

SOUS-ALGÈBRES DE LIE DE L'ALGÈBRE DE SCHRODINGER

G. Burdet[†], J. Patera, M. Perrin[†] et P. Winternitz

I. INTRODUCTION

Il y a quelques années on a essayé d'inclure les transformations d'échelle en phénoménologie des interactions fortes, ou du moins d'évaluer l'influence des termes responsables de la brisure de symétrie d'échelle dans les modèles [1]. Comme il est apparu que les modèles qui possèdent l'invariance d'échelle possèdent aussi en général l'invariance conforme, de nombreuses tentatives ont été faites pour construire des modèles d'interactions fortes possédant à priori cette invariance [2]. On s'est alors demandé quel était l'impact de ces nouvelles transformations par rapport à la cinématique utilisée. C'est avec cette idée d'associer aux transformations Galiléennes des transformations conformes et d'échelle qui laissent aussi l'équation de Schrödinger libre invariante, que, dans le cadre d'une théorie "non-relativiste", a été introduit le groupe désigné maintenant sous le nom de groupe de Schrödinger.

Ce groupe de transformations d'espace-temps contient en plus des transformations Galiléennes deux transformations supplémentaires qui correspondent l'une à une dilatation agissant différemment sur l'espace et sur le temps et l'autre à une transformation homographique qui agit sur l'espace comme une dilatation dépendant du temps.

Ainsi introduit [3] le groupe de Schrödinger a été utilisé dans le cadre de la théorie quantique des champs Galiléenne comme groupe de symétrie des Lagrangiens dans le cas où on impose certaines contraintes sur l'énergie interne nue. Il permet de redéfinir la densité d'énergie de façon telle que la loi de conservation de celle-ci prenne une forme simple.

Ce groupe a ensuite été utilisé [4] pour donner une description des particules élémentaires non relativistes constituées d'éléments non spécifiés en interaction

[†] Membres du Centre National de la Recherche Scientifique (France)

et conduisant à un spectre discret. La notion d'énergie interne utilisée dans ce travail, de même que le mouvement oscillatoire dépendant du temps attribué au centre de masse des particules libres ont déjà été commentés dans la référence [5]. Là, il a été montré que certaines représentations du groupe de Schrödinger peuvent décrire un système libre de N particules (de masses différentes) en interaction pourvu que les potentiels d'interaction mutuelle satisfassent certaines contraintes; les formes permises d'interaction à deux, trois et quatre corps ont été exhibées explicitement. Dans le même temps [6] le groupe de Schrödinger a été retrouvé comme étant le plus grand groupe de transformations d'espace-temps qui laisse invariante l'équation de Schrödinger libre si on limite la loi de cotransformation des solutions à la multiplication par une fonction des variables d'espace-temps. Puis il a été montré que les représentations du groupe de Schrödinger peuvent aussi décrire des systèmes de particules en interaction placés dans des champs extérieurs dérivant de potentiels harmoniques, antiharmoniques ou linéaires pourvu que les potentiels d'interaction mutuelle vérifient certaines conditions [7,8].

Finalement une caractérisation des sous-algèbres de dimension un non-conjuguées de l'algèbre de Schrödinger dans trois dimensions d'espace a été donnée [9]. Celle-ci fournit une classification en classes de conjugaison de tous les Hamiltoniens admettant cette algèbre comme algèbre d'invariance dépendant explicitement du temps en représentation de Schrödinger.

On doit aussi mentionner que toutes les représentations projectives unitaires irréductibles du groupe de Schrödinger dans trois dimensions d'espace ont été construites en utilisant les techniques d'induction [10].

Mais il n'y a pas qu'en mécanique quantique que le groupe de Schrödinger a un rôle à jouer. Déjà Sophus Lie avait trouvé l'algèbre de Schrödinger comme algèbre d'invariance (au même sens que dans [6] et [8]) de l'équation de la chaleur dans une dimension d'espace [11]. Récemment il a été montré qu'elle est aussi algèbre d'invariance de l'équation de Navier-Stokes dans le cas où on impose une loi de transformation linéaire homogène de la pression [12]. D'autre part, à cause de son inclusion en tant que sous-groupe dans l'extension centrale du groupe symplectique inhomogène, le groupe de Schrödinger laisse invariante l'équation d'Hamilton-Jacobi pour tous les Hamiltoniens linéaires et quadratiques [13].

Le but du présent article est de donner une classification en classes de conjugaison de toutes les sous-algèbres de Lie non conjuguées par un automorphisme intérieur, de l'algèbre de Lie du groupe de Schrödinger dans deux dimensions d'espace et de l'algèbre de Lie de son extension centrale par un groupe à un paramètre interprété comme la masse.

Une telle classification a déjà été réalisée pour le groupe de Schrödinger, étendu, dans une dimension d'espace Sch_1 [14]. En plus, dans la référence [14],

pour chaque classe de conjugaison ont été construites les fonctions F brisant l'invariance sous Sch_1 mais telles que l'équation

$$(i\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2)\psi(x,t) = F(x,t,\psi,\psi^*)$$

reste invariante sous la classe considérée. Il est prévu de réaliser la même étude avec Sch_2 .

Un autre intérêt d'effectuer cette classification provient du fait que l'algèbre sch_2 est contenue en tant que sous-algèbre dans l'algèbre conforme isomorphe à $so(4,2)$ [15]. Bien que cette inclusion, qui en quelque sorte constitue un lien entre physique non-relativiste et relativiste, puisse certainement être d'un grand intérêt pour la physique des hautes énergies on n'en trouve jusqu'ici que peu de traces dans la littérature [16,17]. Notons par exemple que cette inclusion offre un support pour introduire des interactions non-relativistes entre les constituants dans les modèles de hadrons ultra-relativistes composés de particules sans masse (modèle des partons [18]).

