on enlève λ_k de la suite Λ , la nouvelle suite Λ_k vérifie les hypothèses du théorème A. (a) et la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda_k\}$ est encore totale dans

$$L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*) \quad \text{et} \quad t^{\lambda_k} \in L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*) = \overline{\mathcal{P}_{\Lambda_k}(\mathbb{R}_+^*)}. \quad \square$$

Avant de passer à la preuve de la nécessité des conditions, donnons une application de ce que l'on vient de prouver. Pour chaque L^1 -poids g , le nombre $\int_0^\infty t^\lambda g(t) dt$ est appelé le moment d'ordre λ de g . La suite des moments de g ne détermine pas nécessairement g . Cependant, ceci est le cas si on impose à g et à Λ des conditions restrictives.

Corollaire 1. Soient Λ une suite régulière de nombres positifs et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $1/F$ est un L_Θ -poids, avec $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction de Young, non identiquement nulle, vérifiant la condition de croissance (6). Soit g un L^1 -poids tel que tous ses moments d'ordre λ (de Λ) sont nuls. Si la condition $U(\|t^\lambda\|_{\Theta, 1/F}, \lambda(r))$ est satisfaite et si $g \in L_{\Psi, F}(\mathbb{R}_+^*)$, où Ψ est la conjuguée convexe de Θ , alors $g = 0$ p.p.

A.4. Nécessité des conditions.

Donnons d'abord quelques lemmes qui nous permettront de prouver le théorème A. (b).

Lemme 4. Si Θ et $\Psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sont deux fonctions duales au sens de Young, où Θ vérifie (6) et si $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction telle que $1/F$ est un L_Θ -poids et que $\log \circ F \circ \exp$ est une fonction convexe, alors

$$(\log F(e^s))/s \rightarrow +\infty, \quad s \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Sinon, il existe une suite (s_n) qui diverge à l'infini pour laquelle on a,

$$\log F(e^{s_n}) \leq N s_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\log \circ F \circ \exp$ est une fonction convexe, on a

$$\log F(e^s) \leq Ns, \quad s \geq s_0$$

c'est-à-dire

$$1 \leq t^N / F(t), \quad t \geq e^{s_0}$$

et

$$\Theta(1) \leq \Theta(t^N / F(t)), \quad t \geq e^{s_0},$$

ce qui contredit, bien évidemment, le fait que $1/F$ est un L_Θ -poids où Θ vérifie les conditions précédentes. $\square$

Lemme 5. Si Λ est une suite régulière de nombres positifs, si (M_n) est une suite de nombres positifs et si on définit la suite (N_n) par

$$N_n = \begin{cases} M_{n-k}, & n \geq k \\ M_0, & 0 \leq n \leq k \end{cases} \quad (10)$$

alors $U(M_n, \lambda(r)) \Leftrightarrow U(N_n, \lambda(r))$.

Démonstration. Comme notre intérêt n'est que pour les s grands, on peut supposer sans perte de généralité que $s \geq 0$; ceci nous permet de calculer

$$N(s) = \sup \{ns - \log M_{n-k} : n \geq k\} = M(s) + ks . \quad \square$$

Le lemme suivant est une conséquence directe des lemmes 3 et 6 de Fuchs [4], du lemme 5 et de l'inégalité suivante

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1} \lambda(r-1) < \lambda_1(r) < \lambda(r-1) ,$$

où $\lambda_1(r)$ et $\lambda(r)$ sont les fonctions caractéristiques des suites $(\lambda+1)$ et (λ) .

Lemme 6. Soient Λ une suite régulière de nombres positifs et (N_n) une suite de nombres positifs. Si la condition $U(M_n, \lambda(r))$ n'est pas satisfaite, on peut définir une fonction J

$$J(z) = (1+z)^{-A} C^{-z-1} g(z+1)H(z) \quad (11)$$

où H est le produit canonique qui ne s'annule que sur les $\lambda + 1$, $\lambda \in \Lambda$,

$$H(z) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \frac{\lambda+1-z}{\lambda+1+z} e^{2z/(\lambda+1)}$$

et g est la fonction définie par

$$\log |g(z)| = \frac{-2x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t) dt}{x^2 + (y-t)^2} - bx$$

avec

$$\psi(t) = \begin{cases} N(\lambda(t)-b) , & t \geq 0 \\ \psi(-t) & , \quad t < 0 \end{cases}$$

et où A et C sont des constantes déterminées de façon telle que l'inégalité (12) ait lieu. De plus,

i) J est holomorphe et non identiquement nulle sur $\operatorname{Re} a > -1$;

ii) $J(\lambda+1) = 0$, $\lambda \in \Lambda$ et ne possède pas d'autre zéro;

$$|J(z)| \leq B_1 |1+z|^{-2} N_n , \quad n = [\operatorname{Re} z] . \quad (12)$$

