

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS
DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES

Bernard Aupetit

Il est évidemment très difficile, devant un auditoire très varié et avec un temps assez limité, d'exposer les beaux résultats et les grands problèmes qui se sont développés dans la théorie de l'approximation des fonctions de plusieurs variables complexes. Aussi nous demanderons beaucoup d'indulgence de la part de l'auditeur spécialiste pour les simplifications ou les oublis qui pourront lui paraître impardonnables; qu'il pense qu'en une heure nous avons essayé de résumer presque un siècle d'efforts de mathématiciens.

Rappelons brièvement l'historique dans le cas d'une variable, ce qui nous permettra de mieux comprendre les prolongements à une variable.

Tout démarre avec le

Théorème de Weierstrass (1885). Toute fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ est limite uniforme, sur cet intervalle, de polynômes.

ainsi qu'avec le

Théorème de Runge (1885). Si K est un compact de $\mathbb{C}$ alors toute fonction f holomorphe dans un voisinage de K est limite uniforme sur K de fonctions rationnelles ayant leurs pôles hors de K . En particulier, si K est sans trou — c'est-à-dire que $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe — alors f est limite uniforme de polynômes.

*Conférence prononcée lors du XI^e Colloque des mathématiciens du Québec qui s'est tenu le 7 avril 1979 à l'Université Laval de Québec.

Le théorème de Weierstrass a engendré divers nouveaux domaines d'étude: l'approximation réelle sur des parties de $\mathbb{R}$ par des polynômes ou des fonctions "spline" que nous n'aborderons pas, l'approximation des fonctions définies sur $\mathbb{C}^n$, ce qui fait l'objet de notre exposé pour $n \geq 2$ et les problèmes d'approximation abstraits, du type algèbres de fonctions, dont le plus célèbre résultat est le

Théorème de Stone (1937). Soient K compact dans $\mathbb{C}$ et A une sous-algèbre de $C(K)$ qui sépare les points, contient les constantes et possède la propriété $f \in C(K)$ implique $\bar{f} \in C(K)$, alors A est dense dans $C(K)$.

Ce résultat très important, dont il existe maintenant une démonstration purement abstraite, sans calculs, due à De Branges, est malheureusement limité dans le cas complexe, car il est très rare que la dernière propriété soit vérifiée. Il suffit de prendre pour K un arc de $\mathbb{C}$ non contenu dans $\mathbb{R}$ et pour A l'algèbre des polynômes sur K .

Néanmoins on connaissait le

Théorème de Walsh (1926). Si Γ est un arc sans point multiple (arc de Jordan), non fermé, de $\mathbb{C}$ alors toute fonction continue sur Γ est limite uniforme de polynômes.

Si on prend maintenant pour Γ un arc de Jordan "allant à l'infini", c'est-à-dire paramétré par $t \rightarrow \gamma(t)$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\gamma(t)| = +\infty$, alors il n'y a aucun espoir d'approximer une fonction continue sur Γ par des polynômes (il suffit de prendre une fonction bornée à l'infini). Cependant, on a le

Théorème de Carleman (1927). Si Γ est un arc de Jordan rectifiable de $\mathbb{C}$ allant à l'infini, alors toute fonction continue sur Γ est limite uniforme de fonctions entières.

Très rapidement la théorie va faire des progrès.

Théorème de Hartogs-Rosenthal (1931). Si K est un compact de $\mathbb{C}$ de mesure planaire nulle, alors toute fonction continue sur K est limite uniforme sur K de fonctions rationnelles ayant leurs pôles hors de K .

Puis le théorème de Walsh est généralisé par le

Théorème de Lavrentieff (1936). Toute fonction continue sur un compact K de $\mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes si et seulement si K est sans trou et sans point intérieur.

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que les conditions obtenues sont uniquement topologiques donc invariantes par homéomorphismes. Pour les compacts de $\mathbb{C}$, l'étape finale est le

Théorème de Mergelyan (1952). Toute fonction continue sur un compact K de $\mathbb{C}$ et holomorphe à l'intérieur de K est limite uniforme de polynômes si et seulement si K est sans trou.