Sous-jacente dans [16] cette inclusion a été utilisée explicitement dans [17] pour construire un opérateur position pour particules de masse nulle. Nous ne voulons pas nous attarder plus longuement ici sur cet aspect du groupe de Schrödinger mais signalons qu'est en cours de rédaction un travail centré sur la sous-algèbre maximale de l'algèbre conforme qui contient sch_2 et une dilatation et que nous appelons algèbre optique $opt(3,1)$ car c'est l'algèbre de Lie du stabilisateur dans le groupe conforme d'un sous-espace du genre lumière de l'espace de Minkowski [19].

II. LE GROUPE DE SCHRÖDINGER ET SON ACTION SUR L'ESPACE-TEMPS

Le groupe de Schrödinger Sch_n est un groupe local de transformations de l'espace-temps $E_n \times \mathbb{R}$, dépendant de $3 + 2n + \frac{n}{2}(n-1)$ paramètres. Il en existe une représentation fidèle par des matrices carrées $(n+2) \times (n+2)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} R & T \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

où R est une matrice $n \times n$ de $So(n)$, T est une matrice rectangulaire à n lignes et 2 colonnes qu'on écrira $T = (\underline{v}, \underline{a})$ où $\underline{v}$ et $\underline{a}$ sont 2 vecteurs de $\mathbb{R}^n$, S est une matrice 2×2 de $Sl(2, \mathbb{R})$ (on posera $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$).

On en déduit l'action suivante sur $E_n \times \mathbb{R}$

$$\underline{x} \rightarrow \frac{R\underline{x} + \underline{v}t + \underline{a}}{\gamma t + \delta} \quad t \rightarrow \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$$

qui fait clairement ressortir la présence du groupe de Galilée en tant que sous-

groupe ainsi que le caractère local du groupe puisque les transformations ne sont pas définies partout, en particulier sur l'hyperplan $t = -\frac{\delta}{\gamma}$.

Différentes décompositions en produits semi-directs du groupe de Schrödinger peuvent être données. Nous les avons rassemblées sur la figure 1.

En plus de n'être qu'un groupe local, le groupe de Schrödinger soulève aussi des problèmes en ce qui concerne la causalité Newtonienne; en effet contrairement à ce qui se passe avec les transformations de Galilée, les transformations du groupe de Schrödinger ne conservent pas l'intervalle de temps entre deux événements (et en particulier pas son signe) puisque

$$g: t_2 - t_1 \rightarrow \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \frac{t_2 - t_1}{(\gamma t_1 + \delta)(\gamma t_2 + \delta)}.$$

Quant à la distance spatiale entre deux événements simultanés elle est transformée selon:

$$g: |x_2 - x_1|_{t_2=t_1=t} \rightarrow |\bar{x}_2 - \bar{x}_1| = \frac{|x_2 - x_1|}{\gamma t + \delta}.$$

L'utilisation du groupe de Schrödinger en tant que groupe de transformations d'espace-temps implique donc que soit développé un concept local de causalité comme c'est le cas pour l'utilisation du groupe conforme dans le cas relativiste.

Par contre étant un sous-groupe du groupe symplectique inhomogène, le groupe de Schrödinger agit en tant que groupe d'automorphismes symplectiques de l'espace de phase $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Les représentations utilisables en mécanique quantique sont donc celles qui sont obtenues par réduction de la représentation métaplectique de l'extension centrale du groupe symplectique inhomogène, i.e. que ce sont des représentations projectives unitaires du double recouvrement [10,13]:

$$(T_V \otimes T_A) \square (SO(n) \ltimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})).$$

III. LES ALGÈBRES DE LIE sch_2 ET $\widetilde{\text{sch}}_2$

L'algèbre de Lie¹ du groupe de Schrödinger s'écrit sous forme de la somme semi-directe

$$\text{sch}_n = (\mathfrak{t}_n \ltimes \mathfrak{t}_n^*) \square (\mathfrak{so}(n) \ltimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) \quad (1)$$

qui reflète sa décomposition de Levi-Malcev.

Pour le cas $n=2$ une base naturelle est donnée par: K_j et P_j , $j = 1, 2$ les générateurs des algèbres abéliennes $\mathfrak{t}_2$ et $\mathfrak{t}_2^*$, J le générateur de $\mathfrak{so}(2)$ et T, C, D les générateurs de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ qui satisfont entre eux les relations de commutation suivantes:

¹ Nous notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G .

$$[T, D] = 2T, \quad [T, C] = D, \quad [C, D] = -2C. \quad (2)$$

La somme semi-directe correspond aux relations de commutation non-nulles suivantes:

$$\begin{aligned} [J, K_1] &= K_2, & [J, P_1] &= P_2, \\ [J, K_2] &= -K_1, & [J, P_2] &= -P_1, \\ [T, K_j] &= -P_j, & [C, P_j] &= K_j, \\ [D, K_j] &= K_j, & [D, P_j] &= -P_j, \end{aligned} \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