Démonstration du théorème A. (b). Par hypothèse on sait que la condition $U(M_n, \lambda(r))$ n'est pas satisfaite. Donc par le lemme 5, on sait que la condition $U(N_n, \lambda(r))$ n'est pas satisfaite, où la suite (N_n) vérifie (10) et où le nombre k est un entier que l'on déterminera au cours de la preuve. Le lemme 6 nous permet de définir pour $t > 0$,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J(x+iy) t^{-x-iy} dy .$$

Il est facile de vérifier, en intégrant sur les côtés d'un rectangle de sommets $x_0 \pm iT$, $x_1 \pm iT$ et en laissant $T \rightarrow \infty$, que $h(t)$ est indépendant de x . Comme $J(z)$ est holomorphe dans $\operatorname{Re} z > -1$, on a par la formule d'inversion de la transformée de Mellin (Titchmarsh [18]) que

$$J(z) = \int h(t) t^{z-1} dt , \quad \operatorname{Re} z > -1 ,$$

puisque si on définit J_x par $J_x(y) = J(x+iy)$, il est alors clair que $J_x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Nous allons d'abord montrer que pour tout $x \geq 0$

$$\sup \left\{ \int_0^\infty t^x |h(t)r(t)| dt : \int_0^\infty \theta |r(t)| dt \leq 2 \right\} \leq B_\Psi N_{n+2} \quad (13)$$

où $n = [x]$ et $x \geq 0$. Pour ce faire, on brise la première intégrale en deux parties et on majore chacune des parties. Ceci donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^x |h(t)r(t)| dt &= \int_0^1 t^x \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J(u+iy) t^{-u-iy} dy \right| |r(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 t^{x-u} |r(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |J(u+iy)| dy \\ &\leq 1/2 B_1 N_{[u]} \int_0^1 t^{x-u} |r(t)| dt \\ &\leq 1/2 B_1 \theta^{-1}(2) N_0 , \text{ en prenant } u = 0 . \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty t^x |h(t)r(t)| dt &\leq 1/2 B_1 N_{[u]} \int_1^\infty t^{x-u} |r(t)| dt \\ &\leq 1/2 B_1 \theta^{-1}(2) N_{[x+2]}, \text{ en prenant } u = x + 2. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que pour $j \geq j_0$

$$F(j) A_{j,\Psi} \leq 2B_\Psi \Psi^{-1}(1) j^{4-k}, \quad (14)$$

$$\text{où } A_{j,\Psi} = \sup \left\{ \int_j^{j+1} |h(t)r(t)| dt : \int_0^\infty \theta |r(t)| dt \leq 2 \right\}.$$

Considérons pour $j \in \mathbb{N}$ quelconque et pour u assez grand,

$$\begin{aligned} j^u A_{j,\Psi} &\leq \sup \left\{ \int_j^{j+1} t^u |h(t)r(t)| dt : \int_0^\infty \theta |r(t)| dt \leq 2 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_0^\infty t^u |h(t)r(t)| dt : \int_0^\infty \theta |r(t)| dt \leq 2 \right\} \end{aligned}$$

$$\leq B_\Psi N_{[u]+2} \text{ par (13); de plus par (8)}$$

$$\leq B_\Psi \Psi^{-1}(1) (\exp \phi([u]+2-k) + \exp \phi([u]+4-k)),$$

où ϕ est la première conjuguée de $x \rightarrow \log F(e^x)$. On sait par le lemme 4,

qu'il existe un u_0 à partir duquel ϕ est croissante. On a donc, pour

$$u \geq u_0 + k - 1,$$

$$\sup \left\{ j^u A_{j,\Psi} : j \in \mathbb{N} \right\} \leq 2B_\Psi \Psi^{-1}(1) \exp \phi(u+4-k)$$

c'est-à-dire

$$u \log j + \log A_{j,\Psi} \leq \log 2B_\Psi \Psi^{-1}(1) + \phi(u+4-k) < \infty,$$

pour tout $u \geq u_0 + k - 1$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$. On peut supposer, sans perte de généralité, que chaque $A_{j,\Psi}$ est non nul, car alors

$$\sup \left\{ \int_j^{j+1} F(t) |h(t)r(t)| dt : \int_0^\infty \theta |r(t)| dt \leq 1 \right\} = 0 < \infty.$$

Donc,

$$(u+4-k) \log j - \phi(u+4-k) \leq \log 2B_{\Psi} \Psi^{-1}(1) - \log A_{j,\Psi} + (4-k) \log j$$

pour tout $u \geq u_0 + k - 1$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$. On a alors pour $u_0 + k - 1$, qu'il existe un j_0 tel que pour $j \geq j_0$ on ait

$$\begin{aligned} \phi(\log j) &= \sup \{u \log j - \phi(u) : u \geq u_0 + k - 1\} \\ &= \sup \{(u+4-k) \log j - \phi(u+4-k) : u \geq u_0 + 2k - 5\} \\ &\leq \log 2B_{\Psi} \Psi^{-1}(1) - \log A_{j,\Psi} + (4-k) \log j \end{aligned}$$

et ceci entraîne directement la véracité de (14).

