

SUR UNE ÉQUATION DIOPHANTINNE DE LJUNGGREN

Edward L. Cohen

On esquisse une nouvelle démonstration du fait que l'équation diophantienne $x^2 + 11 = 3^k$ (où $k \geq 1$) n'a qu'une solution (avec $x > 0$). La démonstration utilise certaines des idées de H. Hasse [1] citées dans le livre [2, pp. 205-206] de L.J. Mordell.

1. Les solutions de la fameuse équation diophantienne de Ramanujan-Ljunggren-Nagell

$$x^2 + 7 = 2^k \quad (1)$$

initialement posée comme problème par S. Ramanujan [cf. 3 et 4] furent pour la première fois déterminées par T. Nagell [cf. 5 et 6], qui la vit sous la forme énoncée par W. Ljunggren [7]. Depuis la démonstration initiale de Nagell montrant que les seules solutions sont celles données par Ramanujan [3], à savoir

$$(x,k) = (1,3), (3,4), (5,5), (11,7) \text{ et } (181,15)$$

plusieurs autres auteurs ont donné diverses démonstrations [cf. 8 pour une liste exhaustive].

2. L'équation diophantienne

$$x^2 + 11 = 3^k, \quad (2)$$

qui est très liée à celle du paragraphe 1, fut considérée par W. Ljunggren. Des démonstrations du fait que cette équation n'a que la seule solution $(x,k) = (4,3)$ sont données par Ljunggren et l'auteur [8], ainsi que dans [9]. Une autre démonstration est esquissée dans ce qui suit. Remarquons que des extensions des problèmes des paragraphes 1 et 2 sont étudiées dans les articles [10] à [12].

3. Solutions paires. Lorsque k est pair, $k = 2c$, (2) s'écrit $3^{2c} - x^2 = 11$; par conséquent $3^c \pm x = 11$, $3^c \mp x = 1$. Il ne peut donc pas y avoir de solutions

paires.

4. Solutions impaires. Nous pouvons désormais supposer que k est impair et écrire l'équation (2) sous la forme

$$3^y = x^2 + 11 = (x+\lambda)(x-\lambda) \quad (3)$$

où y est impair et $\lambda^2 = -11$. L'équation a ainsi été décomposée dans le corps $\mathbb{Q}(\lambda)$, dont les entiers sont de la forme $(u+v\lambda)/2$ avec $u \equiv v \pmod{2}$, et où la factorisation unique a lieu.

Puisque $3 = [(1+\lambda)/2][(1-\lambda)/2]$, nous avons $(x+\lambda) = \pm [(1\pm\lambda)/2]^y$; donc

$$[(1+\lambda)/2]^y - [(1-\lambda)/2]^y = \pm 2\lambda. \quad (4)$$

Ceci peut s'écrire

$$a^y - b^y = \pm 2\lambda = \pm 2(a-b). \quad (5)$$

Montrons que dans l'équation (5) l'éventualité du signe $+$ est impossible. Observons que $a^2 \equiv 1 \pmod{b}$. Alors $a^y = a \cdot (a^2)^{(y-1)/2} \equiv a \pmod{b}$; d'où $2(a-b) = a^y - b^y \equiv a - b \pmod{b}$, c'est-à-dire $a \equiv 0 \pmod{b}$, ce qui fournit une contradiction.

Utilisant le développement binomial dans l'équation (4), nous obtenons

$$-2^{y+1} = 2\left[\binom{y}{1} - \binom{y}{3} \cdot 11 + \binom{y}{5} \cdot 11^2 - \dots \pm \binom{y}{y} \cdot 11^{(y-1)/2}\right], \quad (6)$$

de sorte que $y \equiv -2^y \pmod{11}$. Cette dernière équation a les solutions impaires $y \equiv 3, 31, 37, 45, 49 \pmod{110}$. Il suffit alors de montrer que:

(A) les éventualités $y \equiv 31, 37, 45, 49 \pmod{110}$ sont impossibles;

(B) il ne peut exister deux solutions y, z telles que $y-z \equiv 0 \pmod{110}$ [ce qui impliquera bien que $y = 3$ est l'unique solution].