L'algèbre $\widetilde{\text{sch}}_n$ est une extension centrale à un élément de sch_n qui est obtenue en remplaçant l'idéal abélien $t_n \oplus t_n^*$ par l'algèbre de Heisenberg h_n de centre M et dont les générateurs satisfont

$$[K_j, P_k] = \delta_{jk} M. \quad (4)$$

Nous donnons ci-dessous l'expression des générateurs dans la représentation métaplectique de Sch_2 :

$$\begin{aligned} \text{so}(2):J &= i(p_j \partial_k - p_k \partial_j) + \Sigma \\ h_n: \begin{cases} K_j = im\delta_j \\ P_j = p_j \\ M = m \end{cases} & \quad \text{sl}(2, \mathbb{R}): \begin{cases} T = \frac{p^2}{2m} + g_+ \\ C = \frac{m}{2}\Delta + g_- \\ D = i(p^j \partial_j + \frac{1}{2}) + g_0 \end{cases} \end{aligned}$$

où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial q_j}$, caractérise une représentation unitaire de $\text{so}(2)$ et (g_+, g_-, g_0) est une base de représentation unitaire de $\text{sl}(2, \mathbb{R})$.

IV. SOUS-ALGÈBRES DE L'ALGÈBRE DE SCHRÖDINGER

La classification de toutes les sous-algèbres de sch_2 que nous allons donner ci-après a été effectuée en utilisant la méthode de classification exposée dans la référence [20].

Comme on l'a déjà rappelé plus haut l'algèbre sch_2 est une somme semi-directe avec l'idéal abélien et on écrira la décomposition (1) de sch_2 sous la forme $n \ltimes f$ où n est un idéal abélien de dimension 4 et $f \cong \text{so}(2) \oplus \text{sl}(2, \mathbb{R})$.

La classification de $n \ltimes f$ se fait en trois étapes:

1. Classer les sous-algèbres de f en classes de conjugaison sous Sch_2 , ce qui ici revient à classer f sous le groupe F engendré par f . Les sous-algèbres de $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ sont bien connues et f étant une somme directe on utilise la méthode de Goursat [21]. Pour chaque classe de conjugaison on choisit un représentant qu'on désigne par f_i ($i=0, 1, \dots, p$) avec $f_0 \cong f$ et $f_p \cong 0$. Il faut noter que le représentant de chaque classe est choisi de façon à avoir une liste "norma-

lisée" c'est-à-dire une liste dans laquelle le normalisateur de toute sous-algèbre dans sch_2 pour le représentant choisi figure déjà dans la classification. On rappelle que le normalisateur dans a d'une sous-algèbre de Lie $b \subset a$ est défini par:

$$\text{nor}_a(b) = \{X \in a \mid [X, B] \subset b, \forall B \in b\}.$$

La liste des sous-algèbres de $\text{so}(2) \oplus \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, leur numérotation et les représentants choisis sont donnés dans la figure 2. De plus $f_{16} = \{0\}$.

2. Chercher, pour chaque sous-algèbre f_i , tous les sous-espaces invariants correspondants de n , c'est-à-dire tous les sous-espaces de n , étiquetés $n_{i\alpha}$, qui sont tels que:

$$[f_i, n_{i\alpha}] \subseteq n_{i\alpha}.$$

Classer à une conjugaison de $\text{Nor}_{\text{sch}_2} f_i$ près tous ces $n_{i\alpha}$ et pour chaque classe de conjugaison choisir un représentant de façon à avoir une liste normalisée.

Comme l'algèbre n est abélienne tous les $n_{i\alpha}$ sont automatiquement des sous-algèbres de Lie abéliennes.

Il ne reste plus alors qu'à former les sommes semi-directes $n_{i\alpha} \ltimes f_i$ pour obtenir toutes les sous-algèbres " f_i -semi-directes de sch_2 ".

3. Chercher les sous-algèbres qui ne sont pas " f_i -semi-directes". Dans le cas d'un idéal abélien ceci revient, pour chaque sous-espace invariant $n_{i\alpha}$, à chercher s'il n'existe pas de sous-algèbre $n_{i\alpha} \ltimes (F_k + \sum_{\ell} c_{k\ell} N_{\ell})$ où $\{F_k\}$ est une base de f_i et $N_{\ell} \in n$, $N_{\ell} \notin n_{i\alpha}$, dans laquelle les coefficients $c_{k\ell}$ ne peuvent pas être simultanément ramenés à zéro par des conjugaisons de $n \ltimes \text{Nor}_f(f_i)$.

Pour l'algèbre sch_2 seul $f_{12} \sim \{T\}$ donne naissance à de telles algèbres.

La Table 1 donne la liste "normalisée" de toutes les sous-algèbres de sch_2 . Cette liste est aussi ordonnée, dans le sens que pour chaque dimension figurent d'abord les sous-algèbres qui peuvent se mettre sous la forme de somme directe.

Chaque classe est repérée par la lettre S suivie de 2 nombres: le premier indique la dimension des sous-algèbres appartenant à cette classe tandis que le second n'est qu'un indice servant à repérer chaque classe parmi toutes celles de la même dimension. Comme nous l'avons dit plus haut cette numérotation a été faite en commençant par les algèbres abéliennes. Dans la seconde colonne jusqu'en dimension 5 et pour les sommes directes de dimension supérieure on identifie la classe d'isomorphie avec la nomenclature donnée dans la référence [22]. Les générateurs du représentant choisi (entre autre pour avoir une liste "normalisée") et le normalisateur de celui-ci sont donnés respectivement dans les troisième et quatrième colonnes. Dans la cinquième colonne apparaissent les invariants définis dans la référence [22] qui généralisent la notion habituelle d'opérateur de Casimir appartenant au corps enveloppant.

