

QUELS SONT LES ESPACES TOPOLOGIQUES DANS LES TOPOS ?

Lawrence Neff Stout

Jusqu'à maintenant, la théorie des faisceaux a étudié principalement les faisceaux de structures algébriques: faisceaux de modules sur un faisceau d'anneaux ou plus généralement, les modules dans un topos annelé comme dans SGA IV [1]. C'est peut-être parce qu'on applique habituellement la théorie des faisceaux aux problèmes algébriques. Il y a eu quelques tentatives de considérer les structures topologiques sur les faisceaux: Gray [5] et Wischnewsky [18] ont étudié les faisceaux à valeurs dans la catégorie des espaces topologiques; Hoffman a introduit une notion de structure uniforme sur un faisceau d'anneaux (dit "uniform field"). Il y a aussi une autre approche externe bien connue: on peut définir une structure topologique par factorisation du foncteur $\text{Hom}(-, A)$ par la catégorie des espaces topologiques. Toutes ces approches sont externes au sens qu'elles utilisent la catégorie des espaces topologiques ordinaires avec leurs définitions et leurs propriétés, mais qu'elles n'utilisent pas beaucoup la richesse de la structure des topos. C'est précisément cette structure qui a accordé tant de succès à l'algèbre dans les topos: on prend un objet compliqué, on le représente comme faisceau de structures plus simples, puis on dégage dans la catégorie des faisceaux les propriétés qui correspondent à celles de l'objet original. La preuve de Mulvey du théorème de Swann dans [10] illustre ce procédé.

Dans cet exposé nous allons étudier les structures topologiques qui seront définies tantôt de façon interne, en utilisant la logique interne d'ordre supérieur du topos, tantôt de façon externe. Premièrement, nous allons considérer les structures définies par factorisation du foncteur $\text{Hom}(-, A)$ par Top et définies comme faisceaux à valeurs dans Top . Nous donnerons des exemples de telles structures et rappellerons les propriétés qu'on peut obtenir facilement pour ces structures définies de façon externe. Puis nous allons considérer les structures définies dans la logique interne du deuxième ordre du topos. Ici, il y a plusieurs définitions qui

* Travail partiellement subventionné par le Ministère de l'Éducation du Québec.

sont équivalentes dans le cadre classique, mais qui diffèrent pour les topos. Une de ces définitions a une caractérisation particulièrement convenable dans le cas des topos spatiaux. Nous donnerons des exemples et quelques propriétés. Finalement, nous allons établir un rapport entre l'approche interne et l'approche externe en déterminant un foncteur avec son adjoint à droite.

I. LES APPROCHES EXTERNES

Il y a au moins deux moyens connus pour définir une structure d'un certain type sur un faisceau en utilisant l'information externe. Nous admettons que nous connaissons la catégorie $\mathcal{C}$ des ensembles munie d'une structure de type donné et nous donnons nos définitions en référence à $\mathcal{C}$. La première méthode consiste à définir une structure sur un objet A comme factorisation du foncteur $\text{Hom}(-, A)$ par $\mathcal{C}$. La deuxième (qui a un sens si et seulement si la catégorie $\mathcal{C}$ est à limites) consiste à imposer que toutes les valeurs $A(U)$ et toutes les morphismes de restriction soient dans $\mathcal{C}$ et que l'axiome des faisceaux soit satisfait avec les limites dans $\mathcal{C}$ et non seulement dans Ens .

La définition par factorisation par $\mathcal{C}$ n'est pas bonne pour les espaces topologiques, comme l'exemple ci-dessous le montre:

Exemple: Il y a au moins six factorisation distinctes de $\text{Hom}(-, 2)$ par Top et alors au moins six structures topologiques externes sur 2. Une structure topologique externe sur 2 est la donnée d'une topologie sur les ensembles $\text{Hom}(A, 2)$ telle que les morphismes $\text{Hom}(f, 2)$, où $f: A \rightarrow B$, soient continus. Il est évident que si on donne à tous les $\text{Hom}(A, 2)$ la topologie discrète (ou grossière), cette condition est satisfaite. Les structures "supplémentaires" ont la topologie de Sierpinski sur $\text{Hom}(1, 2)$.

On peut définir une structure topologique externe en donnant à 2 et 4 les topologies qui satisfont les conditions de continuité pour les morphismes $\text{Hom}(f, 2)$ où f est un morphisme $2 \rightarrow 1$ ou $1 \rightarrow 2$ ou $2 \rightarrow 2$. La topologie sur $\text{Hom}(A, 2)$ va être celle qui est induite par les morphismes $\text{Hom}(g, 2)$ où g est un morphisme de 2 vers A . Il faut que nous sachions que cette définition rend les morphismes $\text{Hom}(f, 2)$ continus, où $f: A \rightarrow B$. Parce que $\text{Hom}(A, 2)$ a la topologie induite, il suffit de montrer que tous les morphismes $\text{Hom}(fg, 2)$ sont continus, mais les morphismes $\text{Hom}(fg, 2)$ sont continus par définition de la topologie sur $\text{Hom}(B, 2)$.

Alors, donnons à $\text{Hom}(1, 2)$ la topologie de Sierpinski avec $\{\{*\}\}$ ouvert. Il y a quatre morphismes qui doivent être continus. Ce sont

$$\begin{pmatrix} \{*\} & \emptyset \\ \{\{*\}, \emptyset\} & \emptyset \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \{\{*\}, \emptyset\} & \{\{*\}\} & \{\emptyset\} & \emptyset \\ \{*\} & \{*\} & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \{\{*\}, \emptyset\} & \{\{*\}\} & \{\emptyset\} & \emptyset \\ \{*\} & \emptyset & \{*\} & \emptyset \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \{\{*\}, \emptyset\} & \{\{*\}\} & \{\emptyset\} & \emptyset \\ \{\{*\}, \emptyset\} & \{\emptyset\} & \{*\} & \emptyset \end{pmatrix}.$$

Si $\text{Hom}(2,2)$ est muni de la topologie avec sous-base

$$\{\{\{*\}, \emptyset\}, \{\{*\}\}, \{\{*\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

ou

$$\{\{\{*\}, \emptyset\}, \{\{*\}\}, \{\emptyset\}\}$$

ces conditions sont satisfaites. Il y a donc au moins deux structures topologiques externes sur 2 où $\text{Hom}(1,2)$ a la topologie de Sierpinski avec $\{\{*\}\}$ ouvert. Il y en a aussi au moins deux où $\text{Hom}(1,2)$ a la topologie de Sierpinski avec $\{\emptyset\}$ ouvert. Il y a donc au moins six structures topologiques externes sur 2.

