

SUR L'ABSCISSE SPECTRALE D'UN OPÉRATEUR ET LE THÉORÈME GÉNÉRALISÉ DE LIAPOUNOV

José Nieto

§1. INTRODUCTION

Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace de Banach complexe et $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur X . Munie de la norme $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$, $\mathcal{L}(X)$ est une algèbre de Banach complexe, ayant l'opérateur identité I comme élément unité.

Pour $A \in \mathcal{L}(X)$, on notera $\text{Sp}(A)$ le spectre de A et $r(A)$ son rayon spectral.

Définition (voir [12]). L'abscisse spectrale de A est le nombre réel

$$\mu(A) = \max\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \text{Sp}(A)\}.$$

La première propriété de l'abscisse spectrale qu'on établira (Proposition 1) est la relation

$$\mu(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(I+hA) - 1}{h}, \quad 1.1$$

qui représente une généralisation d'un résultat obtenu par Lozinskiĭ [6, Théorème 1] pour des matrices $n \times n$ complexes, c'est-à-dire dans le cas $X \in \mathbb{C}^n$. Une application intéressante de 1.1 est donnée, dans la Proposition 2, pour A hyponormal.

De la définition de l'abscisse spectrale, comme aussi de 1.1, il s'en suit que la fonction $\mu: \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ne change pas lorsque la norme $\| \cdot \|$ est remplacée par une autre norme $\| \cdot \|_0$ sur X qui lui soit équivalente. Par contre, la différentielle de Gâteaux $\mu: \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ (voir [7]), définie par

$$\varphi(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I+hA\|_0 - 1}{h} \quad 1.2$$

dépend, en général, de la norme $\| \cdot \|$ sur $\mathcal{L}(X)$, correspondant à la norme $| \cdot |$ sur X . Pour souligner cette dépendance, on dira que ϕ est la différentielle de Gâteaux associée à la norme $| \cdot |$ sur X , et on notera ϕ_0 la différentielle de Gâteaux associée à une norme $| \cdot |_0$, équivalente à $| \cdot |$.

Le résultat central de cet article est le théorème énoncé dans la section II; il en découle le Corollaire: Pour un opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$ donné, on a

$$\mu(A) = \inf\{\phi_0(A) : | \cdot |_0 \sim | \cdot |\},$$

où $\sim$ est le symbole d'équivalence entre normes. Ce corollaire généralise un résultat de Pao [8], Ström [12] et Deutsch [3], obtenu dans le cas $X \in \mathbb{C}^n$, où $\mathbb{C}^n$ est muni d'un produit scalaire. Cette borne inférieure est atteinte, par exemple, pour un opérateur hyponormal.

D'après 1.1 l'abscisse spectrale peut être considérée comme la différentielle de Gâteaux associée au rayon spectral. Dans cette optique, le Corollaire est l'analogue, pour les différentielles de Gâteaux, du théorème de Holmes [5]: "Pour $A \in \mathcal{L}(X)$ donné,

$$r(A) = \inf\{\|A\|_0 : | \cdot |_0 \sim | \cdot |\}."$$

Mon étudiant de doctorat McFarlane a trouvé, pour un opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$ donné, certaines conditions nécessaires et d'autres suffisantes pour que la borne inférieure des $\{\phi_0(A) : | \cdot |_0 \sim | \cdot |\}$ et celle des $\{\|A\|_0 : | \cdot |_0 \sim | \cdot |\}$ soient atteintes. Lorsque X est de dimension finie, ces conditions deviennent nécessaires et suffisantes, et on retrouve la caractérisation que Pao [9] et Ström [12] avaient donnée pour les matrices pour lesquelles $\mu(A)$ est le minimum des $\{\phi_0(A) : | \cdot |_0 \sim | \cdot |\}$.

Les normes $| \cdot |_p$ et la formule (voir par exemple [1], Chap.1, 4):

$$\mu(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA}\|, \quad 1.3$$

dont nous nous servons dans la section II, sont bien connues dans la littérature. Elles permettent de relier l'abscisse spectrale à la théorie des semi-groupes, au théorème de Liapounov et aux problèmes de stabilité des solutions d'équations différentielles dans un espace de Banach. Ces sujets ne sont pas abordés dans cet article. En effet, pour le théorème de Liapounov et les applications des normes $| \cdot |_p$ aux problèmes de stabilité nous renvoyons le lecteur à l'excellent ouvrage de Daleckiĭ-Kreĭn [1]; quant aux questions se rattachant à la théorie de semi-groupes et aux généralisations du théorème de Liapounov le lecteur pourra consulter les articles récents de Datko [2], Pao [10] et Pazy [11].