Si on remplace les compacts par des fermés F , il n'y a aucun espoir d'approximer toute fonction continue sur F par des polynômes. Mais on peut généraliser le théorème de Carleman au cas d'un arc de Jordan quelconque, ainsi que le théorème de Mergelyan d'ailleurs, par le

Théorème d'Arakelian (1964). Toute fonction continue sur un fermé F de $\mathbb{C}$ et holomorphe à l'intérieur de F est limite uniforme de fonctions entières si et seulement si F est sans trou et si $\mathbb{C} \setminus F$ est localement connexe à l'infini.

Pour l'approximation rationnelle sur les compacts de $\mathbb{C}$, en dehors du théorème de Hartogs-Rosenthal, la théorie est assez difficile. A.G. Vitushkine, de 1959 à 1966, a obtenu des conditions nécessaires et suffisantes non topologiques qui ont le défaut de faire intervenir les capacités analytiques γ et α , qui dans beaucoup de cas sont difficilement calculables. Ces résultats entraînent en particulier le

Théorème d'approximation rationnelle de Mergelyan. Si K est un compact de $\mathbb{C}$ tel que tous ses trous sont de diamètre $\geq \delta$, pour $\delta > 0$ donné, alors toute fonction continue sur K et holomorphe à l'intérieur de K est limite uniforme de fonctions rationnelles à pôles hors de K .

Voir [7,12]. Egalement avait été démontré peu de temps avant le remarquable

Théorème de localisation de Bishop (1958). Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Pour que f continue sur K soit limite uniforme de fonctions rationnelles à pôles hors de K , il faut et il suffit que pour tout $z \in K$, il existe un voisinage compact V de z tel que la restriction de f à $V \cap K$ soit limite uniforme sur $V \cap K$ de fonctions rationnelles à pôles hors de $V \cap K$.

Tout cela nous amène à la question suivante: existe-t-il des théorèmes analogues dans le cas des fonctions de plusieurs variables complexes?

PROBLÈMES GÉNÉRAUX SUR L'APPROXIMATION DANS $\mathbb{C}^n$

En appliquant le théorème de Stone, le théorème de Weierstrass se généralise simplement au cas d'un produit de n intervalles réels. Mais que se passe-t-il pour le théorème de Runge? Si on prend dans $\mathbb{C}^2$ les ensembles $K_1 = \{(e^{i\theta}, 0) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ et $K_2 = \{(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, ils sont tous les deux homéomorphes au cercle $\mathbb{T}$ et sans trou, cependant la fonction $f(z_1, z_2) = 1/z_1$, dans le premier cas, n'est pas limite uniforme de polynômes sur K_1 alors que, dans le second cas, elle l'est sur K_2 . Autrement dit, pour $n \geq 2$, il ne peut y avoir d'analogue du théorème de Runge avec des conditions topologiques. Pour $n = 1$, K sans trou est équivalent à dire que K est polynomialement convexe. Dans $\mathbb{C}^n$, on appelle *enveloppe polynomialement convexe* de K l'ensemble $\hat{K} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |p(z)| \leq \max_{u \in K} |p(u)|, \text{ pour tout polynôme } p\}$ et on dit que K est *polynomialement convexe* si $K = \hat{K}$. Si $P(K)$ dénote l'algèbre des fonctions continues sur K uniformément approximables par des polynômes, on montre que l'espace des caractères de $P(K)$ s'identifie à $\hat{K}$. Comme exemples d'ensembles polynomia-

lement convexes, il y a les ensembles convexes, l'union de deux convexes disjoints, mais comme Eva Kallin l'a montré en 1964, l'union de trois boules disjointes est polynomialement convexe alors que l'union de trois polydisques disjoints ne l'est pas toujours. Cet exemple montre la difficulté de la notion et fait comprendre pourquoi dans la pratique il est extrêmement difficile de déterminer $\hat{K}$ même si K est simple (nous en verrons une illustration avec les arcs dans le paragraphe suivant). Malgré tout cela, on obtient le

Théorème de Oka-Weil (1936). Si K est un compact polynomialement convexe de $\mathbb{C}^n$, alors toute fonction holomorphe dans un voisinage de K est limite uniforme sur K de polynômes.