V. SOUS-ALGÈBRES DE L'EXTENSION CENTRALE $\widetilde{\text{sch}}_2$

Dans ce cas la classification a été faite de deux façons différentes:

(i) En appliquant la méthode générale de classification mais cette fois l'idéal résoluble n'est plus abélien puisque c'est l'algèbre de Heisenberg dans 2 dimensions d'espace h_2 (nilpotente).

(ii) En utilisant la classification précédente de l'algèbre non étendue. Cette méthode a été utilisée pour déduire des sous-algèbres de l'algèbre de Galilée dans trois dimensions d'espace, les sous-algèbres de son extension centrale [23].

Rappelons brièvement cette méthode qui est basée sur le fait que l'extension centrale correspond à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{\text{sch}}_2 \xrightarrow{\theta} \text{sch}_2 \rightarrow 0$$

où on note $\mathbb{R}$ la sous-algèbre de dimension un engendrée par le générateur de l'extension noté M .

Alors à toute sous-algèbre $a \subset \text{sch}_2$ peuvent être associées:

$$(1) \quad \widetilde{a} = \theta^{-1}(a), \quad M \in \widetilde{a} \subset \widetilde{\text{sch}}_2,$$

$$(2) \quad \text{si } [a, a]_{\widetilde{\text{sch}}} \subset a, \text{ alors}$$

$$(a) \quad a \text{ elle-même est sous-algèbre de } \text{sch}_2,$$

$$(b) \quad \widetilde{b} \subset \widetilde{a}, \quad M \notin \widetilde{b}, \quad \dim \widetilde{b} = \dim \widetilde{a} - 1, \quad \widetilde{b} \text{ non-conjuguée de } a.$$

La Table 2 donne les sous-algèbres de sch_2 . Le repérage des sous-algèbres par $\bar{S}_{ij}$ est fait de la même façon que pour les sous-algèbres de sch_2 , et comme pour ces dernières on donne leur identification dans la nomenclature de [22], leurs générateurs, leurs normalisateurs et les opérateurs invariants correspondants.

VI. CONCLUSION

La tâche que nous nous étions assignée, à savoir la classification des sous-groupes de Lie de l'algèbre de Schrödinger sch_2 et de son extension centrale $\widetilde{\text{sch}}_2$, a donc été accomplie. Les tables 1 et 2 donnent une liste normalisée de représentants de toutes les classes de conjugaison ainsi que des normalisateurs et des invariants correspondants.

On s'est ainsi donné un outil de travail pour diverses applications. En particulier nous avons l'intention d'étudier comment évoluent les contraintes imposées à un terme d'interaction ou de "self- interaction" $F(x, y, t, \psi, \psi^*)$ dans "l'équation de Schrödinger"

$$(i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2))\psi(x, y, t) = F(x, y, t, \psi, \psi^*)$$

suivant la brisure de $\widetilde{\text{Sch}}_2$ demandée, c'est-à-dire suivant la sous-algèbre sous laquelle l'invariance est exigée.

Signalons pour terminer que la classification ci-dessus va être insérée dans celle du groupe optique $\text{Opt}(3,1)$.

REMERCIEMENTS

Deux d'entre nous (G.B. et M.P.) sont heureux de remercier les membres du Centre de Recherches Mathématiques et du Département de Mathématiques de l'Université de Montréal pour leur accueil chaleureux. Cette collaboration a pu être établie grâce à une allocation obtenue dans le cadre des Echanges Culturels France-Québec.

REFERENCES

1. CARRUTHERS, P., Broken scale invariance in particle physics, *Phys. Rev. C* 1, 3-29 (1971).
2. FULTON, T., ROHRLICH, F. et WITTEN, L., Conformal invariance in physics, *Rev. Mod. Phys.* 34, 442-457 (1962).
KASTRUP, H.A., Zur physikalischen Deutung und darstellungstheoretischen Analyse der konformen Transformationen von Raum und Zeit, *Ann. d. Physik* 7, 388-428 (1962).
- FERRARA, S., GATTO, R. et GRILLO, A.F., Conformal algebra in space-time, *Springer Tracts in Modern Physics V.* 67 (1973).
3. HAGEN, C.R., Scale and conformal transformations in Galilean-covariant field theory, *Phys. Rev. D* 5, 377-388 (1972).
4. ROMAN, P., AGHASSI, J.J., SANTILLI, R.M. et HUDELSTON, P.L., Nonrelativistic composite elementary particles and the conformal Galilei groups, *Nuovo Cimento*, 12-A, 185-204 (1972).
5. BURDET, G. et PERRIN, M., Many-body realization of the Schrödinger algebra, *Lettere al Nuovo Cimento* 4, 651-655 (1972).
6. NIEDERER, U., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta* 45, 802-810 (1972).
7. BURDET, G., PERRIN, M. et SORBA, P., Invariance algebras and interactions in non relativistic quantum mechanics, *Lettere al Nuovo Cimento* 7, 855-859 (1973).
8. NIEDERER, U., The M.K.I. group of the harmonic oscillator, *Helv. Phys. Acta* 46, 191-200 (1973).
NIEDERER, U., The M.K.I. group of Schrödinger equations with arbitrary potentials, *Helv. Phys. Acta* 47, 167-172 (1974).
BOYER, C., The M.K.I. group for an arbitrary potential, *Helv. Phys. Acta* 47, 590-605 (1974).
9. BURDET, G. et PERRIN, M., The Hamiltonians of the Schrödinger algebra, *J. Math. Phys.* 16, 2172-2176 (1975).
10. PERROUD, M., Projective representations of the Schrödinger group, *Helv. Phys. Acta* 50, 233-252 (1977).
11. BLUMAN, G.W. et COLE, J.D., The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. and Mech.* 18, 1025-1042 (1969).
12. NIEDERER, U., Kinematical symmetries of the Navier-Stokes equation, *Proc. 5th Int. Colloq. on Group Theor. Meth. in Physics, Montréal 1976*, Academic Press, 1977.