Il en résulte de ce qui précède que

$$\|f\|_{\Psi, F} \leq A_{\Psi} < \infty, \quad (15)$$

où $f : t \rightarrow h(2t)$. En effet,

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int_{j_0/2}^{\infty} F(t) |f(t)r(t)| dt : \int_0^{\infty} \Theta |r(t)| dt \leq 1 \right\} \\ = 1/2 \sup \left\{ \int_{j_0}^{\infty} F(t/2) |h(t)r(t)| dt : \int_0^{\infty} \Theta |r(t)| dt \leq 2 \right\} \\ \leq 1/2 \sum_{j=j_0}^{\infty} F(j) A_{j,\Psi} \\ \leq B_{\Psi} \Psi^{-1}(1) \sum_{j=j_0}^{\infty} j^{4-k} \leq \frac{\pi^2}{6} B_{\Psi} \Psi^{-1}(1), \end{aligned}$$

en prenant $k = 6$. De plus, comme $x \rightarrow \log F(e^x)$ est une fonction convexe finie sur $\mathbb{R}$ et que F est supposée bornée à droite de zéro, on a

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int_0^{j_0/2} F(t) |f(t)r(t)| dt : \int_0^{\infty} \Theta |r(t)| dt \leq 1 \right\} \\ \leq F^*(j_0/2) \sup \left\{ \int_0^{j_0/2} |h(2t)r(t)| dt : \int_0^{\infty} \Theta |r(t)| dt \leq 1 \right\} \\ \leq j_{0/4} B_1 F^*(j_0/2) \Theta^{-1}(2/j_0) N_0 \end{aligned}$$

et ceci achève la preuve de (15).

En résumé, on a construit, pour chaque fonction de Young $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, une forme linéaire continue f sur $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$, non identiquement nulle et qui s'annule sur $\mathcal{P}_\Lambda(\mathbb{R}_+^*)$; en effet, $f \in L_{\Theta, F}(\mathbb{R}_+^*)$, où Θ et Ψ sont deux fonctions duales au sens de Young et

$$\int_0^\infty t^\lambda f(t) dt = 2^{-\lambda-1} J(\lambda+1) = 0, \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Donc la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ n'est pas totale dans $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$. De plus, la forme linéaire continue qui a été construite précédemment, ne s'annule que sur $\mathcal{P}_\Lambda(\mathbb{R}_+^*)$. Ceci nous permet de construire une famille $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de formes linéaires continues biorthogonales à la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Elle est donc topologiquement linéairement indépendante dans $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$. $\square$

Remarque.

a) Les nombres A_Ψ sont des constantes fixes qui ne dépendent que de Ψ et de la suite (N_n) .

b) La dernière partie de la démonstration du théorème A (b) sera plus amplement élaborée au cours des paragraphes suivants.

A.5. Extension des résultats.

On peut étendre directement les résultats énoncés à la Section A.2 aux espaces pondérés $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R})$. Il est évident que l'on ne peut énoncer ces résultats que pour Λ une suite de nombres entiers, si l'on veut que les éléments de $\mathcal{P}_\Lambda(\mathbb{R})$ soient continus.

Théorème 2. Soient $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction paire telle que $1/F$ est un L_Θ -poids, où Θ vérifie les hypothèses du théorème A, et $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ une suite strictement croissante. Désignons respectivement par (p_n) et (i_n) les suites croissantes d'entiers pairs et impairs dont la réunion est Λ et définissons

$$M_n = \|t^n\|_{\Theta, 1/F}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée $[U(M_n, p(r)) \text{ et } U(M_n, i(r))]$ ou $[M(F, p(r)) \text{ et } M(F, i(r))]$ où p et i sont les fonctions caractéristiques des suites (p_n) et (i_n) , alors $P_\Lambda(\mathbb{R})$ est dense dans $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R})$.

(b) Réciproquement, si on suppose que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bornée dans un intervalle à droite de zéro et que la fonction $\log \circ F \circ \exp$ est convexe, alors la densité de $P_\Lambda(\mathbb{R})$ dans $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R})$ entraîne la véracité des conditions équivalentes déjà citées.

Démonstration.