A l'origine, A. Weil avait donné une démonstration technique basée sur les représentations intégrales du type Cauchy pour les fonctions holomorphes sur les *polyèdres polynomiaux*, c'est-à-dire les ensembles du type $\{z \in \mathbb{C}^n \mid |p_i(z)| \leq 1, p_i \text{ polynômes}, 1 \leq i \leq n\}$. C'est en utilisant la théorie du $\bar{\partial}$ que Oka a pu relativement "simplifier" cette démonstration.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, une k -forme sur Ω peut toujours se représenter par $\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} C_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, où les $C_{i_1 \dots i_k}$ sont dans $C^\infty(\Omega)$. Par définition, on pose que $d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} dC_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ qui est une $(k+1)$ -forme. On vérifie que $d^2 = 0$ et que $d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^k \omega \wedge d\omega'$ si ω est une k -forme. Supposons maintenant

de Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, si $f \in C^\infty(\Omega)$ on pose $\partial f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i$ et

$\bar{\partial} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$, $\bar{\partial} f = 0$ signifiant tout simplement, d'après les équations de

Cauchy-Riemann et le théorème de Hartogs que f est holomorphe sur Ω . Une k -forme sur Ω est dite du type (r,s) , avec $r+s=k$, si elle s'écrit sous la forme $\omega = \sum a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$, où $I = \{i_1, \dots, i_r\}$, $J = \{j_1, \dots, j_s\}$, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r}$ et $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_s}$. Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$

peuvent alors s'étendre aux (r,s) formes par:

$$\partial\omega = \sum \partial a_{IJ} \wedge \partial z_I \wedge \partial \bar{z}_J \text{ du type } (r+1,s) ,$$

$$\bar{\partial}\omega = \sum \bar{\partial} a_{IJ} \wedge \partial z_I \wedge \partial \bar{z}_J \text{ du type } (r,s+1) .$$

On a $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ et $\partial\bar{\partial} = \bar{\partial}\partial = 0$. Ce qu'il y a d'important, c'est qu'on peut obtenir le

Lemme de Poincaré complexe. Soit Π un polyèdre polynomial de $\mathbb{C}^n$, Ω un voisinage de Π , ω une (p,q) forme sur Ω avec $q > 0$ et telle que $\bar{\partial}\omega = 0$, alors il existe un voisinage Ω' de Π et une $(p,q-1)$ forme ψ sur Ω' telle que $\bar{\partial}\psi = \omega$.

Comme cela est fait dans [11], chapitres 4 à 7, on peut alors en déduire le théorème d'Oka-Weil. L'idée, bien que technique dans les détails, est assez simple: elle consiste, par étapes, à envoyer K sur un compact $\tilde{K}$ de $\mathbb{C}^{n+r}$, où r est le nombre de polynômes définissant un polyèdre analytique intercalé entre K et le voisinage où la fonction f est holomorphe, et d'étendre f à $\tilde{f}$ qui est holomorphe dans un polydisque et alors on approxime $\tilde{f}$ par les sommes partielles de sa série de Taylor.

Intéressons-nous maintenant au problème suivant: pour K compact dans $\mathbb{C}^n$, dans quel cas a-t-on $P(K) = C(K)$?

Une condition nécessaire est que l'intérieur de K soit vide et que $K = \hat{K}$ (parce que les ensembles de caractères de $P(K)$ et $C(K)$ sont identiques). Cette dernière condition, qui n'est pas topologique, montre qu'il n'y a aucun espoir que des analogues topologiques des théorèmes de Lavrentieff et Mergelyan soient vrais.

