

DENSITÉ D'UNE FONCTION

Michel Bruneau

On s'intéresse ici aux propriétés de "différentiabilité" d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$). A côté de la dérivée f' et de la dérivée approximative f'_{ap} on étudie la densité f^* , qui correspond à un affaiblissement de la notion de dérivée approximative.

1. DENSITÉ D'UNE FONCTION

A. Dérivée et dérivée approximative.

Etant donné une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$) on désigne respectivement par f' et f'_{ap} la dérivée et la dérivée approximative de f . Notons respectivement par Δ et Δ_{ap} les ensembles de définition de f' et f'_{ap} :

$$f' : \Delta \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

$$f'_{ap} : \Delta_{ap} \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) .$$

Conformément aux notations du chapitre I de H. Federer [4] on peut, quel que soit $0 \leq m \leq n$ définir les applications

$$\wedge_m f'(x) : \wedge_m \mathbb{R}^n \rightarrow \wedge_m \mathbb{R}^p \quad (x \in \Delta)$$

$$\wedge_m f'_{ap}(x) : \wedge_m \mathbb{R}^n \rightarrow \wedge_m \mathbb{R}^p \quad (x \in \Delta_{ap}) .$$

$\|\cdot\|$ étant la norme de la convergence uniforme, on appelle alors *jacobien* de f au point $x \in \Delta$ le nombre

$$(1) \quad |f'(x)| = \|\wedge_n f'(x)\|$$

et jacobien approximatif de f au point $x \in \Delta_{ap}$ le nombre

$$(2) \quad |f'_{ap}(x)| = \|\wedge_n f'_{ap}(x)\|.$$

B. Prolongement presque partout.

Soient A, B deux boréliens de $\mathbb{R}^n$. Etant donné un ensemble E , disons qu'une fonction $g : B \rightarrow E$ est un prolongement p.p. d'une fonction $f : A \rightarrow E$ si pour presque tout $x \in A : x \in B$ et $f(x) = g(x)$. Convenons alors d'écrire

$$f \rightarrow g.$$

Ainsi, pour une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$) on a les prolongements p.p.:

$$f' \rightarrow f'_{ap}$$

$$|f'| \rightarrow |f'_{ap}|,$$

où

$$|f'| : x \in \Delta \rightarrow |f'(x)|$$

$$|f'_{ap}| : x \in \Delta_{ap} \rightarrow |f'_{ap}(x)|.$$

Notre but est ici de définir et d'étudier un prolongement p.p., généralement non trivial, de $|f'_{ap}|$. Ce sera une application appelée densité de f , notée f^* et vérifiant

$$|f'| \rightarrow |f'_{ap}| \rightarrow f^*.$$

C. Mesure de Hausdorff de dimension n .

Pour tout nombre entier $n \leq p$, soit μ_n la mesure de Hausdorff, de fonction déterminante

$$\xi(t) = \alpha(n) 2^{-n} t^n \quad (t \geq 0)$$

où

$$\alpha(n) = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^n / \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) ,$$

définie sur les boréliens de $\mathbb{R}^p$. De façon précise, pour tout borélien A de $\mathbb{R}^p$, $\mu_n(A)$ est la limite inférieure des nombres $\sum_{k=1}^{\infty} \xi \circ \delta(B_k)$, où B_k ($k \in \mathbb{N}$) est un recouvrement de A constitué de parties arbitraires de $\mathbb{R}^p$, obtenue lorsque $\sup_k \delta(B_k) \rightarrow 0$ (δ étant la fonction diamètre). La mesure μ_n est appelée *mesure de Hausdorff de dimension n dans $\mathbb{R}^p$* . En particulier, on sait que si $n = p$: $\mu_n = |\cdot|_n$, où $|\cdot|_n$ désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

D. Densité.

On se donne des entiers $n \leq p$. μ_n désigne la mesure de Hausdorff de dimension n dans $\mathbb{R}^p$. Soit une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Désignons par I_f l'ensemble des boréliens A de $\mathbb{R}^n$ tels que:

i) $f|_A$ est injective.

ii) La mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$: $\mu_n[f(A \cap \cdot)]$ est localement finie et absolument continue par rapport à $|\cdot|_n$.

Soit Δ^* l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que le rapport de $\mu_n[f(B)]$ sur $|B|_n$ admet une limite inférieure finie lorsque B parcourt l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^n$, appartenant à I_f , admettant x comme point de densité et lorsque $\delta(B) \rightarrow 0$, δ étant la fonction diamètre.

Si $x \in \Delta^*$ nous dirons que f admet une densité au point x et que la densité de f au point x est le nombre

$$(3) \quad f^*(x) = \lim_{\substack{B \in I_f, x \in \tilde{B} \\ \delta(B) \rightarrow 0}} \frac{\mu_n[f(B)]}{|B|_n} ,$$

$\tilde{B}$ désignant, pour tout borélien B , l'ensemble des points de densité de B .