(a) Pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous noterons f_1 (resp. f_2) sa fonction paire (resp. impaire) associée. On a alors

$$\|f\|_{\Theta, 1/F} \leq \|f_1\|_{\Theta, 1/F} + \|f_2\|_{\Theta, 1/F}.$$

Comme de plus,

$$\|f\|_{\Theta, 1/F, \mathbb{R}} \leq \|f|_{\mathbb{R}_+}\|_{\Theta, 1/F, \mathbb{R}_+} + \|f|_{-\mathbb{R}_+}\|_{\Theta, 1/F, -\mathbb{R}_+}$$

et que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est paire, on a

$$\|f\|_{\Theta, 1/F, \mathbb{R}} \leq 2\|f_1|_{\mathbb{R}_+}\|_{\Theta, 1/F, \mathbb{R}_+} + 2\|f_2|_{\mathbb{R}_+}\|_{\Theta, 1/F, \mathbb{R}_+}.$$

Ceci entraîne (a) puisque les conditions nous ramènent à approximer par des polynômes à exposants pairs et des polynômes à exposants impairs sur $\mathbb{R}_+$.

(b) La nécessité des conditions est claire, puisque

$$\|f_i|_{\mathbb{R}_+}\|_{\Theta, 1/F, \mathbb{R}_+} \leq 2\|f_i\|_{\Theta, 1/F, \mathbb{R}} \leq 2\|f\|_{\Theta, 1/F, \mathbb{R}}, \quad i = 1, 2$$

et que toute fonction $f \in L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+)$ peut être considérée comme la restriction à $\mathbb{R}_+$ d'une fonction paire ou impaire de $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R})$. $\square$

B. PROBLÈME DE LA NON-TOTALITÉ

Dans les paragraphes précédents, nous avons complètement résolu le problème d'approximation polynômiale généralisée dans les espaces de Orlicz pondérés $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$, où $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction de Young non identiquement nulle qui vérifie la condition de croissance (6); c'est-à-dire, que nous avons trouvé des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la totalité de la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, où Λ est une suite régulière de nombres positifs, dans les espaces $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$.

On peut alors énoncer le problème de la non-totalité en ces termes: si on suppose qu'une des conditions nécessaires et suffisantes précédemment trouvées n'est pas satisfaite, caractérisez le sous-espace fermé engendré par la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dans l'espace $L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$.

D'après le lemme 3, on peut remplacer la condition (3) qui est simplement "non $M(F, \lambda(r))$ " par la condition "non $U(M_n, \lambda(r))$ ", où

$$M_n = \|t^n\|_{\Theta, 1/F}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Comme on peut supposer, sans perte de généralité, que

$$M_0 = \|1\|_{\Theta, 1/F} = 1$$

en multipliant F par une constante, si nécessaire, on a

$$M(s) \geq 0 \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe A.4, la condition "non $U(M_n, \lambda(r))$ " nous permet de construire une fonction J holomorphe dans $\operatorname{Re} z > -1$ qui a pour seul zéro les éléments de $\Lambda + 1$; en fait

$$J(z) = (1+z)^{-A} C^{-z-1} g(z+1) H(z)$$

où g et H sont les fonctions que l'on a définies au paragraphe A.4 et où A et C sont des constantes positives déterminées de telle sorte que l'inégalité

(12) soit satisfaite. De plus, l'on sait, par le lemme 3 de Siddiqi [16], que:

Lemme 7. La fonction J précédemment définie, vérifie

$$|J'(\lambda_\nu + 1)| \geq (B \exp \lambda(\lambda_\nu)) \lambda_\nu^{\lambda_\nu} \quad (17)$$

où B est une constante positive qui ne dépend que de A et C . Pour un indice μ fixe, posons

$$J_\mu(z) = \begin{cases} \frac{J(z)}{J'(\lambda_\mu + 1)(z - \lambda_\mu - 1)}, & z \neq \lambda_\mu + 1; \\ 1, & z = \lambda_\mu + 1. \end{cases}$$

Cette définition nous permet, en nous servant du lemme 6 de formuler le lemme suivant, qui nous permettra de construire une famille biorthonormale à la famille $\{t^\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq L_{\Theta, 1/F}(\mathbb{R}_+^*)$.

Lemme 8. Soient Λ une suite régulière de nombres positifs et (N_n) la suite de nombres positifs définie par (10). Si la condition $U(M_n, \lambda(r))$ n'est pas satisfaite, on peut définir une fonction J_μ qui possède les propriétés suivantes:

- i) J_μ est holomorphe et non-identiquement nulle dans $\operatorname{Re} z > -1$;
- ii) $J_\mu(\lambda_\nu + 1) = \delta_{\mu\nu}$, pour tout $\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots$, et ne possède pas d'autre zéro;

$$|J_\mu(z)| \leq B_1 |J'(\lambda_\mu + 1)|^{-1} |1+z|^{-2} N_n, \quad n = [\operatorname{Re} z]. \quad (18)$$