Par contre, en appliquant le théorème d'Oka-Weil, on peut prouver l'approximation polynomiale si on montre les deux points suivants:

1° K est polynomialement convexe.

2° $C(K) = R(K)$, où $R(K)$ désigne l'algèbre des fonctions continues sur K

limite uniforme de fonctions rationnelles à pôles hors de K .

Dans la pratique, la démonstration de l^0 est de loin la plus difficile, sauf dans quelques cas particuliers. Le seul moyen commode est le suivant:

Théorème "standard". Si K est un compact de $\mathbb{C}^n$ tel que $R(K) = C(K)$, avec le premier groupe de cohomologie de Čech à coefficients entiers $H^1(K, \mathbb{Z})$ égal à $\{0\}$ et tel que $\hat{K} \setminus K$ admette une structure analytique de sous-variété complexe de dimension 1 dans $\mathbb{C}^n \setminus K$, alors $K = \hat{K}$, donc $P(K) = C(K)$.

La condition topologique est vérifiée si K est contractile. D'après le théorème de Arens-Royden (1963), elle signifie tout simplement que toute fonction continue non nulle sur K admet un logarithme continu sur K . D'un point de vue intuitif, le théorème standard veut dire qu'il ne peut y avoir de "membrane" analytique s'appuyant sur un compact qui ne se referme pas. Sa démonstration est simple, elle repose sur le principe d'argument.

Dans la pratique, ce qui est excessivement difficile à prouver c'est que $\hat{K} \setminus K$ a une structure analytique aussi, arrivé à ce stade, la théorie diverge dans deux directions complètement différentes:

— ou bien on suppose K assez "mince" et on prouve par des méthodes abstraites d'algèbres de fonctions que K est polynomialement convexe, le point $R(K) = C(K)$ étant dans cette situation assez facile, en utilisant le théorème de Hartogs-Rosenthal;

— ou bien on admet que K est polynomialement convexe (ce qui est beaucoup, il faut l'avouer), avec K contenu dans un ensemble "régulier" (variété, domaine assez simple) et on montre par la théorie du $\bar{\partial}$ que $C(K) = R(K)$. C'est essentiellement une méthode d'équations aux dérivées partielles.

APPROXIMATION POLYNOMIALE ET ENTIÈRE SUR LES ARCS DE JORDAN DE $\mathbb{C}^n$

Dans $\mathbb{C}^n$, est-il vrai que pour un arc de Jordan non fermé on a $P(\Gamma) = C(\Gamma)$?, ce qui serait une généralisation du théorème de Walsh. C'est malheureusement faux

comme les exemples qui suivent le prouvent:

a) D'après J. Wermer (1955), il existe un arc de Jordan non fermé de $\mathbb{C}^3$ pour lequel $\Gamma \neq \hat{\Gamma}$, auquel cas $P(\Gamma) \neq C(\Gamma)$.

b) D'après W. Rudin (1956), il existe un tel arc dans $\mathbb{C}^2$.

c) Henkin et Čirka [9] mentionnent même l'existence d'arcs de Jordan non fermés admettant une paramétrisation γ lipschitzienne de type α avec $\alpha < \frac{1}{2}$ (c'est-à-dire que $\|\gamma(t) - \gamma(t')\| \leq A|t - t'|^\alpha$, pour $0 \leq t, t' \leq 1$) qui ne sont pas polynomialement convexes.

d) Encore plus surprenant A.G. Vitushkine, en 1972, montre que quel que soit $n \geq 2$, il existe un compact K de $\mathbb{C}^n$, totalement disconnexe, dont les projections sont de dimension de Hausdorff un, tel que $R(K) = C(K)$, avec $\hat{K}$ contenant une boule, auquel cas il existe un arc de Jordan non fermé Γ passant par K tel que $C(\Gamma) = R(\Gamma)$, avec $P(\Gamma) \neq C(\Gamma)$.