13. BURDET,G., PERRIN,M. et PERROUD,M., Generating functions for the affine symplectic group, Preprint CRM-672, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal (1976). Comm. Math. Phys. (à paraître)
14. BOYER,C., SHARP,R.T. et WINTERNITZ,P., Symmetry breaking interactions for the time dependent Schrödinger equation, J.Math.Phys. 17, 1439-1451 (1976).
15. BURDET,G., PERRIN,M. et SORBA,P., About the nonrelativistic structure of the conformal algebra, Comm.Math.Phys. 34, 85-90 (1973).
16. DOMOKOS,G., Wave packet realization of lightlike states, Comm.Math.Phys. 26, 15-23 (1972).
17. PERRIN,M., Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII, ch.IV (1975).
PERRIN,M., Proceedings IVth International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Nimègue 1975, Springer 1976, Lecture Notes in Physics V. 50.
BURDET,G. et PERRIN,M., On the localizability of massless particles, Proc. 5th Int.Coll. on Group Theor.Meth. in Physics, Montréal 1976, Academic Press, 1977.
18. KOGUT,J. et SUSSKIND,L., The parton structure of elementary particles, Phys. Rep. C-8, No.2, 75-172 (1973).
19. BURDET,G., PATERA,J., PERRIN,M. et WINTERNITZ,P., The optical group and its subgroups, Preprint CRM-690, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal (1977).
20. PATERA,J., WINTERNITZ,P. et ZASSENHAUS,H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics.I. General Method and the Poincaré group, J. Math.Phys. 16, 1597-1614 (1975).
PATERA,J., WINTERNITZ,P. et ZASSENHAUS,H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, J.Math.Phys. 16, 1615-1624 (1975).
21. GOURSAT,E., Sur les substitutions orthogonales et les divisions de l'espace, Ann.Sci. Ecole Normale Sup. 6, 9-102 (1889).
DU VAL,P., Homographies, quaternions and rotations, Oxford, Clarendon Press, 1964.
22. PATERA,J., SHARP,R.T., WINTERNITZ,P. et ZASSENHAUS,H., Invariants of real low dimension Lie algebras, J.Math.Phys. 17, 986-994 (1976).
23. SORBA,P., The Galilei group and its connected subgroups, J.Math. Phys. 17, 941-953 (1976).

*Centre de Recherches Mathématiques
Université de Montréal*

et

*Département de Mathématiques
Université de Montréal*

Manuscrit reçu le 1er mars 1977

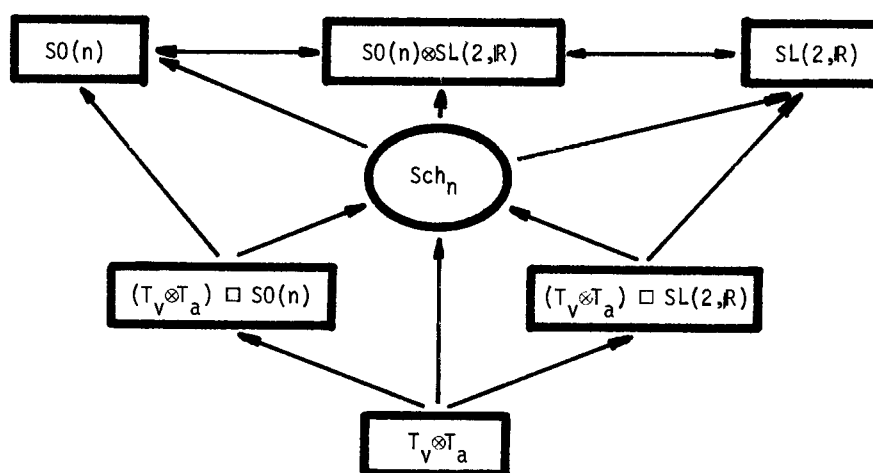


FIGURE 1

Décomposition en produits semi-directs du groupe de Schrödinger, T_a et T_v désignent les deux groupes Abéliens de dimension n correspondant respectivement aux translations d'espace et aux transformations Galiléennes pures.

