

RÉGULARITÉ D'UNE FONCTION D'ENSEMBLES À VALEURS DANS UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Jean-Marc Belley et Pedro Morales

INTRODUCTION

Le but de cet article est de présenter une définition abstraite de la régularité d'une fonction d'ensembles, définie dans un clan $\mathcal{R}$ de parties d'un ensemble X et à valeurs dans un groupe topologique commutatif G . Nous montrerons que si $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow G$ est additive et "régulière", alors λ est σ -additive. Ce résultat généralise, dans le cas où X est un espace topologique, les théorèmes d'Alexandroff ([1, p. 590], [4, p. 138]), de Glicksberg ([5, pp. 254-256], [20, p. 172]), de Dinculeanu et Kluvanek [3, p. 510], de Huneycutt ([10, p. 507], [11, p. 1118]) et de Radu [14, p. 81].

1. RÉSULTAT PRINCIPAL

Soit X un ensemble abstrait et soit $\mathcal{R}$ un clan de parties de X . Considérons deux ensembles non vides A, B de parties de X et deux applications $\phi_1 : A \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $\phi_2 : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$ (où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X) satisfaisant aux conditions suivantes:

- i) $B \subseteq \mathcal{R}$;
- ii) l'intersection de deux ensembles de B appartient à B ;
- iii) $A \subseteq \phi_1(A)$ pour tout $A \in A$;

iv) $\phi_2(B) \subseteq B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$;

v) $\phi_2(B_1) \cap \phi_2(B_2) \subseteq \phi_2(B_1 \cap B_2)$ quels que soient B_1 et B_2 dans $\mathcal{B}$;

vi) si $\phi_1(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_2(B_n)$, $A \in \mathcal{A}$, $B_n \in \mathcal{B}$, alors il existe un entier positif N tel que $\phi_1(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^N \phi_2(B_n)$.

Soit G un groupe topologique commutatif noté additivement et avec élément neutre o . Il est bien connu que l'ensemble $\mathcal{V}$ des voisinages symétriques de o forme un système fondamental de voisinages de o . Etant donné $V \in \mathcal{V}$, nous pouvons choisir, d'après la continuité de l'addition, une suite $\{V_n\}$ dans $\mathcal{V}$ telle que $\sum_{k=1}^n V_k \subseteq V$ pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$ (voir [18, Lemma 2.4, p. 91]).

Soit $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow G$ une fonction d'ensembles telle que $\lambda(\emptyset) = 0$. Nous dirons que λ est (ϕ_1, ϕ_2) -régulière si, pour tout $E \in \mathcal{R}$ et tout $V \in \mathcal{V}$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ et un ensemble $B \in \mathcal{B}$, tels que $\phi_1(A) \subseteq E \subseteq \phi_2(B)$ et $F \in \mathcal{R}$, $F \subseteq B \setminus A$ entraîne $\lambda(F) \in V$. Remarquons que si on prend $\phi_1(A) = A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, alors la (ϕ_1, ϕ_2) -régularité se réduit à la (ϕ_1, ϕ_2) -régularité considérée dans [15, p. 157]. Rappelons que λ est additive si

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B) \quad \text{et} \quad \lambda \text{ est } \sigma\text{-additive si } \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

pour toute suite $\{A_n\}$ d'ensembles de $\mathcal{R}$ deux à deux disjoints et telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

Théorème. Si $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow G$ est additive et (ϕ_1, ϕ_2) -régulière, alors λ est σ -additive.