Mais si l'arc de Jordan est "assez régulier", est-il vrai que $P(\Gamma) = C(\Gamma)$? Dans ce cas, la difficulté principale, d'après le théorème standard, consiste à prouver que $\hat{\Gamma} \setminus \Gamma$ a une structure analytique.

Historiquement, les premières idées remontent à J. Wermer (1956) qui, dans le cas où Γ est une courbe analytique fermée ou non de $\mathbb{C}^n$, construit explicitement la structure analytique sur $\hat{\Gamma} \setminus \Gamma$ (c'est une surface de Riemann formée d'une infinité dénombrable de morceaux). L.A. Markuševič (1961) applique la même méthode à un arc dont les fonctions composantes sont assez régulières et dont l'une d'elles a au plus un nombre fini de points multiples. C'est E. Bishop (1962-1963) qui, dans deux travaux remarquables mais difficiles [4,5], retrouve le résultat de Wermer mais par une méthode susceptible de s'appliquer à des situations plus générales. L'outil de base est le fameux

Théorème de structure analytique de Bishop. Soit A une sous-algèbre fermée de $C(K)$ où K est un compact, dont M est l'ensemble des caractères muni de la

topologie de Gelfand. Fixons f dans A et W une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus f(K)$ et supposons qu'il existe $G \subset W$ de mesure planaire strictement positive tel que les fibres $f^{-1}(\lambda) = \{X \in M \mid X(f) = \lambda\}$ soient finies et non vides sur G , alors les fibres $f^{-1}(\lambda)$ sont finies sur tout W et $f^{-1}(W)$ admet une structure analytique complexe de dimension 1 (plus précisément il existe un entier n tel que $f^{-1}(W)$ puisse s'identifier à une surface de Riemann à n feuillets).

Ce résultat a été généralisé et démontré de façon plus naturelle, en utilisant la théorie des fonctions sous-harmoniques, par moi-même et J. Wermer [3], en remplaçant la condition "de mesure planaire strictement positive" par la condition extrémale "de capacité extérieure strictement positive".

En utilisant le théorème de Bishop et en poussant un peu la méthode de Bishop, on obtient le

Théorème de Bishop-Stolzenberg (1966). Si Γ est un arc de Jordan de type C^1 par morceaux dans $\mathbb{C}^n$, alors $\hat{\Gamma} \setminus \Gamma$ admet une structure analytique complexe de dimension 1. Si en plus Γ n'est pas fermé, alors $P(\Gamma) = C(\Gamma)$.

En 1969, de grandes simplifications furent obtenues par H. Alexander [1] et J.-E. Björk [6].

Théorème d'Alexander-Björk. Si K est une réunion finie d'arcs de Jordan de $\mathbb{C}^n$ tels que l'une des coordonnées sépare toutes les paires de points sauf un nombre fini d'entre elles, alors $\hat{K} \setminus K$ a une structure analytique. En particulier, si Γ est un arc de Jordan non fermé ayant la propriété plus haut, alors $P(\Gamma) = C(\Gamma)$.

C'est évidemment une grosse généralisation du théorème de Markuševič.

Théorème d'Alexander. Si K est un compact contenu dans un sous-ensemble connexe de mesure linéaire finie dans $\mathbb{C}^n$, alors $\hat{K} \setminus K$ a une structure analytique. En particulier, si Γ est un arc rectifiable non fermé, alors $P(\Gamma) = C(\Gamma)$.

Pour un exposé clarifié de tout cela, voir [8] et [10].

Dans cette théorie de l'approximation polynomiale sur les arcs, il existe de nombreux problèmes à résoudre. En voici deux:

1° Si Γ est un arc de Jordan non fermé de $\mathbb{C}^n$ paramétré par des fonctions lipschitziennes de type α avec $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, a-t-on $P(\Gamma) = C(\Gamma)$?