Il est clair que quelques conditions supplémentaires sont nécessaires pour conserver cette définition. Si nous voulons que la factorisation transforme les limites en colimites, il suffira de donner des topologies sur $\text{Hom}(X_i, A)$ où $\{X_i\}$ est un ensemble générateur. C'est suffisant pour les topos de Grothendieck, mais ce n'est d'aucun secours s'il n'y a pas de générateurs.

Si nous nous restreignons aux topos de Grothendieck (i.e. aux topos des faisceaux sur un site), il y a un autre genre de restrictions que nous pouvons utiliser. Les objets d'un topos de Grothendieck sont les faisceaux à valeurs dans Ens ; on peut définir une structure topologique en donnant à chaque valeur une topologie telle que l'axiome des faisceaux soit satisfait dans la catégorie des espaces topologiques. En utilisant le lemme de Yoneda, on voit que ceci est une condition du genre transformation de limites en colimites. Ces structures ont été étudiées par Gray [5] dans le cas de faisceaux sur un espace topologique à valeurs dans une catégorie presque arbitraire et par Wischnewsky [18] dans le cas des faisceaux sur un site arbitraire et à valeurs dans une catégorie des structures initiales.

Wischnewsky montre que la catégorie résultante des faisceaux à valeurs dans Top est initiale sur la catégorie des faisceaux d'ensembles. Gray montre que le foncteur "faisceau associé" existe. Ces théorèmes nous disent que les limites et les colimites existent et nous donnent une méthode canonique de les construire.

Exemple. Si nous prenons le pré-faisceau constant à valeurs dans I (l'intervalle fermé) sur les nombres entiers naturels avec la topologie discrète et que nous appliquons le foncteur "faisceau associé", nous obtenons un faisceau à valeurs dans un ouvert 0 donné par $I^{[0]}$ muni de la topologie produit.

Le concept d'un faisceau d'espaces topologiques présente des difficultés quand on veut étudier les conditions de séparation, de connexité locale, et de métrisabilité sur les structures topologiques. En ce qui concerne la condition de normalité, par exemple, les produits d'espaces normaux ne sont pas toujours normaux, donc il

n'est pas toujours possible d'avoir un faisceau d'espaces normaux. Il est aussi difficile de définir une structure de faisceau d'espaces topologiques sur un objet défini de façon interne (les nombres réels, par exemple).

Ce concept est bon pour les topos Ens^G et Ens^M où G est un groupe et M est un monoïde. Ici un faisceau est la même chose qu'un pré-faisceau et ce n'est rien d'autre qu'un espace topologique muni d'une action continue de G ou de M .

II. LA LOGIQUE INTERNE A UN TOPOS

Les catégories des faisceaux à valeurs dans Ens que nous avons considérées sont les exemples les mieux connus de topos élémentaires de Lawvere et de Tierney. L'objectif initial du programme de Lawvere et de Tierney était d'éliminer la référence constante à la catégorie des ensembles et de donner des démonstrations intrinsèques et élémentaires des propriétés des topos démontrées de façon externe dans SGA IV. Ce faisant, ils ont découvert que les topos ont une logique interne d'ordre supérieur. Ici nous donnerons une description explicite de l'aspect logique de quelques exemples caractéristiques de topos: les topos spatiaux (ceux des faisceaux sur un espace topologique), Ens^G où G est un groupe, Ens^M où M est un monoïde (nous n'utilisons ici que le monoïde M des entiers naturels), Ens^P où P est un pré-ordre. Toute cette section peut être considérée comme une extension de l'exposition de Lawvere [8]. Mulvey [10] a donné une description plus complète du cas spatial. Osius [11], [12] et [13] et Coste [2] donnent les détails sur la logique interne en général; notre notation est essentiellement celle de [11].

Définition. Un topos élémentaire est une catégorie E telle que

- 1) E est à limites finies
- 2) E est fermée pour le produit cartésien
- 3) E a un objet qui représente les sous-objets, $vr:1 \rightarrow \Omega$.

La troisième condition dit qu'étant donné un sous-objet $A' \twoheadrightarrow A$, il y a un et un seul morphisme caractéristique $\chi_{A'}:A \rightarrow \Omega$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow vr \\ A & \xrightarrow{\chi_{A'}} & \Omega \end{array}$$

soit un produit fibré. Ceci fait de Ω l'objet des valeurs de vérité pour les propositions de la forme $a \in A'$. Avec les conditions 2) et 3), il est possible de définir l'objet des sous-objets d'un objet A , dénoté PA et égal à Ω^A . L'appartenance peut être considérée par référence au sous-objet ϵ_A de $PA \times A$ caractérisé par le morphisme évaluation de $PA \times A$ vers Ω .

On peut concevoir les morphismes de 1 vers Ω comme des propositions. Alors, les morphismes d'un produit de plusieurs copies de Ω vers Ω sont les opérateurs logiques. Nous utilisons les opérateurs logiques suivants: "disjonction" $\vee: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, "conjonction" $\wedge: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, "implication" $\Rightarrow: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, et "négation" $\neg: \Omega \rightarrow \Omega$. La disjonction est le morphisme caractéristique du sous-objet $\text{vr} \times \Omega \cup \Omega \times \text{vr} \rightarrow \Omega \times \Omega$; l'implication est le morphisme caractéristique du sous-objet $\leq \rightarrow \Omega \times \Omega$, qui est l'égalisateur de $\vee$ et de la projection sur le deuxième facteur. La négation, $f: 1 \rightarrow \Omega$, est le morphisme caractéristique de $0 \rightarrow 1$; $\neg \gamma = (\gamma \Rightarrow f)$. Ces fonctions font de Ω un objet avec une structure d'algèbre de Heyting et induisent des fonctions sur chaque PA qui font la même chose. Donc, il y a un calcul propositionnel intuitioniste interne (ceci est démontré dans Kock et Wraith [6] s. 34 et Osius [12] section 3).

Il va être utile d'avoir la définition notationale suivante:

Définition. Le nom $\ulcorner A' \urcorner$ d'un sous-objet $A' \rightarrow A$ est le morphisme $1 \rightarrow \text{PA}$ obtenu par l'application de l'adjoint exponentiel au morphisme caractéristique de A' .

Nous disons que $a \in A'$ si le morphisme $\ulcorner A' \urcorner \times a: 1 \rightarrow \text{PA} \times A$ se factorise par ϵ_A . Ceci devient une proposition interne par composition avec l'évaluation de $\text{PA} \times A$ vers Ω .