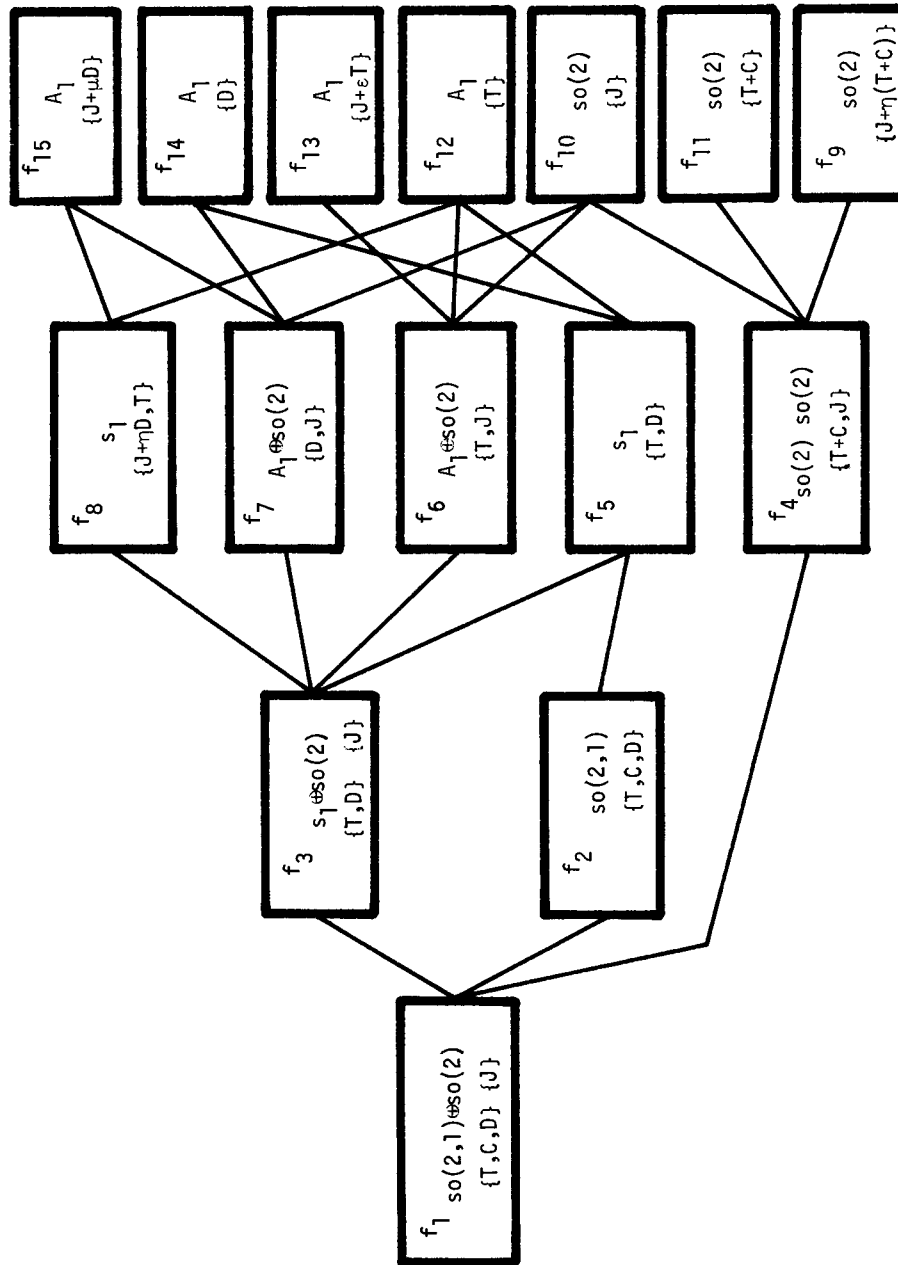


FIGURE 2

Sous-algèbres du facteur de Lévi de sch_2 ; $\eta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\mu > 0$.

TABLE 1

Sous-algèbres de sch_2 , classifiées par rapport aux automorphismes intérieurs de sch_2 . Chaque classe de conjugaison est représentée par une base appropriée de générateurs. Les générateurs situés à droite du point-virgule (;) sont ceux de l'idéal dérivé de l'algèbre. Les classes d'isomorphie sont dénotées comme dans la référence [22]; $\varepsilon = \pm 1$; les paramètres sans indication de domaine prennent toutes les valeurs réelles.

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$S_{8,1}$	sch_2	$J; C, D, T, K_1, K_2, P_1, P_2$	$S_{8,1}$	$(P_1^2 + P_2^2)C + (K_1^2 + K_2^2)T + (K_1P_1 + K_2P_2)D - (K_1P_2 - K_2P_1)J,$ $K_1P_2 - K_2P_1$
$S_{7,1}$		$D, J; T, K_1, K_2, P_1, P_2$	$S_{7,1}$	$K_1P_2 - K_2P_1$
$S_{7,2}$		$; C, D, T, K_1, K_2, P_1, P_2$	$S_{8,1}$	$K_1P_2 - K_2P_1$
$S_{6,1}$	Galilei	$J, T; K_1, K_2, P_1, P_2$	$S_{7,1}$	$K_1P_2 - K_2P_1, P_1^2 + P_2^2$
$S_{6,2}$		$D; T, K_1, K_2, P_1, P_2$	$S_{7,1}$	$K_1P_2 - K_2P_1, P_1/P_2$
$S_{6,3}$		$J + aD; T, K_1, K_2, P_1, P_2 \quad (a \neq 0)$	$S_{7,1}$	$K_1P_2 - K_2P_1, (P_1^2 + P_2^2)(P_1 + iP_2)^{ia}(P_1 - iP_2)^{-ia}$
$S_{6,4}$		$J, C + T; K_1, K_2, P_1, P_2$	$S_{6,4}$	$K_1P_2 - K_2P_1, K_1^2 + K_2^2 + P_1^2 + P_2^2$
$S_{6,5}$		$D, J; K_1, K_2, P_1, P_2$	$S_{6,5}$	$K_1P_2 - K_2P_1, K_1P_1 + K_2P_2$
$S_{5,1}$	$2A_1 \oplus A_{3,6}$	$(P_1 + \varepsilon K_2) \oplus (K_1 - \varepsilon P_2) \oplus (J + \varepsilon(C + T)); P_1 - \varepsilon K_2, K_1 + \varepsilon P_2$	$S_{6,4}$	$K_1P_2 - K_2P_1, P_1 + \varepsilon K_2, K_1 - \varepsilon P_2$
$S_{5,2}$	$A_{5,1}$	$T, K_1, K_2; P_1, P_2$	$S_{7,1}$	$K_1P_2 - K_2P_1, P_1, P_2$