2° Si Γ est un arc de Jordan non fermé tel que $\Gamma = \hat{\Gamma}$ est-il vrai que $P(\Gamma) = C(\Gamma)$? Si $\text{pr}_i \Gamma$ est sans point intérieur pour $1 \leq i \leq n-1$, le résultat provient du

Théorème de Čirka (1966). Soit $K \subset \mathbb{C}^n$, compact, localement connexe, de dimension topologique 1 tel que $H^1(K, \mathbb{Z}) = \{0\}$ et tel que $\text{pr}_i K$ est sans point intérieur pour $1 \leq i \leq n-1$, alors toute fonction continue sur K est limite uniforme de fonctions holomorphes dans un voisinage de K .

Mais que se passe-t-il en général?

Venons-en maintenant au cas des arcs de Jordan dans $\mathbb{C}^n$ allant à l'infini. Existe-t-il alors un analogue du théorème de Carleman? C'est faux si l'arc n'est pas assez régulier ($\alpha < \frac{1}{2}$), jusqu'à maintenant le meilleur résultat obtenu est le suivant:

Théorème d'Alexander-Aupetit (1979). Soient Γ un arc de Jordan de type C^1 par morceaux, allant à l'infini dans $\mathbb{C}^n$ et ϵ une fonction continue strictement positive sur Γ , alors quelle que soit f continue sur Γ , il existe g entière telle que $|f(z) - g(z)| < \epsilon(z)$, quel que soit $z \in \Gamma$.

Ce théorème peut même être amélioré au cas d'une réunion finie disjointe d'arcs C^1 par morceaux allant à l'infini, au cas d'un produit d'arcs bornés ou allant à l'infini (voir [2], article de B. Aupetit). Ce résultat est-il vrai pour un arc localement rectifiable?

Comme dans le cas d'une variable, on peut alors montrer que, étant donnés deux arcs de Jordan Γ_0 et Γ_∞ , disjoints, C^1 par morceaux et allant à l'infini, il existe une fonction entière h telle que $h(z) \rightarrow 0$ sur Γ_0 à l'infini et

$h(z) \rightarrow \infty$ sur Γ_∞ à l'infini.

APPROXIMATION POLYNOMIALE SUR LES COMPACTS POLYNOMIALEMENT CONVEXES "RÉGULIERS"

Soit D le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$, $f_2, \dots, f_n$ des fonctions de classe C^1 dans un voisinage de D , on dénotera par $\tilde{D}$ l'ensemble des $(z, f_2(z), \dots, f_n(z))$, pour $z \in D$ et on dira que $\tilde{D}$ est un *disque* de $\mathbb{C}^n$. Le premier résultat d'approximation obtenu est le

Théorème de Wermer (1965). Si $\tilde{D}$ est un disque polynomialement convexe de $\mathbb{C}^n$ tel que pour tout $z_0 \in D$, il existe j avec $\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}}(z_0) \neq 0$, alors $P(\tilde{D}) = C(\tilde{D})$.

Ce résultat a été généralisé par M. Freeman au cas des variétés réelles compactes, avec frontière, de dimension 2, mais en définitive divers résultats du même style ont pu être reformulés plus géométriquement comme suit:

Théorème (Hörmander-Wermer, Nirenberg, Harvey, Wells). Soit V une variété de type C^1 de $\mathbb{C}^n$, totalement réelle et soit K un compact de V . Alors toute fonction continue sur K est limite uniforme de fonctions holomorphes dans un voisinage de K . Si en plus, K est polynomialement convexe, alors $P(K) = C(K)$.

Si V est de dimension d , pour chaque $z \in V$ l'espace tangent T_z est de dimension réelle d , V est dite *totalement réelle* si pour chaque z , T_z ne contient pas de droite complexe.

Le théorème a été prouvé par Hörmander et Wermer dans le cas où $k > d/2$ lorsque V est de classe C^k , et Harvey et Wells ont réussi le cas limite de classe C^1 .