La densité de f est l'application

$$(4) \quad f^* : x \in \Delta^* \rightarrow f^*(x) .$$

E. Principaux résultats.

Soit une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$) .

Théorème 1. Soit un borélien $A \in \mathcal{I}_f$. Pour presque tout $x \in A : x \in \Delta^*$ et I parcourant les hypercubes ouverts contenant x , le rapport $\mu_n[f(A \cap I)]$ sur $|I|_n$ admet une limite lorsque $|I|_n \rightarrow 0$ et

$$(5) \quad f^*(x) = \lim_{\substack{x \in I \\ |I|_n \rightarrow 0}} \frac{\mu_n[f(A \cap I)]}{|I|_n}$$

Théorème 2.

a) Δ^* est un ensemble mesurable et f^* est une fonction mesurable.

b) f^* est un prolongement p.p. de $|f'_{ap}| :$

$$(6) \quad |f'| \rightarrow |f'_{ap}| \rightarrow f^* .$$

2. PREUVE DU THÉORÈME 1

Soient une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$) et un borélien A de $\mathbb{R}^n$ sur lequel f est injective, telle que la mesure $\mu_n[f(A \cap \cdot)]$ soit localement finie et absolument continue par rapport à $|\cdot|_n$. On peut supposer que tout point de A est point de densité pour $A : A \subset \tilde{A}$. D'après une généralisation du théorème de dérivation de H. Lebesgue (voir M. de Guzman [5], p. 42 à 44), pour presque tout $x \in A$, I parcourant $\mathcal{H}_n$, l'ensemble des hypercubes ouverts de $\mathbb{R}^n$, le rapport de $\mu_n[f(A \cap I)]$ sur $|I|_n$ admet une limite lorsque $x \in I$, $|I|_n \rightarrow 0$. Il résulte donc du théorème de densité que, pour presque tout $x \in A$, I parcourant $\mathcal{H}_n$,

$$(7) \quad f^*(x) \leq \lim_{\substack{x \in I \\ |I|_n \rightarrow 0}} \frac{\mu_n[f(A \cap I)]}{|A \cap I|_n} = \lim_{\substack{x \in I \\ |I|_n \rightarrow 0}} \frac{\mu_n[f(A \cap I)]}{|I|_n} .$$

Supposons qu'il existe un compact $K \subset A$ et des nombres $\lambda < \nu$ tels que

$$(8) \quad f^*(x) \leq \lambda < \nu \leq \lim_{\substack{x \in I \\ |I|_n \rightarrow 0}} \frac{\mu_n[f(A \cap I)]}{|I|_n}$$

en tout $x \in K$. (On suppose en particulier que la limite qui intervient dans (8) existe en tout point de K .) Alors tout revient à prouver que $|K|_n = 0$.

Donnons-nous un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi. Soit U un ouvert contenant K tel que

$$(9) \quad |U \setminus K|_n \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu_n[f(A \cap (U \setminus K))] \leq \varepsilon .$$

Il existe une suite (B_k) de boréliens possédant les propriétés suivantes:

- i) $B_k \subset U \quad (k \in \mathbb{N})$.
- ii) $|K \setminus \bigcup_k B_k|_n = 0$.
- iii) $\mu_n[f(B_k)] \leq (\lambda + \varepsilon) |B_k|_n \quad (k \in \mathbb{N})$.
- iv) $f|_{B_k}$ est injective $(k \in \mathbb{N})$.
- v) Les boréliens $B_k \quad (k \in \mathbb{N})$ sont deux à deux disjoints.

On notera que la suite (B_k) se construit par une récurrence transfinie. On déduit de (i), (v) et (9) que

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|_n \leq \left| \bigcup_k B_k \right|_n \leq |U|_n \leq |K|_n + \varepsilon$$

et par ailleurs que

$$(11) \quad \mu_n \left(f \left[(A \setminus K) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) \right] \right) \leq \varepsilon .$$

Désignons maintenant par V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes:

$$(j) \quad V \subset U \quad \text{et} \quad \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \setminus V \right|_n = 0 .$$

$$(jj) \quad \mu_n [f(A \cap V)] \leq \mu_n \left[f \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) \right] + \varepsilon .$$

Posons

$$(12) \quad L = K \cap V .$$

D'après (ii) et (j)

$$(13) \quad |L|_n = |K|_n ,$$

si bien que (10) donne

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|_n \leq |L|_n + \varepsilon .$$

Or, on déduit de (jj) que

$$\mu_n [f(L)] \leq \mu_n [f(A \cap V)] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n [f(B_k)] + \varepsilon .$$