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$S_{5,3}$	$A_{5,7}^{1,-1,-1}$	$D; K_1, K_2, P_1, P_2$	$S_{6,5}$	$K_1 P_2 - K_2 P_1, K_1 P_1, K_2 P_2$
$S_{5,4}$	$A_{5,17}^{S,p,q}$	$J+pD; K_1, K_2, P_1, P_2 \quad (s=1, q=-p, p>0)$	$S_{6,5}$	$K_1 P_2 - K_2 P_1, K_1 P_1 + K_2 P_2, (K_1^2 + K_2^2)(P_1^2 + P_2^2)$
$S_{5,5}$	$A_{5,17}^{S,p,q}$	$J; K_1, K_2, P_1, P_2 \quad (s=1, p=q=0)$	$S_{8,1}$	$K_1 P_2 - K_2 P_1, K_1^2 + K_2^2, P_1^2 + P_2^2$
$S_{5,6}$	$A_{5,17}^{S,p,q}$	$C+T; K_1, K_2, P_1, P_2 \quad (s=1, p=q=0)$	$S_{6,4}$	$K_1 P_2 - K_2 P_1, K_1^2 + P_1^2, K_2^2 + P_2^2$
$S_{5,7}$	$A_{5,17}^{S,p,q}$	$J+a(C+T); K_1, K_2, P_1, P_2 \quad (a \neq 0, \pm 1)$ $(p=q=0, s=\left \frac{a-1}{a+1}\right \text{ if } 0 < a, s=\left \frac{a+1}{a-1}\right \text{ if } a < 0)$	$S_{6,4}$	$K_1 P_2 - K_2 P_1, K_1^2 + K_2^2 + P_1^2 + P_2^2,$ $\left\{ \frac{K_1 - P_2 + iK_2 + iP_1}{K_1 - P_2 - iK_2 - iP_1} \right\}^{1+a} \times \left\{ \frac{K_1 + P_2 - iK_2 + iP_1}{K_1 + P_2 + iK_2 - iP_1} \right\}^{1-a}$
$S_{5,8}$	$A_{5,18}^0$	$J+\varepsilon T; K_1, K_2, P_1, P_2$	$S_{6,1}$	$K_1 P_2 - K_2 P_1, P_1^2 + P_2^2, \frac{P_1 + i\varepsilon P_2}{P_1 - i\varepsilon P_2} \exp i \left\{ \frac{K_1 P_1 + K_2 P_2}{P_1^2 + P_2^2} \right\}$
$S_{5,9}$	$A_{5,19}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$	$D; T, K_1, P_1, P_2$	$S_{5,9}$	P_1/P_2
$S_{5,10}$	$A_{5,35}^{0,2}$	$D; J, T, P_1, P_2$	$S_{5,10}$	$T/(P_1^2 + P_2^2)$

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$S_{5,11}$	$A_{5,40}$	$\{C, D, T, K_1, P_1\}$	$S_{5,11}$	$TK_1^2 + CP_1^2 + DK_1P_1$
$S_{4,1}$	$4A_1$	K_1, K_2, P_1, P_2	$S_{8,1}$	K_1, K_2, P_1, P_2
$S_{4,2}$	$A_1 \oplus A_{3,1}$	$(P_2) \oplus (T, K_1, P_1)$	$S_{6,2}$	P_1, P_2
$S_{4,3}$	$A_1 \oplus A_{3,1}$	$(P_1 - aP_2) \oplus (T + K_1, K_2 + aK_1, P_2 + aP_1)$	$S_{5,1}$	P_1, P_2
$S_{4,4}$	$A_1 \oplus A_{3,6}$	$(C + T - \varepsilon J) \oplus (C + T + \varepsilon J; K_1 + \varepsilon P_2, K_2 - \varepsilon P_1)$	$S_{4,4}$	$C + T - \varepsilon J, (K_1 + \varepsilon P_2)^2 + (K_2 - \varepsilon P_1)^2$
$S_{4,5}$	$A_1 \oplus A_{3,6}$	$(T) \oplus (J; P_1, P_2)$	$S_{5,10}$	$T, P_1^2 + P_2^2$
$S_{4,6}$	$A_1 \oplus A_{3,6}$	$(K_2 + \varepsilon P_1) \oplus (J + \varepsilon(C + T) + a(K_1 - \varepsilon P_2); K_1 + \varepsilon P_2, K_2 - \varepsilon P_1) \quad (a \geq 0)$	$S_{5,1}$	$K_2 + \varepsilon P_1, (K_1 + \varepsilon P_2)^2 + (K_2 - \varepsilon P_1)^2$
$S_{4,7}$	$A_1 \oplus A_{3,8}$	$(J) \oplus (\varepsilon C, D, T)$	$S_{4,7}$	$J, (C + T)^2 - (C - T)^2 - D^2$
$S_{4,8}$	$A_4^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}$ $A_{4,5}$	$D; T, P_1, P_2$	$S_{5,10}$	$P_1^2/T, P_2^2/T$
$S_{4,9}$	$A_4^1, -1$ $A_{4,5}$	$D; K_1, P_1, P_2$	$S_{4,9}$	K_1P_1, K_1P_2