Construisons maintenant notre famille biorthonormale. A la suite de la démonstration du théorème A (b), le lemme 8 nous permet de définir pour $t > 0$,

$$h_\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_\mu(x+iy) t^{-x-iy} dy,$$

ce qui nous donne, si on transcrit (13), que

$$\sup \left\{ \int_0^\infty t^x |h_\mu(t) r(t)| dt : \int_0^\infty \Theta |r(t)| dt \leq 2 \right\} \leq B_\Psi |J'(\lambda_\mu + 1)|^{-1} N_{n+2}$$

où $n = [x]$ et $x \geq 0$. D'où, on obtient pour $j \geq j_0$, en retranscrivant (14), que

$$F(j) A_{j,\Psi} \leq 2B_\Psi \Psi^{-1}(1) |J'(\lambda_\mu + 1)|^{-1} j^{4-k}, \quad (19)$$

où

$$A_{j,\Psi} = \sup \left\{ \int_j^{j+1} |h(t)r(t)| dt : \int_0^\infty \Theta |r(t)| dt \leq 2 \right\}$$

et si on se rappelle de (15), on peut alors écrire que

$$\|f_\mu\|_{\Psi,F} \leq A_\Psi e^{\lambda_\mu + 1} |J'(\lambda_\mu + 1)|^{-1} < \infty \quad (20)$$

avec $f_\mu : t \rightarrow e^{\lambda_\mu + 1} h(et)$.

Puisque, par la formule d'inversion de la transformée de Mellin on obtient

$$\int_0^\infty t^{\lambda_\nu} f_\mu(t) dt = e^{-\lambda_\nu + \lambda_\mu} J_\mu(\lambda_\nu + 1) = \delta_{\mu\nu},$$

pour tout $\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots$ et que chaque $f_\mu \in L_{\Psi,F}(\mathbb{R}_+^*)$, on a bien construit une famille $\{f_\mu : \lambda_\mu \in \Lambda\}$ biorthonormale à la famille

$$\left\{ t^{\lambda_\mu} : \lambda_\mu \in \Lambda \right\} \subseteq L_{\Theta,1/F}(\mathbb{R}_+^*).$$

Note. La construction précédente résoud effectivement la dernière partie du théorème A (b).

Lemme 9. Soit Λ une suite régulière de nombres positifs telle que

$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda} < \infty$. S'il existe une suite régulière Λ_1 de nombres positifs telle que

$\sum_{\lambda \in \Lambda_1} \frac{1}{\lambda} = \infty$ et telle que la condition de Malliavin $M(F, \lambda_1(r))$ n'est pas satis-

faite, alors on peut construire une suite $\Lambda_2 \supseteq \Lambda$ de nombres positifs telle que

$\sum_{\lambda \in \Lambda_2} \frac{1}{\lambda} = \infty$ et telle que la condition de Malliavin $M(F, \lambda_2(r))$ n'est pas

satisfaite.

Démonstration. Notons

$$h = \inf \{ |\lambda - \lambda'| : \lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda' \} ,$$

$$h' = \inf \{ |\lambda - \lambda'| : \lambda, \lambda' \in \Lambda_1, \lambda \neq \lambda' \}$$

et

$$h'' = \min \{ h/4, h'/4 \} .$$

Considérons $A_k = \{ \lambda' \in \Lambda_1 : \lambda_{k-1} < \lambda' \leq \lambda_k \}$, où λ_k est le $k^{\text{ième}}$ élément de Λ et où $\lambda_0 = 0$ et $B_k = \{ \lambda' \in \Lambda_1 : |\lambda' - \lambda_k| < h'' \}$.

Il est clair, puisque Λ_1 est une suite régulière, que B_k ne contient au plus qu'un élément, à cause de la définition de h'' . Définissons maintenant notre nouvelle suite Λ_2 :

$$\mu = \begin{cases} \lambda' & , \text{ si } \lambda' \in A_k - (B_k \cup B_{k-1}) \\ \lambda' - 2h'' & , \text{ si } \lambda' \in B_k \\ \lambda_k & , \text{ autrement.} \end{cases}$$

On complète la construction de Λ_2 en faisant varier $k = 1, 2, 3, \dots$. On voit aisément que la suite $\Lambda_2 = (\mu) \supset \Lambda$ et vérifie

$$\inf \{ |\mu - \mu'| : \mu, \mu' \in \Lambda_2, \mu \neq \mu' \} \geq h'' > 0 .$$