Démonstration. Soit $\{E_n\}$ une suite d'ensembles de $\mathcal{R}$ deux à deux disjoints et telle que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{R}$, et soit $V \in \mathcal{V}$. Choisissons une suite $\{V_n\}$ dans $\mathcal{V}$ telle que $\sum_{k=1}^n V_k \subseteq V$ pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$. Puisque λ est

(ϕ_1, ϕ_2) -régulière, on peut trouver des ensembles $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ tels que $\phi_1(A) \subseteq E \subseteq \phi_2(B)$ et $F \in \mathcal{R}$, $F \subseteq B \setminus A$ entraîne $\lambda(F) \in V$. Aussi, pour tout entier positif n , on peut trouver des ensembles $A_n \in \mathcal{A}$, $B_n \in \mathcal{B}$ tels que $\phi_1(A_n) \subseteq E_n \subseteq \phi_2(B_n)$ et $F \in \mathcal{R}$, $F \subseteq B_n \setminus A_n$ entraîne $\lambda(F) \in V_n$. Puisque $A_n \subseteq \phi_1(A_n)$ (par (iii)), nous avons que $\lambda(F) \in V_n$ pour tout $F \in \mathcal{R}$ tel que $F \subseteq B_n \setminus E_n$. Soit $B'_n = B_n \cap B$. Alors $B'_n \in \mathcal{B}$ (ii). Puisque $E_n \subseteq E \subseteq \phi_2(B)$, nous déduisons de (v) et (iv) que $E_n \subseteq \phi_2(B_n) \cap \phi_2(B) \subseteq \phi_2(B'_n) \subseteq B'_n$. Ainsi, si $F \in \mathcal{R}$ et $F \subseteq B'_n \setminus E_n$, alors $F \subseteq B_n \setminus E_n$, donc $\lambda(F) \in V_n$.

Puisque $\phi_1(A) \subseteq E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_2(B'_n)$, d'après (vi), il existe un entier positif N tel que $\phi_1(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^N \phi_2(B'_n)$. Ainsi par (iii) et (iv), $A \subseteq \bigcup_{n=1}^N B'_n$.

Soit n un entier positif tel que $n \geq N$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda(E) - \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n B'_k\right) &= \lambda(E) - \lambda\left[\left(\bigcup_{k=1}^n B'_k \cap E\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^n B'_k \setminus E\right)\right] \\ &= \lambda(E) - \left[\lambda\left(\bigcup_{k=1}^n B'_k \cap E\right) + \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n B'_k \setminus E\right)\right] \\ &= \lambda\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^n B'_k\right) - \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n B'_k \setminus E\right) \\ &\in 2V \end{aligned}$$

puisque, par (i), $E \setminus \bigcup_{k=1}^n B'_k$, $\bigcup_{k=1}^n B'_k \setminus E$ appartiennent à $\mathcal{R}$ et sont contenus dans $B \setminus A$.

D'autre part, puisque

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^n B'_k \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k &= \bigcup_{k=1}^n \left[B'_k \setminus \bigcup_{j=1}^n E_j \right] \\ &= \bigcup_{k=1}^n \left\{ B'_k \setminus \left[\left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B'_i \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

et les ensembles $B'_k \setminus \left[\left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B'_i \right) \right] \subseteq B'_k - E_k$ sont deux à deux disjoints

et appartient à $\mathcal{R}$, nous avons

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^n B'_k\right) - \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda\left(B'_k \setminus \left[\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B'_i\right)\right]\right) \\ \in \sum_{k=1}^n V_k \subseteq V.$$

Donc $\lambda(E) - \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \in 3V$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent, λ est σ -additive.

2. CONSÉQUENCES

Dans cette section, X sera toujours un espace topologique, mais pas nécessairement un espace séparé.

Soit $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow G$ une fonction d'ensembles tel que $\lambda(\emptyset) = 0$. Nous disons que λ est une *charge* sur X si

(1) λ est additive;

(2) pour tout $E \in \mathcal{R}$ et pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $A, B \in \mathcal{R}$ tels que $\overline{A} \subseteq E \subseteq \overset{\circ}{B}$ et $\lambda(F) \in V$ pour tout $F \in \mathcal{R}$ avec $F \subseteq B \setminus A$.

Rappelons que X est *semi-compact* si tout recouvrement ouvert dénombrable de X contient un sous-recouvrement fini.

Le corollaire suivant généralise le théorème d'Alexandroff ([1, p. 590], [4, p. 138]):

Corollaire 1. Si X est semi-compact, alors toute charge sur X est σ -additive.