Dans [9], Lawvere s'est aperçu que la quantification pouvait être obtenue de façon interne en considérant les adjoints à gauche et à droite du foncteur f^{-1} (en prenant le produit fibré avec f). Le théorème fondamental de la théorie des topos déclare que l'adjoint à droite existe (des constructions peuvent être trouvées dans Kock et Wraith [6], Wraith [19], et Freyd [3]); l'adjoint à gauche est l'image. La définition comme adjoint donne immédiatement la validité des règles et des axiomes de quantification intuitioniste. Donc nous avons un calcul de prédicats internes.

En utilisant les quantificateurs internes, nous pouvons définir les morphismes de P^2A vers PA qui prennent la réunion et l'intersection d'une famille de sous-objets de A définie de façon interne. La grande réunion est le morphisme $\bigvee$, l'adjoint exponentiel du morphisme caractéristique du sous-objet

$$\{(a, F) / \exists_{S \in \text{PA}} (a \in S \cap S \in F)\} \rightarrow P^2A \times A.$$

L'intersection est le morphisme adjoint exponentiel du morphisme caractéristique du sous-objet

$$\{(a, F) / \forall_{S \in \text{PA}} (S \in F \Rightarrow a \in S)\} \rightarrow P^2A \times A.$$

Maintenant, considérons ce que ces constructions donnent dans des exemples.

Exemple 1. Topos des faisceaux sur un espace topologique (X, T_X) : Ce cas est peut-être le mieux connu; il a été exposé dans Mulvey [10], Reyes [14], et Wraith [19].

Ici Ω est le faisceau qui associe à un ouvert U l'ensemble des ouverts contenus dans U . Le morphisme de transition de $\Omega(U)$ vers $\Omega(V)$ où $V \subseteq U$ est obtenu par intersection avec V . Si V et V' sont des ouverts contenus dans U , alors les morphismes $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, et $\neg$ sont donnés par les formules suivantes:

$$\vee(V, V') = V \cup V'$$

$$\wedge(V, V') = V \cap V'$$

$$\Rightarrow(V, V') = (V' \cup CV)^0$$

$$\neg V = (CV)^0$$

où CV est le complément de V et V^0 indique l'intérieur. L'objet de sous-objets PA d'un faisceau A est le faisceau à valeur U égale à l'ensemble de sous-faisceaux de A restreint à U . La relation d'appartenance ϵ_A est le sous-faisceau dont la valeur de U est donnée par

$$\epsilon(U) = \{(a, S) / S \text{ est un sous-faisceau de } A|_U, a \text{ est une section globale de } A|_U \text{ et pour chaque } V \text{ et } U, r_{UV}a \in S(V)\}.$$

Si C est un sous-faisceau de $A \times B$ avec morphisme caractéristique x_C , alors nous pouvons spécifier $\exists_{b \in B} C$ et $\forall_{b \in B} C$ par leurs morphismes caractéristiques, qui associent à U les valeurs suivantes:

$$x_{\forall_{b \in B} C}(a) = \left(\bigcap_{b \in B(U)} x_C(a, b) \right)^0$$

$$x_{\exists_{b \in B} C}(a) = \left(\bigcup_{b \in B(U)} x_C(a, b) \right).$$

En mathématiques, nous nous intéressons à la validité de propositions complexes. Nous avons une méthode simple pour vérifier la validité de nos propositions atomiques (celles de la forme " $a \in A$ "). Si δ et σ sont des propositions dont nous savons la valeur de vérité, alors nous pouvons déterminer la valeur de vérité de $\delta \cap \sigma$, $\delta \cup \sigma$, $\delta \Rightarrow \sigma$, $\neg \delta$, $\exists_{b \in B} \delta(b)$, et $\forall_{b \in B} \delta(b)$ de la manière suivante:

- 1) $\delta \cap \sigma$ est valide sur U si pour tout $V \subseteq U$, δ et σ sont valides sur V .
- 2) $\delta \cup \sigma$ est valide sur U s'il existe un recouvrement $\{U_\beta\}$ tel que pour tout U_β , soit δ est valide sur U_β , soit σ est valide sur U_β .
- 3) $\delta \Rightarrow \sigma$ est valide sur U si la valeur de vérité de δ sur U est contenue dans la valeur de vérité de σ sur U .
- 4) $\neg \delta$ est valide sur U si l'ensemble de points de U où δ est valide n'a pas d'intérieur; en particulier, $\neg \neg \delta$ est valide si δ est valide sur un sous-ensemble

ouvert dense de U .

- 5) $\exists_{b \in B} \delta(b)$ est valide sur U s'il existe un recouvrement $\{U_\beta\}$ tel que pour chaque U_β , il existe une section globale b de $B|_{U_\beta}$ tel que $\delta(b)$ est valide sur U_β .
- 6) $\forall_{b \in B} \delta(b)$ est valide si pour tout ouvert $V \subseteq U$ et pour toute section globale b de $B|_V$, $\delta(b)$ est valide sur V .

L'action de $\cap$ et $\cup: PA \times PA \rightarrow PA$ sur les sections globales peut être décrite en utilisant la description d'un faisceau comme espace étalé (comme dans Godement [4]). Un sous-faisceau est associé à un sous-espace étalé ouvert. La réunion de deux sous-faisceaux est la réunion des deux sous-espaces étalés. L'intersection est leur intersection. Le pseudocomplément (ou négation) est l'intérieur du complément du sous-espace étalé associé. Prendre l'intérieur est nécessaire pour obtenir un sous-faisceau. Si on a une famille de sous-faisceaux indexée par un ensemble, on peut calculer sa réunion comme réunion des sous-espaces étalés associés; leur intersection est l'intérieur de l'intersection des sous-espaces étalés associés.

Proposition 1. On peut associer à chaque sous-faisceau S de PA un ensemble S de sous-faisceaux de A dont le nom de la réunion est $\cup^\top S^\top$.

Démonstration. Considérons l'ensemble des sections partielles $p:U \rightarrow PA$ telles que $(p \times \top^\top) \cdot \text{ev}$ ait la valeur "vrai" sur U . Toute section partielle de PA avec source U peut être associée à un sous-faisceau de A : sur U , c'est celui qui est appelé p ; à l'extérieur de U , c'est vide. S est l'ensemble de sous-faisceaux obtenu en appliquant ce procédé à toutes les sections partielles.