De plus, on a pour $r > 0$

$$\begin{aligned} \lambda_2(r) &= 2 \sum_{\substack{\mu < r \\ \mu \in \Lambda_2}} \frac{1}{\mu} > 2 \sum_{\substack{\lambda < r \\ \lambda \in \Lambda}} \frac{1}{\lambda} + 2 \sum_{\substack{\lambda' < r \\ \lambda' \in \Lambda_1}} \frac{1}{\lambda'} \\ &= \lambda(r) + \lambda_1(r) \end{aligned}$$

et

$$\lambda_2(r) = \lambda(r) + 2 \sum_{\substack{\mu < r \\ \mu \in \Lambda_2 - \Lambda}} \frac{1}{\mu} < \lambda(r) + \lambda_1(r) + c$$

où c est une constante positive. $\square$

Lemme 10. Si $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que $\Phi(\sigma)/\sigma \rightarrow +\infty$, $\sigma \rightarrow +\infty$, alors on peut construire une suite Λ_1 régulière de nombres positifs, telle que $\sum_{\lambda \in \Lambda_1} \frac{1}{\lambda} = +\infty$ et telle que la condition de Malliavin $M(\exp \circ \Phi \circ \log, \lambda_1(r))$ n'est pas satisfaite.

Démonstration. Puisque Φ est une fonction convexe telle que $\Phi(\sigma)/\sigma \rightarrow +\infty$, $\sigma \rightarrow +\infty$, il existe un $\sigma_0 > 0$ à partir duquel $\Phi'_d \circ \Phi^{-1} \circ \log$ existe, est strictement positive et croissante. Notons $k_0 = [\sigma_0] + 1$ et définissons

$$\Lambda_1 = (2k \Phi'_d(\Phi^{-1}(\log k)))_{k \geq k_0}$$

Il est clair que Λ_1 est une suite régulière de nombres positifs. De plus,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\log(n+1)) - \Phi^{-1}(\log k_0) &\leq \sum_{k=k_0}^n 1/(k \Phi'_d(\Phi^{-1}(\log k))) \\ &\leq \Phi^{-1}(\log n) + 1/(k_0 \Phi'_d(\Phi^{-1}(\log k_0))) - \Phi^{-1}(\log k_0), \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\lambda_1(r) = \Phi^{-1}(\log(n_1(r))) + O(1)$$

avec $n_1(r)$ la fonction de distribution de Λ_1 . Mais comme Λ_1 est une suite régulière, on a

$$n_1(r) \leq Ar \quad \text{avec } A > 0$$

et les conclusions du lemme se déduisent facilement de la dernière égalité. $\square$

Les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent de donner la démonstration du théorème B.

Démonstration du théorème B. Supposons que $G \in \overline{\mathcal{P}_\Lambda(\mathbb{R}_+^*)}$ par rapport à $\|\cdot\|_{\Theta, 1/F}$; il existe alors, par définition, une suite $\left(\sum_{k=1}^m c_k^{(n)} t^{\lambda_k} \right)$ pour laquelle

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m c_k^{(n)} t^{\lambda_k}, \quad \text{par rapport à } \|\cdot\|_{\Theta, 1/F}. \quad (21)$$

On sait (voir Schwartz [15]), puisqu'on peut construire une famille biorthonormale $\{f_k\}$ à la famille $\{t^{\lambda_k}\} \subseteq L_{\Theta,1/F}(\mathbb{R}_+^*)$, que cette dernière famille est topologiquement linéairement indépendante et qu'alors

$$c_k = \lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)} \text{ existe}$$

et vérifie

$$c_k = \int_0^\infty G f_k dx ; \quad (22)$$

ceci entraîne, en se souvenant de (20), que

$$|c_k| \leq \|G\|_{\Theta,1/F} \|f_k\|_{\Psi,F} \leq \|G\|_{\Theta,1/F} A'_\Psi B_1^{\lambda_k} e^{-\lambda_k \lambda(\lambda_k)} . \quad (23)$$

Supposons premièrement que la série $\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda}$ diverge. Alors l'inégalité (23) entraîne la convergence uniforme de la série $\sum_{k=1}^\infty c_k t^{\lambda_k}$ sur tout compact de

$\mathbb{R}_+^*$. Définissons, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$G_1(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k x^{\lambda_k} .$$

On a alors

$$|G_1(x)| \leq A_\Psi \sum_{k=1}^\infty e^{\lambda_k + 1} \left(B e^{\lambda(\lambda_k)} \right)^{-\lambda_k} x^{\lambda_k} \|G\|_{\Theta,1/F} . \quad (24)$$