§2. Tout d'abord, les limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(I+hA)-1}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I+hA\|-1}{h}$$

existent, comme conséquence de la convexité dans $\mathbb{R}$ des fonctions $f(h) = r(I+hA)$, $g(h) = \|I+hA\|$. D'autre part, les définitions (données dans §1) de l'abscisse spectrale et de la différentielle de Gâteaux φ associée à une norme quelconque $\|\cdot\|$ sur X , découle la propriété suivante de μ et φ :

Pour λ réel,

$$\mu(A+\lambda I) = \mu(A) + \lambda \quad \text{et} \quad \varphi(A+\lambda I) = \varphi(A) + \lambda. \quad 2.1$$

De plus, il est facile de vérifier que pour $h \rightarrow 0^+$:

$$r(e^{hA}) = r(I+hA) + o(h)$$

$$\|e^{hA}\| = \|I+hA\| + o(h).$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(I+hA)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(e^{hA})-1}{h}, \quad 2.2$$

et, compte tenue de la définition: $\varphi(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I+hA\|-1}{h}$,

$$\varphi(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|e^{hA}\|-1}{h}.$$

Proposition 1. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Alors

$$\mu(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(I+hA)-1}{h}.$$

Démonstration. D'après le Théorème de l'Application Spectrale on a :

$$r(e^{hA}) = \max\{|e^{h\lambda}| : \lambda \in \text{Sp}(A)\} = e^{h\mu(A)}.$$

Donc, grâce à 2.2

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(I+hA)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{h\mu(A)}-1}{h} = \mu(A).$$

Corollaire. Quels que soient l'opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$ et la norme $\|\cdot\|_0$, équivalente à $\|\cdot\|$, on a :

$$\mu(A) \leq \varphi_0(A).$$

Démonstration. Conséquence immédiate de $r(I+hA) \leq \|I+hA\|_0$ et de la Proposition 1.

Soit $(X, | \cdot |)$ espace de Hilbert, avec produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ($|x|^2 = \langle x, x \rangle$). Un opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$ est dit *hyponormal* (voir [4]), si

$$|A^*x| \leq |Ax| \text{ pour tout } x \in X,$$

A^* étant l'adjointe de A . Si A est hyponormal, alors pour α et β complexes, l'opérateur $\alpha I + \beta A$ est aussi hyponormal, car

$$|(\alpha I + \beta A)^*x|^2 = \langle \bar{\alpha}x + \bar{\beta}A^*x, \bar{\alpha}x + \bar{\beta}A^*x \rangle \leq \langle \alpha x + \beta Ax, \alpha x + \beta Ax \rangle = |(\alpha I + \beta A)x|^2.$$

On sait de plus ([4 Problème 162]) que pour un opérateur hyponormal la norme est égale au rayon spectral.

Proposition 2. Soit A un opérateur hyponormal. Alors

$$(a) \quad \mu(A) = \varphi(A)$$

$$(b) \quad \|e^{tA}\| = e^{t\mu(A)} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration. Chaque opérateur $I + hA$ étant hyponormal, on a $\|I+hA\| = r(I+hA)$, d'où $\mu(A) = \varphi(A)$, d'après la Proposition 1.

Afin d'établir (b), rappelons que pour un opérateur linéaire borné B :

$$\|e^B\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(I + \frac{B}{n} \right)^n \right\|$$

et, en plus $\|B\| = r(B)$ si et seulement si $\|B^n\| = \|B\|^n$ pour tout entier $n \geq 1$. Or, pour chaque entier $p \geq 1$ on a $\|I + \frac{A}{p}\| = r(I + \frac{A}{p})$, de façon que pour un entier fixé k , $k \geq 1$:

$$\|e^{kA}\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \left(I + \frac{A}{p} \right)^{pk} \right\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \left(I + \frac{A}{p} \right)^p \right\|^k = \|e^A\|^k,$$

d'où

$$e^{\mu(A)} = r(e^A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{kA}\|^{1/k} = \|e^A\|.$$

Remplaçant maintenant A par tA , on obtient

$$\|e^{tA}\| = e^{\mu(tA)} = e^{t\mu(A)} \text{ pour } t \geq 0.$$

Remarque 1. Dans leur livre [1, Chap. 1, Problème 16], Daleckiĭ et Krein

soulèvent la question de déterminer la valeur exacte de $\|e^{tA}\|$, pour un opérateur linéaire A dans $\mathbb{C}^n$, en termes de $\|A\|$ et $\mu(A)$. La Proposition 2 donne une réponse précise à cette question, même dans un espace de Hilbert quelconque, si A est hyponormal. Notons aussi que dans $\mathbb{C}^n$ tout opérateur hyponormal est normal [4].