Alors, la méthode pour déterminer la réunion de cet ensemble S nous donne un sous-faisceau A' de A . Est-ce $\cup^\top S^\top$? Si non, il faudrait qu'il existe un ouvert U tel que les éléments de $\cup^\top S^\top(U)$ ne soient pas les mêmes que celles de $A'(U)$. Une section a de $A|_U$ est un élément de $A'(U)$ s'il y a un recouvrement de U , $\{U_\beta\}$, tel que $a|_{U_\beta}$ soit une section d'un élément de S . Ceci est possible si et seulement si $a \in S$ sur U au sens interne. Alors a est une section de A' si et seulement si il existe un recouvrement $\{U_\beta\}$ tel qu'il existe un F_β pour chaque β avec $F_\beta \in S(U_\beta)$ et $a \in F(U_\beta)$. Mais ça, c'est la condition pour que a soit élément de $\cup^\top S^\top$. Alors ils sont égaux.

Exemple 2. Ens^P où P est un préordre: Cet exemple est un cas particulier du cas spatial parce que Ens^P est isomorphe à $\text{Faisc}(P, \text{Ens})$ où P a reçu la topologie de l'ordre. Mais cet exemple a son propre intérêt parce qu'il est le topos qui démontre la connexion des sémantiques de Kripke avec la logique intuitioniste (Kripke [7]). Ici nous considérons P comme modèle du temps et les objets de Ens^P comme ensembles qui se développe le long de P . Si $p \in P$, nous pouvons dire que $A(p)$ représente l'ensemble développant A au temps p . Si $p \leq q$ nous disons que $A(p)$ est un ancêtre de $A(q)$ et $A(q)$ est un descendant de $A(p)$. $\Omega(p)$ est l'ensemble des idéaux de $P/p = \{q \in P/q \geq p\}$. $PA(p)$ est l'ensemble de tous les sous-objets de A/p dans

$Ens^{P/p}$. La réunion et l'intersection sont calculées à chaque temps $p \in P$ comme dans Ens . Les valeurs des quantificateurs sont aussi calculées facilement comme dans Ens . Seule la négation fait exception à cette règle: $\neg A'$ est l'ensemble développant qui associe à p l'ensemble de tous les éléments de $A(p)$ qui n'ont pas de descendants dans $A'(q)$ pour n'importe quel $q \geq p$. Alors, $\neg \neg \delta$ est vrai si δ est éventuellement vrai.

Exemple 3. Ens^G où G est un groupe: Ici la logique interne est identique à la logique classique. La seule différence est qu'il ne suffit pas de connaître les morphismes de 1 vers un objet pour connaître l'objet. Les morphismes de source 1 identifient seulement les éléments laissés fixes par l'action de G . PA est l'ensemble de sous-ensembles usuels avec l'action $(A')^G = \{x^g/x \in A'\}$.

Exemple 4. $Ens^{\mathbb{N}}$, la catégorie des ensembles munis d'un endomorphisme. Ceci est un exemple du topos de la forme Ens^M où M est un monoïde; ici M est le monoïde des nombres entiers naturels. Comme dans le cas de Ens^G les sections globales ne contiennent pas toute l'information sur un objet, mais seulement les éléments laissés fixes par l'endomorphisme.

L'objet des valeurs de vérité Ω peut être identifié à l'ensemble des nombres entiers négatifs ou nuls avec $-\infty$ ajouté. Le morphisme vrai est à but 0 . L'endomorphisme est l'identité sur $-\infty$ et 0 et successeur sur les nombres entiers négatifs. Les fonctions $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ et $\neg$ sont calculées ainsi:

$$\vee(a,b) = \max(a,b)$$

$$\wedge(a,b) = \min(a,b)$$

$$\Rightarrow(a,b) = \min(b-a, 0)$$

$$\neg a = -\infty \text{ si } a \neq -\infty, 0 \text{ si } a = -\infty.$$

Si δ est caractérisé par $\chi_\delta: A \times B \rightarrow \Omega$, alors

$$\chi_{\exists_{b \in B} \delta(b)}(a) = \max_{b \in B} \chi_\delta(a,b)$$

$$\chi_{\forall_{b \in B} \delta(b)}(a) = \min_{b \in B} \chi_\delta(a,b).$$

La complexité de cette situation se trouve dans la spécification de l'objet des sous-objets PA . Lawvere [8] a donné la description suivante:

Ω^A est l'ensemble de morphismes N -invariants
de $N \times A$ vers Ω avec l'action naturelle.

Ici nous pouvons simplifier la situation si l'endomorphisme est un épimorphisme

parce que dans ce cas, la condition de "morphisme N-invariants" nous dit que les valeurs associées aux éléments $(a,0)$ sont arbitraires mais que tous les autres sont déterminées quand on sait les valeurs sur $(a,0)$. Si l'endomorphisme n'est pas un épimorphisme, nous pouvons choisir les valeurs pour chaque $(a,0)$ et chaque (b,n) où $b \notin fA$ et les autres seront déterminées. L'action naturelle nous donne un morphisme de PA qui est un épimorphisme (l'image inverse d'un morphisme qui prend la valeur $(a,0)$ en $-k$ et (b,n) en $-h$ est le morphisme qui prend la valeur $(a,0)$ en $-k-1$ et (b,n) en $-h-1$). Donc nous pouvons travailler avec P^2A sans trop de difficulté.

Les opérations $\cap$ et $\cup$ sont calculées comme suit: si $g:A \times N \rightarrow \Omega$ prend la valeur $(a,0)$ en $-k$ et (b,n) en $-h$, et g' prend la valeur $(a,0)$ en $-k'$ et la valeur (b,n) en $-h'$, alors

$g \cup g'$ prend la valeur $(a,0)$ en $\max(-k, -k')$ et (b,n) en $\max(-h, -h')$

$g \cap g'$ prend la valeur $(a,0)$ en $\min(-k, -k')$ et (b,n) en $\min(-h, -h')$.

La grande réunion $\cup: P^2A \rightarrow PA$ a l'action suivante: un élément de P^2A est un morphisme $h: PA \times N \rightarrow \Omega$ déterminé par l'action sur $PA \times \{0\}$. $\cup(h)$ est la fonction qui prend la valeur $(a,0)$ en

$$\max_{\substack{f \in PA \\ n \in N}} (f(a,0) + h(f,n))$$

et la valeur (b,n) en

$$\max_{\substack{f \in PA \\ m \in N}} (f(b,n) + h(f,m)).$$

III. LES ESPACES TOPOLOGIQUES INTERNES

Dès que nous avons la logique interne d'ordre supérieur, nous pouvons définir une structure dans un topos en choisissant une définition formelle de la structure dans *Ens* et en la traduisant dans le langage interne du topos. Les différents choix parmi les définitions classiquement équivalentes peuvent donner des résultats distincts du point de vue intuitioniste, comme le travail de Mulvey [10] le montre pour les corps. Il y a avantage à prendre les définitions les plus fortes afin d'obtenir la théorie la moins éloignée de la théorie classique.