Démonstration. Soit $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow G$ une charge sur X . Prenons $A = B = \mathcal{R}$ et définissons $\phi_1(A) = \overline{A}$, $\phi_2(B) = \overset{\circ}{B}$ pour tout couple $A, B \in \mathcal{R}$.

Alors les propriétés (i)-(v) sont satisfaites trivialement.

Puisque toute partie fermée d'un espace semi-compact est semi-compacte, la propriété (vi) est aussi satisfaite. C'est clair que λ est

(ϕ_1, ϕ_2) -régulière. Donc, d'après le théorème, λ est σ -additive.

Soit $Z = \{f^{-1}(0) \mid f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$.

Chaque élément de Z s'appelle en anglais "zero set" et ses complémentaires s'appellent "cozero sets".

Selon Hewitt [8, p. 163], les ensembles de Baire dans X sont les éléments appartenant à la σ -algèbre $\mathcal{B}^*(X)$ engendrée par les complémentaires de Z . Si X est un espace localement compact dénombrable à l'infini, Ross et Stromberg [16, Proposition 1.1, p. 151] ont démontré que cette définition est consistante avec la définition classique de Halmos [6, p. 220].

Soit $\lambda : \mathcal{B}^*(X) \rightarrow G$. Nous disons que λ est une *fonction d'ensembles de Baire* sur X si

(1) est additive;

(2) pour tout $E \in \mathcal{B}^*(X)$ et pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $A \in Z$, $B \in \mathcal{C} = \{X \setminus Z \mid Z \in Z\}$ tels que $A \subseteq E \subseteq B$ et $\lambda(F) \in V$ pour tout $F \in \mathcal{B}^*(X)$ avec $F \subseteq B \setminus A$.

Rappelons que X est *pseudo-compact* si chaque fonction réelle continue sur X est bornée.

Le lemme suivant est dû essentiellement à Hewitt [7, Theorem 34, p. 70] (voir aussi [19, Theorem 2.3, p. 438]):

Lemme 1. Un espace topologique X est pseudo-compact si et seulement si toute suite d'ensembles de Z qui possède la propriété de l'intersection finie, A une intersection non vide.

Le corollaire suivant généralise le théorème de Glicksberg ([5, pp. 254-256], [20, p. 172]):

Corollaire 2. Si X est pseudo-compact, alors toute fonction d'ensembles de Baire est σ -additive.

Démonstration. Soit $\lambda : \mathcal{B}^*(X) \rightarrow G$ une fonction d'ensembles de Baire.

Prenons $A = Z$, $B = C$ et définissons $\phi_1(A) = A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, et $\phi_2(B) = B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. C'est clair que les conditions (i)-(v) sont satisfaites.

Montrons que la condition (vi) est aussi satisfaite. Supposons que

$$A = \phi_1(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_2(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ avec } A \in \mathcal{A}, B_n \in \mathcal{B} \text{ pour tout } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Alors } \bigcap_{n=1}^{\infty} [A \cap (X \setminus B_n)] = \phi.$$

Puisque $X \setminus B_n \in Z$, $A \cap (X \setminus B_n) \in Z$. Donc, d'après le lemme, la suite $\{A \cap (X \setminus B_n)\}$ ne possède pas la propriété de l'intersection finie.

$$\text{Il existe alors un entier positif } N \text{ tel que } \bigcap_{n=1}^N [A \cap (X \setminus B_n)] = \phi, \text{ d'où}$$

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^N B_n.$$

Clairement λ est (ϕ_1, ϕ_2) -régulière. Alors, d'après le théorème, λ est σ -additive.

Soit $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow G$ une fonction d'ensembles tel que $\lambda(\phi) = 0$. Selon Dinculeanu et Kluvanek [3, p. 508] nous disons que λ est R_2 -régulière si, pour tout $E \in \mathcal{R}$ et tout $V \in \mathcal{V}$, il existe un ensemble relativement compact $A \in \mathcal{R}$ et un ensemble $B \in \mathcal{R}$ tels que $\bar{A} \subseteq E \subseteq \overset{\circ}{B}$ et $\lambda(F) \in V$ pour tout $F \in \mathcal{R}$ avec $F \subseteq B \setminus A$.