Lemme. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$ tel que

$$\|e^{tA}\| \leq N e^{-\nu t} \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (*)$$

pour des constantes strictement positive N et ν . Alors chacune des normes $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$:

$$\|x\|_p = \left\{ \int_0^\infty |e^{tA}x|^p dt \right\}^{1/p}$$

est équivalente à la norme $\|\cdot\|$ et

$$\varphi_p(A) \leq -\nu N^{-p} < 0.$$

Remarque 2. C'est seulement pour simplifier la notation que les normes $\|\cdot\|_p$, qui dépendent de A , ne sont pas notées $\| \cdot \|_{A,p}$. Remarquons aussi que si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert, la norme $\|\cdot\|_2$ provient d'un produit scalaire (voir [1]).

Démonstration. Tout d'abord, notons que (*) exclut le cas $A = 0$ et que l'équivalence de chaque $\|\cdot\|_p$ à la norme $\|\cdot\|$ est un fait bien connu (voir [1], chap. 1, §4), et en effet on a

$$m|x|^p \leq |x|_p^p \leq M|x|^p,$$

$$\text{où } m = \frac{1}{\|A\|} \quad \text{et } M = \frac{N^p}{p\nu}.$$

Etant donné que

$$|e^{tA}x|_p^p = \int_0^\infty |e^{(s+t)A}x|_p^p ds = \int_t^\infty |e^{\tau A}x|_p^p d\tau,$$

on a

$$\frac{d}{dt}|e^{tA}x|_p^p = -|e^{tA}x|_p^p \leq \left(-\frac{1}{M}\right)|e^{tA}x|_p^p.$$

La fonction $f(t) = |e^{tA}x|_p^p$ satisfait donc $f'(t) \leq \left(-\frac{1}{M}\right)f(t)$ pour $t > 0$, ce

qui entraîne $f(t) \leq f(0)e^{-t/M}$, c'est-à-dire:

$$|e^{tA}x|_p^p \leq |x|_p^p e^{-\frac{t}{M}} \text{ pour } t \geq 0.$$

L'opérateur A satisfait donc, par rapport à la norme $\|\cdot\|_p$ de $\mathcal{L}(X)$, l'inégalité

$$\|e^{tA}\|_p \leq e^{-\frac{t}{pM}} \text{ pour } t \geq 0,$$

d'où, compte tenu de 2.3:

$$\varphi_p(A) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{t}{pM}} - 1}{t} = -\frac{1}{pM} = -\frac{\nu}{N^p} < 0.$$

Théorème. Soit $(X, |\cdot|)$ un espace de Banach et A un opérateur donné appartenant à $\mathcal{L}(X)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout p , $1 \leq p < \infty$, il existe une norme $|\cdot|_{\varepsilon, p}$ (qui dépend de A), équivalente à $|\cdot|$, telle que

$$\varphi_{\varepsilon, p}(A) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Démonstration. Posons $B = A - [\mu(A) + \varepsilon]I$. D'après 2.1, on a $\mu(B) = -\varepsilon < 0$ et par conséquent, grâce à 1.3, il existe des constantes strictement positives N et ν telles que

$$\|e^{tB}\| \leq N e^{-\nu t} \text{ pour } t \geq 0.$$

D'après le Lemme, la norme

$$|x|_{\varepsilon, p} = \left\{ \int_0^\infty |e^{tB}x|^p dt \right\}^{1/p}$$

est équivalente à $|\cdot|$, et $\varphi_{\varepsilon, p}(B) < 0$. D'où, grâce à 2.1

$$\varphi_{\varepsilon, p}(A) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Remarque 3. Prenant B comme dans la démonstration du théorème, la norme

$$|x|_\varepsilon = \sup_{s \geq 0} |e^{sB}x| \quad (x \in X)$$

satisfait évidemment

$$|x| \leq |x|_\varepsilon \leq N|x| \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Etant donné que

$$|e^{tB}x|_{\varepsilon} = \sup_{\tau \geq t} |e^{\tau B}x| \leq |x|_{\varepsilon},$$

on a

$$\|e^{tB}\|_{\varepsilon} \leq 1 \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

et par conséquent, grâce à 2.1 et 2.3 :

$$\varphi_{\varepsilon}(A) - \mu(A) - \varepsilon = \varphi_{\varepsilon}(B) \leq 0.$$

D'où

$$\varphi_{\varepsilon}(A) \leq \mu(A) + \varepsilon.$$

D'autre part remarquons que si $N = 1$ alors on a dans ce cas $|\cdot|_{\varepsilon} = |\cdot|$ et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |x|_{\varepsilon, p} = |x| \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Cette relation découle des inégalités

$$\frac{1}{\|A\|^{1/p}} |x| \leq |x|_p \leq \frac{1}{(p\nu)^{1/p}} |x|$$

et d'un passage à la limite.