La démonstration est basée principalement sur une estimation de la solution du $\bar{\partial}$ dans les domaines pseudo-convexes.

Par définition, Ω est dit *pseudo-convexe* s'il existe une fonction réelle ρ de type C^∞ dans un voisinage de $\bar{\Omega}$ telle que $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) < 0\}$,

$\text{grad } \rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$, et pour tout $z \in \partial\Omega$ si $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ est un vecteur tangent en z , alors $\sum \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0$. En plus, il est dit *strictement pseudo-convexe* si pour tout vecteur tangent non nul cette inégalité est stricte.

Un domaine convexe est pseudo-convexe. Il existe une sorte de réciproque dans la mesure où en tout point de la frontière, si Ω est strictement pseudo-convexe il existe localement un changement holomorphe de coordonnées qui rend Ω strictement convexe.

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, $L^2_{(0,1)}(\Omega)$ est l'ensemble des formes $\omega = \sum f_i dz_i$ de type $(0,1)$, avec $f_i \in L^2(\Omega)$, et $L^2_{(0,2)}(\Omega)$ est l'ensemble des formes $\omega = \sum f_{ij} dz_i \wedge dz_j$ de type $(0,2)$, avec $f_{ij} \in L^2(\Omega)$. Nous admettrons que $\bar{\partial}$ peut se prolonger à un certain sous-espace dense E_0 de $L^2(\Omega)$ dans $L^2_{(0,1)}(\Omega)$ et à un certain sous-espace dense E_1 de $L^2_{(0,1)}(\Omega)$ dans $L^2_{(0,2)}(\Omega)$ de façon qu'on puisse obtenir par des méthodes d'équations aux dérivées partielles 1'

Estimation du $\bar{\partial}$ de Hörmander. Soit Ω un domaine pseudo-convexe. Alors pour tout $g \in E_1$ tel que $\bar{\partial}g = 0$, il existe $u \in E_0$ tel que:

$$1^\circ \quad \bar{\partial}u = g.$$

$$2^\circ \quad \int_{\Omega} |u|^2 dv \leq k \int_{\Omega} |g|^2 dv, \text{ pour une certaine constante } k \text{ ne dépendant que de } \Omega.$$

Ayant cette estimation pour la norme L^2 , la démonstration du théorème se fait en cinq étapes:

1° Pour la dernière partie, on applique le théorème d'Oka-Weil.

2° Pour chaque $\varepsilon > 0$, on construit un voisinage Ω_ε pseudo-convexe de K pour lequel on appliquera l'estimation de Hörmander.

3° Si f est continue sur K , on la prolonge en f_ε sur Ω_ε de façon que $\bar{\partial}f_\varepsilon$ soit "petit" sur Ω_ε .

4° On trouve alors g_ε telle que $\bar{\partial}g_\varepsilon = \bar{\partial}f_\varepsilon$ sur Ω_ε avec $\sup_K |g_\varepsilon| \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

5° On écrit $f_\varepsilon = (f_\varepsilon - g_\varepsilon) + g_\varepsilon$, où $f_\varepsilon - g_\varepsilon$ est holomorphe sur Ω_ε puisque $\bar{\partial}(f_\varepsilon - g_\varepsilon) = 0$.

Evidemment, les détails techniques sont longs et compliqués.

Le théorème de Mergelyan va pouvoir se généraliser à des domaines assez simples, par exemple des "boules chevelues", c'est-à-dire la réunion d'un compact ayant la propriété de Mergelyan avec un nombre fini d'arcs de Jordan C^1 par morceaux, chacun d'eux coupant le compact en au plus un point (pour démontrer cela, il faut utiliser la méthode de Bishop). En appliquant la méthode du $\bar{\partial}$, on peut obtenir le

Théorème de Henkin-Kerzman-Lieb-Fornaess (1969-1976). Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert strictement pseudo-convexe avec $\partial\Omega$ de classe C^2 , alors toute fonction continue sur $\bar{\Omega}$, holomorphe sur Ω est limite uniforme de fonctions holomorphes dans un voisinage de $\bar{\Omega}$.