Le corollaire suivant généralise le théorème de Dinculeanu et Kluvanek [3, p. 510]:

Corollaire 3. Si $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow G$ est additive et R_2 -régulière, alors λ est σ -additive.

Démonstration. Prenons A comme l'ensemble de toutes les parties relativement compactes de $\mathcal{R}$ et $B = \mathcal{R}$. Définissons $\phi_1(A) = \bar{A}$ et $\phi_2(B) = \overset{\circ}{B}$ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Clairement les conditions (i)-(vi) sont satisfaites,

et λ est (ϕ_1, ϕ_2) -régulière. Donc, d'après le théorème, λ est σ -additive.

La topologie d'un groupe topologique commutatif s'exprime en termes d'une famille de pseudo-distances continues et invariantes [9, Theorem 8.2, p. 68]. Plus précisément, si $\mathcal{P}$ est la famille de toutes les pseudo-distances continues et invariantes sur G , alors l'ensemble des parties de G de la forme

$\{x: p(x, o) < \varepsilon\}$ où $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$, est un système fondamental de voisinages de o pour la topologie de G . Notons que si $p \in \mathcal{P}$, alors la fonction

$|\cdot|_p : G \rightarrow [0, \infty)$ définie par la formule $|x|_p = p(x, o)$ possède les propriétés : $|o|_p = 0$, $|-x|_p = |x|_p$ et $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$ quels que soient x, y dans G .

Rappelons qu'un ensemble non vide H de parties de X est un semi-clan s'il satisfait aux conditions suivantes:

(1) l'intersection de deux ensembles de H appartient à H ;

(2) quels que soient $A, B \in H$ avec $A \subseteq B$, il existe une suite finie

$\{H_i: 0 \leq i \leq n\}$ dans H telle que $A = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_n = B$ et $H_i \setminus H_{i-1} \in H$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Evidemment, la classe d'intervalles de $\mathbb{R}$ ayant la forme $(a, b]$ ($a \leq b$) est un semi-clan. Remarquons que le clan $\mathcal{R}(H)$ engendré par le semi-clan H est constitué par des réunions finies des ensembles mutuellement disjoints de H [2, p.8].

Soit $\lambda : H \rightarrow G$ une fonction d'ensembles telle que $\lambda(\phi) = 0$. Pour chaque $p \in \mathcal{P}$, définissons les fonctions d'ensembles $(\lambda_r)_p, (\lambda_d)_p : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ par les formules $(\lambda_r)_p(B) = \sup \{ |\lambda(E)|_p : E \in H, E \subseteq B \}$ et

$$(\lambda_d)_p(B) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \lambda(E_i) \right|_p : E_i \in H, E_i \cap E_j = \phi \text{ si } i \neq j, \bigcup_{i=1}^n E_i \subseteq B, n=1, 2, 3, \dots \right\} \text{ res-}$$

pectivement. Remarquons que $(\lambda_r)_p$ et $(\lambda_d)_p$ sont monotones croissantes et sous-additives au sens fini sur $\mathcal{R}(H)$. De plus, si H est un clan, alors

$(\lambda_r)_p = (\lambda_d)_p$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Selon Huneycutt [10, p. 506] nous disons que

λ est λ_d -régulière (respectivement λ_r -régulière) si pour tout $H \in H$, tout

$p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble semi-compact C , un ensemble ouvert U et deux ensembles $H', H'' \in H$ tels que $H' \subseteq C \subseteq H \subseteq U \subseteq H''$ et

$$(\lambda_d)_p(H'' \setminus H') < \varepsilon \quad (\text{respectivement } (\lambda_r)_p(H'' \setminus H') < \varepsilon).$$

Lemme 2. Si $\lambda : H \rightarrow G$ est additive et λ_d -régulière, alors l'unique extension additive $\bar{\lambda}$ de λ sur $R(H)$ est $\bar{\lambda}_r$ -régulière.