Ainsi, compte tenu de (iii),

$$\mu_n [f(L)] \leq (\lambda + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|_n + \varepsilon$$

et d'après (14),

$$(15) \quad \mu_n [f(L)] \leq (\lambda + \varepsilon)(|L|_n + \varepsilon) + \varepsilon .$$

Nous allons maintenant chercher une minoration de $\mu_n [f(L)]$. D'après le théorème de recouvrement de G. Vitali (voir M. de Guzman [5], p. 20), il existe une suite $(I_k)_{1 \leq k \leq m}$ d'hypercubes ouverts, deux à deux disjoints possédant les propriétés suivantes:

- i) $\sum_{k=1}^m |L \cap I_k|_n \geq |L|_n - \varepsilon$.
- ii) $I_k \subset U \quad (1 \leq k \leq m)$.
- iii) $\mu_n [f(A \cap I_k)] \geq (v - \varepsilon) |I_k|_n \quad (1 \leq k \leq m)$.

En effet, on déduit de (8) que les hypercubes ouverts I de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\mu_n [f(A \cap I)] \geq (v - \varepsilon) |I|_n \quad \text{et} \quad I \subset U$$

constituent un recouvrement de Vitali de L . Il est donc possible d'en extraire la suite $(I_k)_{1 \leq k \leq m}$. Alors d'une part

$$\mu_n [f(A \cap U)] \geq \sum_{k=1}^m \mu_n [f(A \cap I_k)] \geq (v - \varepsilon) \sum_{k=1}^m |I_k|_n \geq (v - \varepsilon) (|L|_n - \varepsilon)$$

et d'autre part, compte tenu de (9), (13) et (j),

$$\mu_n (f[(A \setminus L) \cap V]) = \mu_n (f[(A \setminus K) \cap V]) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, on obtient la minoration

$$\mu_n [f(L)] = \mu_n [f(L \cap U)] = \mu_n [f(A \cap U)] - \mu_n (f[(A \setminus L) \cap U]) \geq (v - \varepsilon) (|L|_n - \varepsilon) - \varepsilon,$$

soit

$$(16) \quad \mu_n [f(L)] \geq |L|_n - (1 + v + |L|_n) \varepsilon.$$

Il résulte alors de (8), (15) et (16) que

$$(17) \quad 0 \leq (v - \lambda) |L|_n \leq \varepsilon (2 + \lambda + v + 2 |L|_n);$$

donc, puisque $v \geq \lambda$ et que $\varepsilon \geq 0$ est arbitraire, $|K|_n = |L|_n = 0$. $\square$

3. PREUVE DU THEOREME 2

A. Résultats préliminaires.

Lemme 1. Pour toute fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$), il existe des boréliens A_k ($k \in \mathbb{N}$) deux à deux disjoints possédant les propriétés suivantes:

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset \Delta^\bullet$, $f|_{A_k}$ est injective et la mesure $\mu_n[f(A_k \cap \cdot)]$ est localement finie et absolument continue par rapport à $|\cdot|_n$.

b) $\Delta^\bullet \setminus \bigcup_k A_k$ est de mesure nulle.

On utilise toujours le symbole $\sim$ pour désigner l'ensemble des points de densité d'un ensemble donné. Par une récurrence transfinie, on prouve l'existence d'une suite (A_k) satisfaisant aux conditions du lemme. En effet, soit (A_k) une famille maximale de boréliens de mesure non nulle, inclus dans $\Delta^\bullet$, deux à deux disjoints, vérifiant (a). Supposons alors que (b) n'est pas vérifié, c'est-à-dire que

$$N = \Delta^\bullet \setminus \widetilde{\bigcup_k A_k}$$

est non vide. Soit $x \in N$. Il existe un borélien B admettant x comme point de densité, tel que $f|_B$ soit injective et que la mesure $\mu_n[f(B \cap \cdot)]$ soit localement finie et absolument continue par rapport à $|\cdot|_n$. Soit $C = B \cap \Delta^\bullet$. Il résulte du théorème 1 que C ne diffère de B que par un ensemble négligeable. Donc C est mesurable. Soit B_0 un borélien inclus dans C tel que

$$|B_0|_n = |C|_n = |B|_n.$$

Alors

$$A = B_0 \setminus \widetilde{\bigcup_k A_k}$$

est un borélien de mesure non nulle, inclus dans N , sur lequel f est injective et pour lequel la mesure $\mu_n[f(A \cap \cdot)]$ est localement finie et absolument continue par rapport à $|\cdot|_n$, ce qui entraîne une contradiction d'après le choix de la suite (A_k) . Ainsi $N = \emptyset$. Autrement dit

$$\bigcup_k A_k \subset \Delta^\bullet \subset \widetilde{\bigcup_k A_k}$$

ce qui, compte tenu du théorème de densité, prouve que $\Delta^\bullet$ ne diffère de $\bigcup_k A_k$

que par un ensemble négligeable. Ainsi, la suite (A_k) vérifie les propriétés du lemme. $\square$

Lemme 2. (R.O. Davies [2], p. 489, C.A. Rogers [6], p. 122) Si μ_n est la mesure de Hausdorff de dimension n dans $\mathbb{R}^p$ ($p \geq n$) et si S est un ensemble F -souslinien avec $\mu_n(S) = \infty$, alors il existe un sous-ensemble compact K de S tel que $0 < \mu_n(K) < \infty$.