Du Théorème et du Corollaire de la Proposition 1 découle immédiatement le

Corollaire. Soit $(X, |\cdot|)$ un espace de Banach et A un opérateur donné appartenant à $\mathcal{L}(X)$. Alors $\mu(A)$ est égale à la borne inférieure des $\{\varphi_0(A)\}$, lorsque $|\cdot|_0$ parcourt la famille des normes équivalentes à $|\cdot|$.

Remarque 4. L'analogue du Corollaire pour le rayon spectral d'un opérateur A donné, appartenant à $\mathcal{L}(X)$, peut être formulé ainsi: Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout p , $1 \leq p < \infty$, il existe une norme $|\cdot|_{\varepsilon, p}$ (qui dépend de A), équivalente à $|\cdot|$, telle que

$$\|A\|_{\varepsilon, p} \leq r(A) + \varepsilon.$$

En effet, procédant comme dans [5] (où seulement le cas $p = 1$ est traité), il suffit de prendre

$$|x|_{\varepsilon, p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |B^n x|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

avec $B = \frac{A}{r(A)+\epsilon}$, et de vérifier que la norme ainsi définie (la convergence de la série résulte de $r(B) < 1$) est équivalente à $\|\cdot\|$ (ce qui est facile) et satisfait $\|B\|_{\epsilon,p} < 1$, c'est-à-dire $\|A\|_{\epsilon,p} < r(A) + \epsilon$. Remarquons que si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert, la norme $\|\cdot\|_{\epsilon,2}$ provient du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_{\epsilon,2} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle B^n x, B^n y \rangle.$$

Remarquons aussi que $r(B) < 1$ entraîne l'existence d'un entier $n_0 > 0$ tel que

$$\|B^k\| < 1 \quad \text{pour tout } k > n_0,$$

et si l'on pose pour $k > n_0$

$$|x|_k = |x| + |Bx| + \dots + |B^{k-1}x| \quad (x \in X)$$

on vérifie facilement que chaque $|\cdot|_k$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|$ et

$$\|B\|_k = \sup_{|x|_k=1} |Bx|_k < 1.$$

*Département de Mathématiques
et de Statistique*

*Université de Montréal
C.P. 6128
Montréal, Qué.
Canada*

Manuscrit reçu le 9 décembre 1976

Revisé le 15 juin 1977.

BIBLIOGRAPHIE

1. Daleckiĭ, Ju. L., Krein, M.G.: Stability of solutions of differential equations in Banach space. Translation of Math. Mon., Vol. 43. Providence: American Math. Society: 1974.
2. Datko R.: Extending a theorem of A.M. Liapunov to Hilbert space. J. Math. Anal. Appl., 32, 610-616 (1970).
3. Deutsch E.: On matrix norms and logarithmic norms. Numer. Math., 24, 49-51 (1975).
4. Halmos, P.: A Hilbert space problem book. Princeton: Van Nostrand: 1967.
5. Holmes, R.B.: A formula for the spectral radius of an operator. Amer. Math. Monthly 75, 163-166 (1965).
6. Lozinskiĭ, S.M.: Sur la théorie des matrices finies (Russe). Dokl. Akad. Nauk, SSSR, 163 (4), 809-811 (1965).
7. Nieto, J.I.: Gâteaux differentials in Banach algebras. Math. Z. 23, 23-34 (1974).
8. Pao, C.V.: Logarithmic derivatives of a square matrix. Linear Algebra and Appl., 6, 159-164 (1973).
9. Pao, C.V.: A further remark on the logarithmic derivatives of a square matrix. Linear Algebra and Appl., 7, 275-278 (1973).
10. Pao, C.V.: Semigroups and asymptotic stability of non linear differential equations. SIAM J. Math. Anal., 3, 371-378 (1972).
11. Pazy, A.: On the applicability of Liapunov's theorem in Hilbert space. SIAM J. Math. Anal., 3, (1972).
12. Ström, T.: On logarithmic norms. SIAM J. Numer. Anal., 12(5) 741-753 (1975).