Démonstration. Soit $E \in R(H)$, soit $p \in P$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$E = \bigcup_{i=1}^n H_i \quad \text{où les } H_i \text{ sont des ensembles deux à deux disjoints dans } H.$$

Puisque λ est λ_d -régulière, pour chaque $i = 1, 2, 3, \dots, n$, il existe un ensemble semi-compact C_i , un ensemble ouvert U_i , et deux ensembles $H_i', H_i'' \in H$ tels que $H_i' \subseteq C_i \subseteq H_i \subseteq U_i \subseteq H_i''$ et $(\lambda_d)_p(H_i'' \setminus H_i') < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

Prenons $E' = \bigcup_{i=1}^n H_i'$, $E'' = \bigcup_{i=1}^n H_i''$, $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ et $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Alors C est semi-compact, U est ouvert, $E', E'' \in R(H)$ et $E' \subseteq C \subseteq E \subseteq U \subseteq E''$. Soit $A \in R(H)$ tel que $A \subseteq E'' \setminus E'$. Puisque

$$\begin{aligned} |\bar{\lambda}(A)|_p &\leq (\bar{\lambda}_r)_p(A) \\ &= (\lambda_d)_p(A) \\ &\leq (\lambda_d)_p(E'' \setminus E') \\ &\leq (\lambda_d)_p \left(\bigcup_{i=1}^n (H_i'' \setminus H_i') \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\lambda_d)_p(H_i'' \setminus H_i') \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

nous avons $(\bar{\lambda}_r)_p(E'' \setminus E') \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ et ainsi, $\bar{\lambda}$ est $\bar{\lambda}_r$ -régulière.

Le corollaire suivant est un des principaux résultats de Huneycutt [10, Theorem 2.1, p. 506] qui lui-même généralise un résultat classique de von Neumann [13, Theorem 10.1.20, p. 98]:

Corollaire 4. Si $\lambda : H \rightarrow G$ est additive et λ_d -régulière, alors λ est σ -additive.

Démonstration. Soit $\bar{\lambda}$ l'unique extension additive de λ sur $R(H)$. Par lemme 2, $\bar{\lambda}$ est $\bar{\lambda}_r$ -régulière.

Prenons A comme l'ensemble de parties semi-compactes de X , $B = R(H)$, et définissons $\phi_1(A) = A$ pour tout $A \in A$ et $\phi_2(B) = \bar{B}$ pour tout $B \in B$. Alors les conditions (i)-(vi) sont satisfaites.

Montrons que $\bar{\lambda}$ est (ϕ_1, ϕ_2) -régulière. Soit $E \in R(H)$ et soit $V \in \mathcal{V}$. Donc, il existe $p \in P$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\{x : |x|_p < \varepsilon\} \subseteq V$. Puisque $\bar{\lambda}$ est $\bar{\lambda}_r$ -régulière, il existe un ensemble semi-compact C , un ensemble ouvert U et deux ensembles $E', E'' \in R(H)$ tels que $E' \subseteq C \subseteq E \subseteq U \subseteq E''$ et $(\bar{\lambda}_r)_p(E'' \setminus E') < \varepsilon$.

Alors $\phi_1(C) \subseteq E \subseteq \phi_2(E'')$ avec $C \in A$, $E'' \in B$. Soit $F \in R(H)$ tel que $F \subseteq E'' \setminus C$. Alors $F \subseteq E'' \setminus E'$, d'où $|\bar{\lambda}(F)|_p \leq (\bar{\lambda}_r)_p(E'' \setminus E') < \varepsilon$. Donc $\bar{\lambda}(F) \in V$. Par conséquent, $\bar{\lambda}$ est σ -additive, et ainsi sa restriction λ l'est aussi.