C'est un cas particulier de la forme généralisée du théorème de Besicovitch (A.S. Besicovitch [1], p. 340, Cl. Dellacherie [3], p. 95, H. Federer [4], p. 204).

Lemme 3. Soit une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$). Il existe une suite (A_k) de boréliens inclus dans Δ_{ap} , deux à deux disjoints, sur lesquels f est lipschitzienne et injective, telle que

$$(18) \quad |\Delta_{ap} \setminus \bigcup_k A_k|_n = 0.$$

C'est une conséquence du théorème 3.1.8 de H. Federer [4].

Lemme 4. Soit une fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$). Pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$ sur lequel f est injective

$$(19) \quad \mu_n[f(A)] = \int_A |f'(x)| \, dx.$$

C'est un corollaire du théorème 3.2.3 de H. Federer [4].

B. Preuve du théorème 2.

Le (a) du théorème 2 est une conséquence du théorème 1 et du lemme 1. Il suffit donc d'établir le (b). Du lemme 3 et du théorème 1, on déduit que

$$(20) \quad \Delta_{ap} \subset \Delta^* \quad (p.p.).$$

Alors, compte tenu du théorème 1, il reste à établir le lemme suivant:

Lemme 5. Soient une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$) et un borélien $A \subset \Delta_{ap}$ sur lequel f est injective et la mesure $\mu_n[f(A \cap \cdot)]$ est localement

finie et absolument continue par rapport à $|\cdot|_n$. En presque tout $x \in A$, le rapport de $\mu_n[f(A \cap I)]$ sur $|I|_n$ admet une limite, lorsque I parcourt les hypercubes ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \in I$ et lors $|I|_n \rightarrow 0$, et

$$(21) \quad |f'_{\text{ap}}(x)| = \lim_{\substack{x \in I \\ |I|_n \rightarrow 0}} \frac{\mu_n[f(A \cap I)]}{|I|_n}.$$

Compte tenu du théorème 1 et des lemmes 2 et 3, on peut se ramener au cas où il existe une fonction lipschitzienne $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ayant même restriction à A que f . On peut par ailleurs supposer l'existence de nombres $0 \leq \lambda < \nu < +\infty$ pour lesquels

$$(22) \quad \lambda \leq |g'(x)| \leq \nu$$

en tout $x \in A$. D'après le théorème de densité et le théorème de dérivation de H. Lebesgue, on peut encore admettre que $A \subset \tilde{A}$ et que pour tout $x \in A$, le rapport de $\mu_n[f(A \cap I)]$ sur $|I|_n$ a une limite lorsque $I \in H_n$, $x \in I$ et $|I|_n \rightarrow 0$. Or, compte tenu du lemme 4 et de (22), il vient

$$\mu_n[f(A \cap I)] = \mu_n[g(A \cap I)] = \int_{A \cap I} |g'(x)| \, dx \leq \nu |A \cap I|_n \leq \nu |I|_n.$$

Ainsi, pour tout $x \in A$, le membre de droite de (21) est $\leq \nu$. On prouve de même qu'il est $\geq \lambda$. Ceci permet de conclure puisque

$$(23) \quad |g'(x)| = |f'_{\text{ap}}(x)|$$

presque partout sur A . $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BESICOVITCH, A.S., On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure, Indag. Math. 14, 1952, pp. 339-344.
- [2] DAVIES, R.O., Subsets of finite measure in analytic sets, Indag. Math. 14, 1952, pp. 488-489.

- [3] DELLACHERIE, Cl., Ensembles analytiques, Capacités, Mesures de Hausdorff, Lect. Notes in Math., 295, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [4] FEDERER, H., Geometric measure theory, Springer-Verlag, 153, 1969.
- [5] DE GUZMAN, M., Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$, Lect. Notes in Math., 481, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [6] ROGERS, C.A., Hausdorff measures, Cambridge University Press, London, 1970.

Département de mathématiques
Faculté des sciences de Rabat
Université Mohamed V
Avenue Moulay Chérif
Rabat, Maroc

Manuscrit reçu le 23 décembre 1977.
Revisé le 17 septembre 1978.