5. Pour prouver (A), observons que $a^{11} \equiv -93 \pmod{253}$. Par conséquent $a^{11s} \equiv \pm 1, \pm 93, \pm 47, \pm 70, \pm 68 \pmod{253}$. Nous avons alors les quatre relations suivantes:

$$2a^{11s+9} = C_s + \lambda D_s, \quad \text{où } D_s \equiv \pm 74, \pm 51, \pm 64, \pm 120, \pm 28 \pmod{253}; \quad (7a)$$

$$2a^{11s+4} = C_s + \lambda D_s, \quad \text{où } D_s \equiv \pm 5, \pm 41, \pm 18, \pm 97, \pm 87 \pmod{253}; \quad (7b)$$

$$2a^{11s+1} = C_s + \lambda D_s, \quad \text{où } D_s \equiv \pm 1, \pm 93, \pm 47, \pm 70, \pm 68 \pmod{253}; \quad (7c)$$

$$2a^{11s+5} = C_s + \lambda D_s, \quad \text{où } D_s \equiv \pm 1, \pm 93, \pm 47, \pm 70, \pm 68 \pmod{253}; \quad (7d)$$

qui éliminent, respectivement, les possibilités $y \equiv 31, 37, 45, 49 \pmod{110}$, ce qui prouve que le coefficient $D_5/2$ de λ dans l'expression de a^y donnée par les relations (7a) à (7d) ne peut valoir ± 1 .

6. Pour prouver (B), désignons par 11^r la plus haute puissance de 11 qui divise $z-y$. Alors

$$a^z = a^y a^{z-y} = a^y \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{z-y} (1+\lambda)^{z-y}; \quad (8)$$

et, utilisant le développement binomial dans (8), nous obtenons

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{z-y} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)^{(z-y)/10} \equiv 1 \pmod{11^{r+1}}. \quad (9)$$

Nous avons

$$(1+\lambda)^{z-y} \equiv 1 + (z-y)\lambda \pmod{11^{r+1}} \quad (10)$$

[ceci s'obtient en utilisant le développement binomial et en élevant à la puissance $(z-y)/11^r$]. Puisque, d'autre part,

$$2^y a^y = 1 + y\lambda + 11W, \quad (11)$$

nous déduisons des relations (8) à (11) que

$$a^z \equiv a^y + \frac{(z-y)\lambda}{2^y} \pmod{11^{r+1}}. \quad (12)$$

De même

$$b^z \equiv b^y - \frac{(z-y)\lambda}{2^y} \pmod{11^{r+1}}. \quad (13)$$

En soustrayant (13) de (12), et tenant compte du fait que $a^y - b^y = a^z - b^z = -2\lambda$, nous avons $2^{(1-y)}(z-y)\lambda \equiv 0 \pmod{11^{r+1}}$. Ceci implique que $z-y \equiv 0 \pmod{11^{r+1}}$, puisque z et y sont tous deux rationnels, ce qui contredit la maximalité de r . Le résultat est ainsi démontré.

REFERENCES

1. H. HASSE, Über eine diophantische Gleichung von Ramanujan-Nagell und ihre Verallgemeinerung, Nagoya Math. J. 27, 77-102 (1966).
2. L.J. MORDELL, Diophantine equations, Academic Press, London and New York, 1969.
3. S. RAMANUJAN, J. Indian Math. Soc. 5, 120 (1913).
4. S. RAMANUJAN, Collected Papers, Cambridge University Press, 327 (1927).
5. T. NAGELL, Norsk Matematisk Tidsskrift 30, 62-64 (1948).
6. T. NAGELL, The diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$, Arkiv för Matematik 4, 185-187 (1961).
7. W. LJUNGGREN, Norsk Matematisk Tidsskrift 25, 29 (1943).

8. E.L. COHEN, Sur certaines équations diophantiennes quadratiques, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A274, 139-140 (1972).
9. R. ALTER et K.K. KUBOTA, The diophantine equation $x^2 + 11 = 3^n$ and a related sequence, J. Number Theory 7, 5-10 (1975).
10. E.L. COHEN, Sur l'équation diophantienne $x^2 + 11 = 3^k$, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A275, 5-7 (1972).
11. E.L. COHEN, On diophantine equations of the form $x^2 + D = p^k$, L'Enseignement Math. (2) 20, 235-241 (1974).
12. R. ALTER et K.K. KUBOTA, The diophantine equation $x^2 + D = p^n$, Pacific J. Math. 46, 11-16 (1973).

Département de mathématiques
Université d'Ottawa
Ottawa, Ontario K1N 6N5

Manuscrit reçu le 11 août 1976