Dans la suite, nous supposerons que $G = (G, d)$ est un groupe commutatif métrisable complet. D'après un résultat de Klee [12, (2.4), p. 427] on peut supposer que la distance d est invariante. Alors $|x| = d(x, o)$ est une fonction réelle non négative sur G satisfaisant aux propriétés: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = o$, $|-x| = |x|$ et $|x+y| \leq |x| + |y|$ quels que soient x et y dans G .

Soit f une application de la droite réelle $\mathbb{R}$ dans G et soit $[a, b]$ ($a \leq b$) un intervalle compact de $\mathbb{R}$. La *variation totale* de f sur $[a, b]$, notée $V_f[a, b]$, est définie par la formule:

$$V_f[a, b] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Alors $0 \leq V_f[a, b] \leq +\infty$. Si $V_f[a, b]$ est fini, on dit que f est à *variation bornée* sur $[a, b]$. La fonction f est dite *localement à variation bornée* si f est à variation bornée sur tout intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Remarquons que si f est localement à variation bornée, alors f admet en tout point x de $\mathbb{R}$ une limite à droite $f(x+0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x+\varepsilon)$ [17, Théorème 84, p. 602].

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow G$ une fonction localement à variation bornée. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction réelle non négative v_a sur $[a, \infty)$ par les formules: $v_a(a) = 0$ et $v_a(x) = V_f[a, x]$ si $x > a$. Puisque $V_f[a, b] = V_f[a, c] + V_f[c, b]$ pour tout $a < c < b$ [17, Théorème 83 bis, p. 601], la fonction v_a est croissante. Si $b > a$, pour toute décomposition $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$, on écrit

$$s_f(\Delta)[a, b] = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Lemme 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow G$ une fonction localement à variation bornée. Si f est continue à droite au point $a \in \mathbb{R}$, alors v_a est continue en a .

Démonstration. Il faut montrer que $v_a(a+0) = 0$. Puisque $v_a(a+0) = \inf \{v_a(t) : t > a\}$, il suffit de montrer que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un point x_ε tel que $x_\varepsilon > a$ et $v_a(x_\varepsilon) < \varepsilon$.

Soit $b > a$. Alors il existe une décomposition $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a, b]$ telle que $s_f(\Delta)[a, b] > V_f[a, b] - \frac{1}{2}\varepsilon$. Puisque f est continue à droite au point a , il existe un point x tel que $a < x < t_1$ et $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Alors la décomposition $\Delta' : a = t_0 < x < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ satisfait l'inégalité $s_f(\Delta')[a, b] \geq s_f(\Delta)[a, b]$. Considérons la décomposition $\Delta'' : x < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ de $[x, b]$. Alors:

$$\begin{aligned} v_a(x) &= V_f[a, b] - V_f[x, b] \\ &\leq V_f[a, b] - s_f(\Delta'')[x, b] \\ &= V_f[a, b] - s_f(\Delta')[a, b] + |f(x) - f(a)| \\ &\leq V_f[a, b] - s_f(\Delta)[a, b] + |f(x) - f(a)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Le lemme suivant généralise un résultat de Huneycutt [11, Corollary 3.3.2, p. 1118]:

Lemme 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow G$ une fonction localement à variation bornée et continue à droite, et soit $H = \{(a,b]: a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. La fonction d'ensembles $\lambda : H \rightarrow G$ définie par la formule $\lambda((a,b]) = f(b) - f(a)$ est σ -additive.

Démonstration. C'est clair que λ est additive. Donc, d'après le corollaire 4, il suffit de montrer que λ est λ_d -régulière. Soit $(a,b] \in H$ avec $a < b$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est localement à variation bornée et continue à droite, les fonctions v_a et v_b sont continues en a et b , respectivement (lemme 3). Donc il existe deux points $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a < a' < b < b'$, $v_a(a') < \frac{1}{2}\varepsilon$ et $v_b(b') < \frac{1}{2}\varepsilon$. Puisque $(a',b] \subseteq [a',b] \subseteq (a,b] \subseteq (a,b']$ et

$$V_f[c,d] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda(a_i, b_i]| : a_i \leq b_i, (a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = \emptyset \text{ si } i \neq j, \right.$$

$$\left. \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \subseteq (c,d], n=1,2,3,\dots \right\} \quad [11, Theorem 3.1, p. 1116] \text{ pour tout } c < d, \text{ on a:}$$

$$\begin{aligned} \lambda_d((a,b'] - (a',b]) &= \lambda_d((a,a'] \cup (b,b']) \\ &\leq \lambda_d((a,a']) + \lambda_d((b,b']) \\ &\leq V_f[a,a'] + V_f[b,b'] \\ &= v_a(a') + v_b(b') \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui montre que λ est λ_d -régulière.