Les espaces topologiques sont définis classiquement en spécifiant les systèmes de convergence ou de fermeture, en choisissant l'ensemble des ouverts ou des fermés ou en donnant un système fondamental de voisinages. L'équivalence classique de ces formulations n'est pas valide au sens intuitioniste (à cause de l'usage des propriétés de la négation qui ne sont plus valides); pourtant, on peut utiliser les sous-ensembles ouverts pour formuler les concepts raisonnables de convergence, de ferme-

ture et de voisinage. La thèse de A.S. Troelstra [17] résume sommairement les propriétés de fermeture, des bases et des voisinages qu'on peut déduire de façon intuitionniste de la définition qui utilise les ensembles ouverts.

Définition. Un espace topologique dans un topos est un couple (A, T_A) , où A est un objet du topos et T_A est un sous-objet de PA qui satisfait les conditions suivantes:

- 1) les morphismes $\ulcorner A \urcorner$ et $\ulcorner \emptyset \urcorner$ factorisent par T_A
- 2) le morphisme $\cap: PA \times PA \rightarrow PA$ se relève à un morphisme $\cap: T_A \times T_A \rightarrow T_A$
- 3) la grande réunion $\cup: P^2A \rightarrow PA$ se relève à $\cup: PT_A \rightarrow T_A$.

Un morphisme $f: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$ est dit continu si l'image de T_B par la forme interne du foncteur f^{-1} est contenue dans T_A .

Un morphisme est dit ouvert si l'image de T_A par la forme interne du foncteur "image directe de f " est contenue dans T_B .

La catégorie des espaces topologiques et des morphismes continus dans $\mathcal{E}$ est notée $Tsc(\mathcal{E})$.

Condition 3), l'existence du relèvement du morphisme de réunion interne, a deux conséquences qui ne sont pas évidentes dans Ens . Toutes les deux concernent les sections partielles qui n'existent pas dans les ensembles (sauf les sections globales) parce qu'il n'y a pas de sous-objets non-triviaux de 1 dans Ens .

Proposition 2. Toute section partielle d'une topologie peut être prolongée en une section globale.

Démonstration. Soit $p: U \rightarrow T_A$ (où U est un sous-objet de 1) une section partielle que nous voulons prolonger. Les sections partielles sont toujours moniques (parce que ses compositions avec le morphisme canonique de but 1 sont moniques), donc p a un nom $p: \ulcorner 1 \urcorner \rightarrow PT_A$. Si nous composons ce morphisme avec le relèvement de la grande réunion interne, nous allons obtenir une section globale de T_A . Tout ce que nous devons montrer est que cette section globale prolonge p .

Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\quad} & 1 & & \\ p \downarrow & \ulcorner \urcorner_{T_A} & \downarrow & \ulcorner p \urcorner & \\ T_A & \xrightarrow{\quad} & PT_A & \xrightarrow{\quad \cup \quad} & T_A \end{array}$$

Dans le carré, il est facile de démontrer que chacun des deux morphismes de U vers PT_A est l'adjoint exponentiel du morphisme caractéristique du sous-objet

$$(id, p): U \rightarrow U \times T_A$$

et donc ils sont égaux. Alors, nous avons le prolongement désiré.

Corollaire 1. Dans un topos où les sous-objets de 1 forment un ensemble de générateurs, deux topologies avec les mêmes sections globales sont identiques.

Démonstration. Si T_A et T'_A ont les mêmes sections globales, il n'y a pas de section partielle de PA qui peut les distinguer, parce que si p est une section partielle qui distingue T_A et T'_A , alors l'extension à une section globale les distingue aussi. Donc il n'y a pas des sections partielles qui peuvent distinguer x_{T_A} et $x_{T'_A}$, donc il faut qu'ils soient identiques.

Définition. Si p est une section partielle d'une topologie, alors U^p est appelé l'extension par zéro de p .

Définition. On dit qu'un sous-objet $A' \rightarrowtail A$ est un sous-objet ouvert de (A, T_A) si $|A'|$ se factorise par T_A .

Corollaire 2. Si U est un sous-objet de 1 et que A' est un sous-objet ouvert de (A, T_A) , alors $A' \times U$ est aussi ouvert.

Démonstration. Appliquez la proposition 2 à la section partielle $|A'| \times U$ de U vers T_A . La section globale qui est produite est $|U \times A'|$.

La pierre de touche pour un concept d'une structure dans un topos est la description des objets avec cette structure dans les topos usuels. Alors, considérons quels sont les exemples d'espaces topologiques internes dans les topos $\text{Faisc}(X, T_X)$, Ens^P , Ens^G , et Ens^k .

Exemple 1. Caractérisation des espaces topologiques dans le cas du topos spatial $\text{Faisc}(X, T_X)$: Un objet A de $\text{Faisc}(X, T_X)$ peut être représenté par un espace étalé $A \xrightarrow{p} X$. Dans les topos spatiaux, les sections partielles forment une famille des générateurs, donc il va suffir de spécifier les sections globales de PA qui sont dans T_A . Un sous-faisceau de A est associé à un sous-espace étalé ouvert de $p:A \rightarrow X$. Alors un ensemble de sous-faisceaux est un sous-ensemble de la topologie sur A qui rend p un espace étalé. La condition 1) de la définition d'un espace topologique dit que A et $\emptyset$ sont dans la structure. La condition 2) dit que si A' et A'' sont là, alors $A' \cap A''$ est là aussi. La méthode de calcul des réunions internes et le corollaire 2 de la proposition 2 disent que l'ensemble doit être stable par réunion. Le corollaire 1 de la proposition 2 dit que si A' est dans la structure et que $U \subseteq X$ est ouvert, alors $p^{-1}U \cap A'$ est dans la structure. Donc, une structure d'espace topologique interne sur A est une deuxième topologie T_A sur l'espace total de l'espace étalé associé à A telle que p soit continu de (A, T_A) vers (X, T_X) et T_A soit un sous-ensemble de la topologie de l'espace total de l'espace étalé associé à A .

Exemples spécifiques. Il y a deux topologies triviales sur un objet A : la topologie discrète est la topologie qui rend p étalé; la topologie grossière est la

topologie induite par p .

Si (Y, T_Y) est un espace topologique, il y a une structure naturelle d'espace topologique interne sur le faisceau des germes des fonctions localement constantes de X vers Y . L'espace étalé associé avec ce faisceau est $\text{pr}: X \times (Y, \text{discrète}) \rightarrow X$. La deuxième topologie est le produit $X \times (Y, T_Y)$.