La démonstration vient de l'

Estimation du $\bar{\partial}$ de Grauert-Lieb. Si Ω est strictement pseudo-convexe avec $\partial\Omega$ de classe C^2 , il existe $k > 0$ telle que pour tout $(0,1)$ -forme ω telle que $\bar{\partial}\omega = 0$, il existe une fonction f sur Ω telle que $\bar{\partial}f = \omega$ et $\sup_\Omega |f| \leq k \sup_\Omega |\omega|$.

Le théorème n'est malheureusement pas vrai si Ω n'est pas strictement pseudo-convexe, mais il a été généralisé dans de nombreuses directions par Forneaess et Nagel, etc. (Voir [2], article de E. Bedford et J.E. Forneaess).

Si on s'intéresse maintenant à l'approximation holomorphe sur les variétés non compactes, on a déjà:

Théorème de Nunemacher (1976). Soient V une sous-variété de type C^1 de $\mathbb{C}^n$, connexe et totalement réelle et ε une fonction continue strictement positive sur V . Alors quelle que soit f continue sur V , il existe un voisinage Ω de V et une fonction g holomorphe sur Ω telle que $|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z)$ sur V .

Il est important de remarquer que Ω dépend de f . E.L. Stout [2] a pu obtenir une première amélioration de ce résultat.

Théorème de Stout (1978). Soient V une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$, totalement réelle et ε une fonction continue strictement positive sur V . Alors il existe un voisinage Ω de V tel que, pour toute fonction continue sur V , il existe g holomorphe sur Ω telle que $|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z)$ sur V .

Dans ce cas, Ω ne dépend que de la géométrie de V et non de f . Peut-on étendre ce résultat au cas de type C^1 , totalement réel?

Pour plus de détails, les personnes intéressées devront d'abord lire [9,11], pour ensuite s'attaquer à la bibliographie sommaire qui suit.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- [1] ALEXANDER, H., Polynomial Approximation and Hulls of Sets of Finite Linear Measure in $\mathbb{C}^n$. Amer. J. Math. 93 (1971), 65-75.
- [2] AUPETIT, B. (Ed.), L'approximation complexe. Comptes rendus de la conférence de Québec (3-8 juillet 1978). A paraître.
- [3] AUPETIT, B. and WERMER, J., Capacity and Uniform Algebras. J. Functional Anal. 28 (1978), 386-400.
- [4] BISHOP, E., Analyticity in Certain Banach Algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 507-544.

- [5] BISHOP, E., Holomorphic Completions, Analytic Continuation, and the Interpolation of Seminorms. Ann. Math. (2) 78 (1963), 468-500.
- [6] BJÖRK, J.-E., Analytic Structure in the Maximal Ideal Space of a Uniform Algebra. Ark. för Mat. 8 (1971), 239-244.
- [7] GAMELIN, T., Uniform Algebras. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [8] GAMELIN, T., Polynomial Approximation on Thin Sets. Symposium on Several Complex Variables. Park City, Utah, 1970. Lecture Notes in Mathematics N° 184, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [9] HENKIN, G.M. and ČIRKA, E.M., Boundary Properties of Holomorphic Functions of Several Complex Variables. J. Soviet Math. 5 (1976), 612-687.
- [10] JAKÓBCZAK, P., On the Existence of Analytic Structure in the Spectrum of a Uniform Algebra. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sc. Math., Astr., Phys. 26 (1978), 595-601.
- [11] WERMER, J., Banach Algebras and Several Complex Variables (2nd edition). Springer-Verlag, New-York, 1976.
- [12] ZALCMAN, L., Analytic Capacity and Rational Approximation. Lecture Notes in Mathematics N° 50, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

Département de mathématiques
Université Laval
Cité universitaire
Québec, Qué.
Canada G1K 7P4

Manuscrit reçu le 20 avril 1979.