Le corollaire suivant généralise un résultat contenu dans le théorème de Radu concernant l'existence d'une mesure de Stieltjes vectorielle [14, Théorème 2, p. 81]:

Corollaire 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow G$ une fonction localement à variation bornée et soit $H = \{(a,b]: a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. La fonction d'ensembles $\lambda : H \rightarrow G$ définie par la formule $\lambda((a,b]) = f(b+0) - f(a+0)$ est σ -additive.

Démonstration. Définissons l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow G$ par la formule $F(x) = f(x+0)$. Donc F est une fonction localement à variation bornée et continue à droite. Puisque $\lambda((a,b]) = F(b) - F(a)$, le lemme 4 assure que λ est σ -additive.

RÉFÉRENCES

- [1] ALEXANDROFF, A.D., Additive set functions in abstract spaces, II, Mat. Sb. 9 (51) (1941), 563-628.
- [2] DINULEANU, N., Vector measures, Pergamon Press, New York (1967).
- [3] DINULEANU, N. et KLUVANEC, I., On vector measures, Proc. London Math. Soc. 17 (1967), 505-612.
- [4] DUNFORD, N. et SCHWARTZ, J., Linear Operator, Part I, Interscience, New York (1958).
- [5] GLICKSBERG, I., Representation of functionals by integrals, Duke Math. J. 19 (1952), 253-261.
- [6] HALMOS, P.R., Measure theory, D. van Nostrand, New York (1950).
- [7] HEWITT, E., Rings of real-valued continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 54-99.
- [8] HEWITT, E., Linear functionals on spaces of continuous functions, Fund. Math. 37 (1950), 161-189.
- [9] HEWITT, E. et ROSS, K.A., Abstract Harmonic Analysis, I, Springer-Verlag, New York (1963).
- [10] HUNEYCUTT, J.E., Jr., Extensions of abstract valued set functions, Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1969), 505-513.
- [11] HUNEYCUTT, J.E., Jr., Regularity of set functions and functions of bounded variation on the line, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 14 (1969), 1113-1119.

- [12] KLEE, V., Invariant metrics in groups (solution of a problem of Banach), Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 484-487.
- [13] VON NEUMANN, J., Functional operator, I, Princeton University Press, Princeton, New York (1950).
- [14] RADU, E., Measures Stieltjes vectorielles, Bull. Math. Soc. Math. Phys. R.P. Roumaine 6 (54) (1962), 79-86.
- [15] RIEČANOVÁ, Z., A note on a theorem of A.D. Alexandroff, Mat. Casopis Sloven. Akad. Vied. 21 (1971), 154-159.
- [16] ROSS, K.A. et STROMBERG, K., Baire sets and Baire measures, Ark. Mat. 6 (1967), 151-160.
- [17] SCHWARTZ, L., Analyse mathématiques, I, Hermann, Paris (1967).
- [18] SION, M., Outer measures with values in a topological group, Proc. London Math. Soc. 19 (1969), 89-106.
- [19] STEPHENSON, R.M., Pseudo-compact spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968), 437-448.
- [20] VARADARAJAN, V.S., Measures on topological spaces, Mat. Sb. 55 (97) (1961), 33-100 $\equiv$ Amer. Math. Soc. Translations 48 (1965), 161-228.

*Département de mathématiques
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, P. Qué.
Canada*

*Manuscrit reçu le 31 mars 1978
Révisé le 7 mars 1979.*