Montrons maintenant que $G_1 = G$ p.p. . En effet, $1 \leq k \leq m_n$

$$\begin{aligned} c_k - c_k^{(n)} &= \int_0^\infty f_k(x) \left(G(x) - c_k^{(n)} x^{\lambda_k} \right) dx \\ &= \int_0^\infty f_k(x) \left(G(x) - \sum_{\nu=1}^{m_n} c_\nu^{(n)} x^{\lambda_\nu} \right) dx \end{aligned}$$

et pour $k > m_n$,

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^\infty f_k(x) G(x) dx \\ &= \int_0^\infty f_k(x) \left(G(x) - \sum_{\nu=1}^{m_n} c_\nu^{(n)} x^{\lambda_\nu} \right) dx ; \end{aligned}$$

ceci nous permet de calculer

$$\begin{aligned}
 |G_1(x) - \sum_{k=1}^{m_n} c_k^{(n)} x^{\lambda_k}| &\leq \sum_{k=1}^{m_n} |c_k - c_k^{(n)}| x^{\lambda_k} + \sum_{k=m_n+1}^{\infty} |c_k| x^{\lambda_k} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} f_k(t) \left(G(t) - \sum_{v=1}^{m_n} c_v^{(n)} t^{\lambda_v} \right) dt \right| x^{\lambda_k} \\
 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\Psi, F} \|G - \sum_{v=1}^{m_n} c_v^{(n)} t^{\lambda_v}\|_{\Theta, 1/F} x^{\lambda_k} \\
 &\leq A_{\Psi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k+1} \left(B e^{\lambda(\lambda_k)} \right)^{-\lambda_k} x^{\lambda_k} \|G - \sum_{v=1}^{m_n} c_v^{(n)} t^{\lambda_v}\|_{\Theta, 1/F}.
 \end{aligned}$$

Comme $G \in \overline{\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^*)}$ par rapport à $\|\cdot\|_{\Theta, 1/F}$ et que la série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$, on peut conclure que la suite $\left(\sum_{k=1}^{m_n} c_k^{(n)} t^{\lambda_k} \right)$ converge simplement vers G_1 , ce qui entraîne que $G_1 = G$ p.p.. Supposons maintenant que la série $\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda}$ converge. On sait, à la lumière des lemmes 4, 9 et 10, que l'on peut construire une suite régulière Λ' de nombres positifs, contenant Λ , vérifiant $\sum_{\lambda \in \Lambda'} \frac{1}{\lambda} = +\infty$ et ne satisfaisant pas la condition de Malliavin

$M(F, \lambda_1(r))$. Comme d'autre part $\mathcal{P}_{\Lambda}(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathcal{P}_{\Lambda'}(\mathbb{R}_+^*)$, l'égalité (22) peut se réécrire comme suit:

$$c_k = \int_0^{\infty} G(x) f_{\mu_k}(x) dx,$$

où $\{f_{\mu}\}$ est la famille biorthonormale associée à Λ' par la méthode décrite au début de cette section. On répète maintenant la preuve précédente avec Λ' à la place de Λ , en se rappelant que si l'inégalité (17) est satisfaite par la suite Λ' , elle l'est à fortiori par la suite Λ . $\square$

Corollaire 2. Si une suite de polynômes de $\overline{\mathcal{P}_{\Lambda}(\mathbb{R}_+^*)}$ par rapport à $\|\cdot\|_{\Theta, 1/F}$, ou plus généralement, si une suite de fonctions

$$H_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kj} t^{\lambda_k}$$

de $\overline{P_{\Lambda}(\mathbb{R}_+^*)}$ par rapport à $\|\cdot\|_{\Theta, 1/F}$, converge vers H par rapport à $\|\cdot\|_{\Theta, 1/F}$, alors la suite (H_j) converge vers H uniformément sur tout compact de $P_f = \{z = r e^{i\theta} : r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$, lorsque les fonctions H_j et H sont prolongées à P_f .

On a même plus, la suite

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_{kj} - c_k| r^{\lambda_k} \right)$$

converge uniformément vers 0 sur tout compact de P_f .

Notons $A_{1/F}^{\Theta}(\Lambda)$ l'ensemble des fonctions de $\overline{P_{\Lambda}(\mathbb{R}_+^*)}$ prolongées à P_f .

Corollaire 3 (Majoration des coefficients). Pour chaque $H \in A_{1/F}^{\Theta}(\Lambda)$, il existe une constante $C(k, \alpha)$ dépendant seulement de k et α telle que

$$|c_k| \leq C(k, \alpha) r^{-\lambda_k} H(\cdot r e^{i\alpha})_{\Theta, 1/F} \quad (26)$$

pour n'importe lequel $r > 0$ et $-\pi < \alpha < \pi$.

Démonstration. Notons c_k et $c_k^!$ les coefficients respectifs des fonctions $H \in A_{1/F}^{\Theta}(\Lambda)$ et $x \rightarrow H(x r e^{i\alpha})$ par rapport au système orthonormal (x^{λ_k}, f_k) . On a alors, par la formule de Cauchy, étendue aux séries de Dirichlet (voir [11], page 14), que $c_k^! = c_k r^{\lambda_k} e^{i\alpha\lambda_k}$; d'où le résultat. $\square$

Nous allons donner un dernier corollaire qui est un théorème du type de Liouville. Donnons d'abord une définition préliminaire. Nous appellerons rayon toute demi-droite de P_f issue de l'origine.