Exemple 2. Ens^P où P est un préordre: Ici nous avons aussi le fait que les sous-objets de 1 forment une famille de générateurs, donc qu'il va suffire de spécifier les sous-objets ouverts. Le corollaire 2 de la proposition 2 nous dit que si un sous-objet A' est dans la structure sur A , on peut en obtenir un autre en remplaçant tous les ensembles $A'(q)$ (où $q \geq p$) par $\emptyset$. Avec les conditions 1), 2), et 3), cela nous dit qu'un espace topologique dans Ens^P est un ensemble de sous-objets avec troncature et tel que tout niveau $A(p)$ est un espace topologique. C'est un espace topologique qui se développe selon l'ordre P tel que l'on doit savoir tout de l'histoire du développement avant d'en connaître la structure.

Exemple 3. Ens^G où G est un groupe: Ici une topologie interne est un objet A avec une action $a: G \times A \rightarrow A$ et une topologie T_A qui est un sous-objet de PA au sens de Ens^G . Donc, il faut que T_A soit un sous-ensemble invariant de PA . Alors, l'action doit être ouverte.

Exemple 4. $\text{Ens}^\mathbb{N}$: Une topologie interne sur $A \xrightarrow{f} A$ est un sous-ensemble invariant de PA tel que:

- 1) les fonctions constantes $-\infty$ et 0 sont dans T_A
- 2) si h et $k: A \times \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ sont là, il en est ainsi pour $\min(h, k)$
- 3) pour chaque fonction $g: T_A \times \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ $\mathbb{N}$ -équivariante, la fonction qui prend la valeur $(a, 0)$ en

$$\max_{\substack{h \in T_A \\ n \in \mathbb{N}}} (h(a, 0) + g(h, n))$$

et (b, m) en

$$\max_{\substack{h \in T_A \\ n \in \mathbb{N}}} (h(b, m) + g(h, n))$$

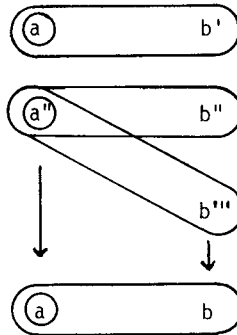
est aussi dans T_A . (Ceci est une condition bien opaque!)

IV. CORRESPONDANCE ENTRE LES APPROCHES INTERNES ET EXTERNES

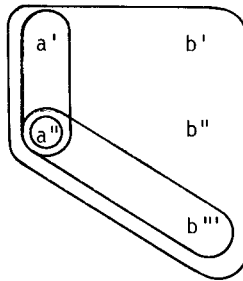
Considérons le cas du topos des faisceaux sur un espace topologique (X, T_X) . Si A est un faisceau et que T_A est une structure interne d'un espace topologique sur A , nous pouvons donner des structures d'espaces topologiques sur les valeurs $A(U)$ où U est un ouvert de X . La structure donnée à $A(U)$ a pour base l'ensemble

des ensembles de sections des sous-objets ouverts de (A, T_A) sur U . En général, ceci nous donne seulement une base parce que le foncteur Γ des sections globales ne conserve pas les réunions.

Exemple 1. Dans $\text{Faisc}(2, \text{Sierpinski})$ l'objet Ω est l'espace étalé



Une structure interne est donnée par la topologie



Les topologies correspondantes sur les valeurs des ouverts sont

$$\Omega(\emptyset) = \{\star\}$$

$$\Omega(\{a\}) = \begin{array}{|c|} \hline a' \quad a'' \\ \hline \end{array}$$

$$\Omega(\{a, b\}) = \begin{array}{|c|} \hline a', b' \quad a''b'' \quad a''b''' \\ \hline \end{array}$$

Remarquez que le morphisme de restriction $\Omega(\{a, b\}) \rightarrow \Omega(\{a\})$ n'est pas continu. Contrairement au cas des structures algébriques, il y a donc une différence entre l'approche interne et l'approche externe: un espace topologique dans la catégorie des faisceaux n'est pas un faisceau d'espaces topologiques.

Si on a un faisceau d'espaces topologiques A , peut-on obtenir une structure

topologique interne sur A avec les mêmes structures topologiques sur les fibres? Considérons la construction suivante: la structure topologique interne sur A , FA , est la plus petite structure qui contienne tous les sous-faisceaux A' de A tels que $A'(U)$ soit ouvert dans $T_{A(U)}$ pour chaque ouvert U de X . Cette topologie existe à cause de la construction d'une topologie d'une sous-base appliquée à la deuxième topologie sur l'espace total de A .

Proposition 3. La construction ci-dessus définit un foncteur F de $\text{Faisc}(X, \text{Top})$ vers $\text{Tsc}(\text{Faisc}(X, \text{Ens}))$ tel que les topologies déterminées par les structures externes et internes sur une fibre A_x sont égales.

Démonstration. Premièrement, est-ce que F est un foncteur? On doit vérifier qu'un morphisme de faisceaux d'espaces topologiques $A \rightarrow B$ est continu de façon interne $FA \rightarrow FB$. Il suffira de montrer que l'image réciproque d'un ouvert de la sous-base est ouverte. Mais l'image réciproque d'un ouvert de la sous-base est encore un ouvert de la sous-base parce que chaque valeur est l'image réciproque d'un ouvert par un morphisme continu. Donc F est un foncteur.

La topologie sur A_x déterminée de façon externe est la topologie finale sur la colimite

$$\lim_{\{U/x \in \vec{U}\}} A(U).$$

Donc, il suffira de montrer que chaque ouvert 0 de $A(U)$ peut être la valeur associée à U d'un sous-faisceau A' dont chaque valeur $A'(V)$ est ouvert dans $T_{A(V)}$. C'est assez facile: pour $V \subseteq U$, posons que $0(V) = r_{UV}^{-1}(0)$; pour tout autre V , $0(V) = \emptyset$.

Ce foncteur nous indique comment on peut obtenir une structure interne à partir d'une structure externe. Nous pouvons nous demander s'il a un foncteur adjoint à droite ou à gauche, si nous avons une méthode canonique pour associer une structure externe à une structure interne. Nous allons montrer qu'il a un adjoint à droite, mais nous aurons besoin, pour ce faire, de quelques propositions.

Définition. L'objet de Sierpinski (Ω, Sierp) est le représentant des sous-objets Ω muni de la plus petite topologie telle que le vrai soit ouvert. (Ceci a un sens en général par la construction dans Stout [15].)