Corollaire 4.

a) Une fonction $H \in A_{1/F}^{\Theta}(\Lambda)$ ne peut être bornée sur un rayon sans être une constante.

b) Une fonction $H \in A_{1/F}^{\Theta}(\Lambda)$ ne peut croître moins vite, sur un rayon, que r^A ($A > 0$) lorsque $r \rightarrow \infty$, sans se réduire à un polynôme en z^{λ} , où le plus grand exposant du polynôme sera le plus grand $\lambda \in \Lambda$ plus petit ou égal à A .

Démonstration. Ceci résulte directement de l'inégalité (26) et des faits suivants:

Pour (a) :

$$\|H(\cdot r e^{i\alpha})\|_{\Theta, 1/F} \leq \text{cte } \|1\|_{\Theta, 1/f}$$

et pour (b) :

$$\|H(\cdot r e^{i\alpha})\|_{\Theta, 1/F} \leq \text{cte } r^A \|x^A\|_{\Theta, 1/F} . \square$$

Remarquons pour terminer que l'inégalité (25) montre que l'évaluation $H \rightarrow H(x)$ est une forme linéaire continue sur $\overline{P_{\Lambda}(R_+^*)}$. Nous allons prolonger continûment cette forme linéaire à $L_{\Theta, 1/F}(R_+^*)$. Définissons d'abord

$$N(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) x^{\lambda_k} ; \text{ comme}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x^{\lambda_k} f_k \right\|_{\Psi, F} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\Psi, F} x^{\lambda_k} \leq c(x)$$

on a

$$H(x) = \int_0^{\infty} H(t) N(t, x) dt , \quad \forall H \in \overline{P_{\Lambda}(R_+^*)}$$

et $f \rightarrow \int_0^{\infty} f(t) N(t, x) dt$ est le prolongement désiré, puisque $N(\cdot, x) \in L_{\Psi, F}(R_+^*)$.

Question ouverte. Est-ce que la famille $\{t \rightarrow t^{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ est une base au sens de I. Singer [17] pour l'espace de Banach $\overline{P_{\Lambda}(R_+^*)}$?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AKUTOWICZ, E.J., Weighted approximation on the real axis, Gber. Deutsch. Math. Verein., vol. 63 (3), (1966), pp. 113-139.
- [2] BERNSTEIN, S., Sur les fonctions poids, Dokl., Akad. Nauk, SSSR, vol. 77, (1951), p. 549.

- [3] CARLESON, L., On Bernstein's approximation problem, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 2, (1951), p. 953.
- [4] FUCHS, W.H.J., On the closure of $\{e^{-t} t^{\lambda n}\}$, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 42, (1946), pp. 91-105.
- [5] LAVOIE, M., Approximation polynômiale pondérée généralisée, Thèse de la Faculté des sciences pures, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, (1972).
- [6] LAVOIE, M., Approximation polynômiale généralisée dans certains espaces seminormés, Bull. Canad. Math., vol. 18 (4), (1975), pp. 523-527.
- [7] MALLIAVIN, P., Sur quelques procédés d'extrapolation, Acta Math., vol. 93, (1955), pp. 179-255.
- [8] MANDELBROJT, S., Sur les fonctions convexes, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, vol. 209, (1939), p. 977.
- [9] MANDELBROJT, S., General theorems of closure, The Rice Institute Pamphlet, Special Issue, (1951), pp. 1-71.
- [10] MANDELBROJT, S., Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications, Gauthier-Villars, Paris, (1952).
- [11] MANDELBROJT, S., Séries de Dirichlet. Principes et méthodes, Gauthier-Villars, Paris, (1969).
- [12] MERGELYAN, S.N., Weighted approximation by polynomials, Amer. Math. Soc. Transl., Series 2, vol. 10, (1958), pp. 59-106.
- [13] POLLARD, H., Solution of Bernstein's approximation problem, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 4, (1953), pp. 869-875.
- [14] POLLARD, H., The Bernstein's approximation problem, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 6, (1955), pp. 402-411.
- [15] SCHWARTZ, L., Etude des sommes d'exponentielles, Hermann, Paris, (1959).

- [16] SIDDIQI, J.A., On the closure of linear span of a weighted sequence in L^p -spaces, Journ. Canad. Math., vol. 25, (1973), pp. 386-396.
- [17] SINGER, I., Bases in Banach spaces I, Springer-Verlag, New-York, (1970).
- [18] TITCHMARSH, E.C., Introduction to the theory of Fourier integrals, Clarendon Press, Oxford, (1948).
- [19] ZAAENEN, A.C., Linear analysis, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1964).

*Département des sciences pures
Université du Québec à Rimouski
300, avenue des Ursulines
Rimouski, Québec
G5L 3A1*

*Manuscrit reçu le 23 mars 1977.
Révisé le 4 janvier 1979.*