Exemple 1a. L'objet donné dans l'exemple 1 de cette section est l'objet de Sierpinski dans la catégorie des faisceaux sur l'espace de Sierpinski usuel.

Dans $\text{Tsc}(E)$, (Ω, Sierp) est un représentant des sous-objets ouverts. Un morphisme continu de A vers (Ω, Sierp) nous donne un sous-objet ouvert pour le produit fibré avec le vrai. Alors la totalité de l'information concernant un espace topologique (A, T_A) dans $\text{Faisc}(X, \text{Ens})$ est contenue dans l'ensemble des morphismes continus de (A, T_A) vers (Ω, Sierp) .

Alors, nous construirons l'adjoint à droite de F en trouvant son action sur (Ω, Sierp) et en utilisant le résultat suivant dû à Wischnewsky [18]:

Théorème. La catégorie $\text{Faisc}(X, \text{Top})$ est initiale sur $\text{Faisc}(X, \text{Ens})$.

Ceci dit que pour tout faisceau A et toute famille de morphismes $f_i: A \rightarrow B_i$ où chaque B_i est un faisceau d'espaces topologiques, nous pouvons trouver une structure canonique d'un faisceau d'espaces topologiques (dite structure initiale) telle que chaque f_i soit continu et si C est un faisceau d'espaces topologiques, alors $g: C \rightarrow A$ est continu si et seulement si tous les morphismes $f_i g: C \rightarrow B_i$ sont continus.

Alors nous cherchons l'action de l'adjoint R sur (Ω, Sierp) . Ce que nous désirons est un faisceau d'espaces topologiques avec faisceau d'ensembles sous-jacents Ω ayant la propriété suivante:

Si A est un faisceau d'espaces topologiques, les morphismes de faisceaux d'ensembles de base A et de but Ω qui sont continus quand Ω a la structure externe $R(\Omega, \text{Sierp})$ coïncident avec ceux qui sont continus de façon interne de FA vers (Ω, Sierp) .

Considérons le faisceau d'ensembles Ω muni d'une structure de pré-faisceau d'espaces topologie en donnant la base $B_{\Omega}(U)$ de la topologie sur $\Omega(U)$ où U est un ouvert de X et

$$B_{\Omega}(U) = \{ \{V/V \text{ est ouvert et } V \geq W\} / W \text{ est ouvert et } W \leq U \} \cup \{\emptyset\}.$$

Ceci est le pré-faisceau le plus petit qui à chaque valeur munie d'une topologie plus grande que la topologie associée à valeur par (Ω, Sierp) , donc c'est un faisceau. Ceci est le faisceau d'espaces topologiques $\text{Faisc} \cdot \text{Sierp}$.

Proposition 4. Si A est un faisceau d'espaces topologiques et si $f: A \rightarrow \Omega$ est un morphisme des faisceaux d'ensembles, alors f est continu de façon externe de A vers $\text{Faisc} \cdot \text{Sierp}$ si et seulement si f est continu de façon interne de FA vers (Ω, Sierp) .

Démonstration. Supposons que f est continu de façon externe. Alors, il suffira de montrer que $\text{id}: F(\text{Faisc}, \text{Sierp}) \rightarrow (\Omega, \text{Sierp})$ est continu; c'est-à-dire que chaque sous-faisceau ouvert de (Ω, Sierp) associe à tout ouvert U un ouvert de $\Omega(U)$ pour la topologie donnée par $\text{Faisc} \cdot \text{Sierp}$. La topologie sur chaque valeur $\Omega(U)$ donnée par (Ω, Sierp) est

$$T_{\Omega}(U) = \{\emptyset, \{U\}, \{V/VU \text{ et } V \text{ est ouvert}\}\},$$

qui est contenue dans la topologie de $\text{Faisc} \cdot \text{Sierp}(U)$.

Maintenant, supposons que f est continu de façon interne de FA vers (Ω, Sierp) et que f n'est pas continu de façon externe de A vers $\text{Faisc} \cdot \text{Sierp}$. Alors, il faut qu'il y ait un ouvert U tel que f/U soit discontinu. Donc il y a un ouvert O de

$\text{Faisc}\cdot\text{Sierp}(U)$ tel que $f/U^{-1}(0)$ ne soit pas ouvert. Nous pouvons choisir 0 dans la base donnée dans la construction de $\text{Faisc}\cdot\text{Sierp}$. Mais tous les ouverts de la base du faisceau $\text{Faisc}\cdot\text{Sierp}$ sont les images réciproques par les morphismes de restriction des ouverts dans les topologies définies sur les valeurs $\Omega(V)$ par (Ω, Sierp) . Donc tous les f/U sont continus et notre théorème est ainsi démontré.

Théorème 1. Le foncteur $F:\text{Faisc}(X, \text{Top}) \rightarrow \text{Tsc}(\text{Faisc}(X, \text{Ens}))$ a un adjoint à droite R .

Démonstration. Toute l'information contenue dans une structure topologique interne T_A est réfléchiée dans l'ensemble M des morphismes continus de (A, T_A) vers (Ω, Sierp) . Le faisceau $R(A, T_A)$ est la structure d'un faisceau d'espaces topologiques la plus petite qui rend tous les morphismes de M continus de A vers $\text{Faisc}\cdot\text{Sierp}$.

Soit B un faisceau d'espaces topologiques et (A, T_A) un espace topologique interne dans $\text{Faisc}(X, \text{Ens})$. Nous allons montrer qu'un morphisme de B vers A est un morphisme de faisceaux d'espaces topologiques de B vers $R(A, T_A)$ si et seulement s'il est continu de façon interne de FB vers (A, T_A) .

Si $f:FB \rightarrow (A, T_A)$ est continu et si $g:(A, T_A) \rightarrow (\Omega, \text{Sierp})$ est dans M , alors gf est continu de façon interne de FB vers (Ω, Sierp) et donc de B vers $\text{Faisc}\cdot\text{Sierp}$. Par la propriété universelle de la structure initiale, ceci nous dit que f est continu de façon externe.

Si f est continu de façon externe, alors pour tout ouvert 0 de (A, T_A) , $x_0 f:B \rightarrow \text{Faisc}\cdot\text{Sierp}$ est continu. Donc chaque $x_0 f:B \rightarrow (\Omega, \text{Sierp})$ est continu de façon interne. Mais cela nous dit que f est continu de façon interne.

V. OPERATEURS DE FERMETURE

En topologie ordinaire (dans Ens) on peut définir une topologie par la donnée d'un opérateur de fermeture ou de façon équivalente par la donnée d'un ensemble de sous-objets fermés. L'équivalence de ces approches à l'approche utilisant les ouverts n'est pas, en général, vérifiée dans les topos parce que les lois de deMorgan ne sont pas valides dans les topos.

On peut récupérer quelques-unes des propriétés de l'opérateur de fermeture à partir de notre définition d'un espace topologique interne. Nous ferons la définition suivante empruntée à Troelstra [17]:

Définition. L'opérateur de fermeture associé à un espace topologique interne (A, T_A) est le morphisme $cl:PA \rightarrow PA$ qui a pour adjoint exponentiel $cl:PA \times A \rightarrow \Omega$ le morphisme caractéristique du sous-objet

$$\{(S, x)/\forall_{0 \in T_A} (x \in 0 \Rightarrow \exists_{y \in A} (y \in 0 \cap S))\} \rightarrow PA \times A.$$

Des arguments intuitionnistes standards nous permettent de démontrer les propriétés suivantes:

Proposition.

- 1) Si A' et A'' sont sous-objets de A et $A' \geq A''$, alors $c1A' \geq c1A''$;
- 2) $c1\emptyset = \emptyset$;
- 3) $c1c1 = c1$;
- 4) $c1A' \geq A'$;
- 5) $c1(A' \cup A'') = c1(c1A' \cup c1A'')$
- 6) $c1(A' \cap A'') \leq c1A' \cap c1A''$.

Un sous-objet est dit fermé si $A' = c1A'$.

Exemple 1. La réunion de deux sous-objets fermés peut ne pas être fermée: Dans le topos des faisceaux sur l'intervalle I , l'espace étalé $I \times (I, \text{discrète}) \rightarrow I$ a une topologie naturelle $I \times I$ (avec la topologie produit). Les éléments de ce faisceau sont les intervalles horizontaux. L'opération de fermeture ajoute à un sous-faisceau de A tous les intervalles horizontaux inclus dans la frontière de A . Par exemple, le sous-faisceau avec espace étalé $\text{pr}_1: I \times (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow I$ à fermeture $I \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Alors soit A' le sous-objet

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((0, (2^n - 1)/2^{n+1}) \cup ((2^{n+1} - 1)/2^{n+1}, 1)) \times \{\frac{1}{2}^n\} \right) \cup ((0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)) \times \{0\}$$

et A'' le sous-objet

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((2^{n-1} - 1)/2^n, (2^{n-1} + 1)/2^n) \times \{\frac{1}{2}^n\}.$$

A' et A'' sont fermés.

$$A' \cup A'' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (I \times \frac{1}{2}^n) \cup ((0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)) \times \{0\}$$

$$c1(A' \cup A'') = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (I \times \frac{1}{2}^n) \cup I \times \{0\}.$$

Donc $A' \cup A''$ n'est pas fermé.

Exemple 2. Il est possible pour deux espaces topologiques internes distincts d'avoir les mêmes sous-objets fermés: Dans $\text{Ens}^{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}$, considérez les espaces topologiques

$$A = \left\{ \begin{array}{ccccccc} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a, b\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a\} & \{a\} & \{a, b\} & \{a, b\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \emptyset & \{a\} & \{a, b\} & \{a\} & \{a, b\} & \{a, b\} & \{a, b\} \end{array} \right\}$$

et

$$B = \left\{ \begin{array}{cccccc} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a,b\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a\} & \{a,b\} & \{a,b\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \emptyset & \{a\} & \{a,b\} & \{a,b\} & \{a,b\} & \{a,b\} \end{array} \right\}.$$

L'ensemble de sous-objets fermés est le même pour les deux, c'est

$$C = \left\{ \begin{array}{cccccc} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a,b\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{b\} & \{b\} & \{a,b\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \emptyset & \{b\} & \{a,b\} & \{b\} & \{a,b\} & \{a,b\} \end{array} \right\}.$$

REMERCIEMENT

Je veux remercier Carol Meyer pour son aide dans l'exposition et l'expression française de cet article. Les phrases maladroite qui restent sont les miennes.

REFERENCES

1. ARTIN, GROTHENDIECK, VERDIER, et al., *Théorie des topos et cohomologie étalée des schémas (SGA IV)*, Lecture Notes in Mathematics 269, 270, 305, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
2. MICHEL COSTE, Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires, Séminaire de Théorie des catégories dirigé par Jean Benabou, 1974.
3. P. FREYD, Aspects of Topoi, Bull. Aust. Math. Soc. 7, 1-76 (1973).
4. R. GODMENT, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
5. J.W. GRAY, Sheaves with values in a category, Topology 3, 1-18 (1965).
6. A. KOCK et G. WRAITH, Elementary toposes, Århus Lecture Notes Series, Århus Universitet, 1972.
7. S. KRIPKE, Semantical analysis of intuitionistic logic I, dans *Formal Systems and Recursive Functions*, éd. par J.N. Crossley et M.A.E. Dummett, North Holland, Amsterdam, 1965.
8. F.W. LAWVERE, Introduction, dans Lecture Notes in Mathematics 274, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
9. F.W. LAWVERE, Quantifiers and sheaves, Actes du Congrès Int. des Math., Nice, 1970, Tome 1, 329-334.
10. C. MULVEY, Intuitionistic algebra and representation of rings, dans *Recent Advances in the Representation Theory of Rings and C*Algebras*, Memoirs 148, AMS, 1974.
11. G. OSIUS, The internal and external aspect of logic and set theory in elementary Topoi, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle XV, Fasc. 2, 1974.

12. G. OSIUS, Logical and set theoretic tools in elementary Topoi, dans Lecture Notes in Mathematics 445, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
13. G. OSIUS, A note on Kripke-Joyal semantics for the internal language of Topoi, dans Lecture Notes in Mathematics 445, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
14. G. REYES, From sheaves to logic, dans Studies in Algebraic Logic, MAA, 197.
15. L.N. STOUT, Topological space objects in a topos II: ε -completeness and ε -cocompleteness, Manuscripta mathematica 17, 1-14 (1975).
16. L.N. STOUT, General topology in an elementary topos, Thèse de doctorat, University of Illinois, 1974.
17. A.S. TROELSTRA, Intuitionistic general topology, Thèse de doctorat, Amsterdam, 1966.
18. M. WISCHNEWSKY, Sheaves with values in an initial category, Manuscrit, Munich, 1972.
19. G. WRAITH, Lectures on elementary Topoi, dans Lecture Notes in Mathematics 445, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

Box 470
Vassar College
Poughkeepsie, N.Y.
U.S.A.

Manuscript reçu le 11 août 1976