Nom	Classe d'isomor- phie	Générateurs	Norma- lisateur	Invariants
$S_{4,10}$	$A_{4,6}^{2 a , a }$	$J+aD; T, P_1, P_2 \ (a \neq 0)$	$S_{5,10}$	$T/(P_1^2+P_2^2), (P_1^2+P_2^2) \left(\frac{P_1+iP_2}{P_1-iP_2} \right)^{ia}$
$S_{4,11}$	$A_{4,9}^{-\frac{1}{2}}$	$D; T, K_1, P_1$	$S_{4,11}$	aucun
$S_{4,12}$	$A_{4,12}$	$D, J; P_1, P_2$	$S_{4,12}$	aucun
$S_{3,1}$	$3A_1$	$J-\varepsilon(C+T), K_1+\varepsilon P_2, K_2-\varepsilon P_1$	$S_{4,4}$	$J-\varepsilon(C+T), K_1+\varepsilon P_2, K_2-\varepsilon P_1$
$S_{3,2}$	$3A_1$	T, P_1, P_2	$S_{7,1}$	T, P_1, P_2
$S_{3,3}$	$3A_1$	$T+K_1, P_1, P_2$	$S_{5,2}$	$T+K_1, P_1, P_2$
$S_{3,4}$	$3A_1$	K_1, P_1, P_2	$S_{6,2}$	K_1, P_1, P_2
$S_{3,5}$	$3A_1$	$K_1+\varepsilon P_2, K_2+\varepsilon P_1, K_2-\varepsilon P_1$	$S_{5,1}$	$K_1+\varepsilon P_2, K_2+\varepsilon P_1, K_2-\varepsilon P_1$
$S_{3,6}$	$A_1 \oplus A_2$	$(J) \oplus (D; T)$	$S_{3,6}$	J
$S_{3,7}$	$A_{3,1}$	$T, K_1; P_1$	$S_{5,9}$	P_1
$S_{3,8}$	$A_{3,1}$	$T, K_1+\varepsilon P_2; P_1$	$S_{4,2}$	P_1

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$S_{3,9}$	$A_{3,1}$	$T+K_1, K_2+aK_1+bP_1; P_2+aP_1$	$S_{4,3}$	P_2+aP_1
$S_{3,10}$	$A_{3,3}$	$D; P_1, P_2$	$S_{4,12}$	P_1/P_2
$S_{3,11}$	$A_{3,4}$	$D; K_1, P_2$	$S_{3,11}$	$K_1 P_2$
$S_{3,12}$	$A_{3,4}$	$D; K_1, P_1+aP_2$	$S_{3,12}$	$K_1(P_1+aP_2)$
$S_{3,13}$	$A_{3,5}$	$D; T, P_1$	$S_{3,13}$	P_1^2/T
$S_{3,14}$	$A_{3,6}$	$J+a(C+T); K_1+eP_2, K_2-eP_1 (a \neq -e)$	$S_{4,4}$	$(K_1+eP_2)^2+(K_2-eP_1)^2$
$S_{3,15}$	$A_{3,6}$	$J; P_1, P_2$	$S_{5,10}$	$P_1^2+P_2^2$
$S_{3,16}$	$A_{3,6}$	$C+T; K_1+aP_2, P_1-aK_2 (a < 1)$	$S_{3,16}$	$(K_1+aP_2)^2+(P_1-aK_2)^2$
$S_{3,17}$	$A_{3,6}$	$C+T; K_1+eP_2, K_2-eP_1$	$S_{4,4}$	$(K_1+eP_2)^2+(K_2-eP_1)^2$
$S_{3,18}$	$A_{3,6}$	$J+eT; P_1, P_2$	$S_{4,5}$	$P_1^2+P_2^2$
$S_{3,19}$	$A_{3,6}$	$J+e(C+T)+a(K_1-eP_2); K_1+eP_2, K_2-eP_1 (a>0)$	$S_{5,1}$	$(K_1+eP_2)^2+(K_2-eP_1)^2$
$S_{3,20}$	$A_{3,7}^a$	$J+aD; P_1, P_2 (a \neq 0)$	$S_{4,12}$	$(P_1^2+P_2^2)(P_1+iP_2)^{ia}(P_1-iP_2)^{-ia}$
$S_{3,21}$	$A_{3,8}$	$; C, D, T$	$S_{4,7}$	$(C+T)^2-D^2-(C-T)^2$

Nom	Classe d'isomor- phie	Générateurs	Norma- lisateur	Invariants
$S_{2,1}$	$2A_1$	$J, C+T$	$S_{2,1}$	$J, C+T$
$S_{2,2}$	$2A_1$	J, T	$S_{3,6}$	J, T
$S_{2,3}$	$2A_1$	J, D	$S_{2,3}$	J, D
$S_{2,4}$	$2A_1$	$J-\varepsilon(C+T)+a(K_2-\varepsilon P_1), K_1+\varepsilon P_2$	$S_{3,1}$	$J-\varepsilon(C+T)+a(K_2-\varepsilon P_1), K_1+\varepsilon P_2$
$S_{2,5}$	$2A_1$	T, P_1	$S_{5,9}$	T, P_1
$S_{2,6}$	$2A_1$	$T+K_1, P_2+aP_1$	$S_{4,3}$	$T+K_1, P_2+aP_1$
$S_{2,7}$	$2A_1$	$T+K_1, P_1$	$S_{4,2}$	$T+K_1, P_1$
$S_{2,8}$	$2A_1$	P_1, P_2	$S_{7,1}$	P_1, P_2
$S_{2,9}$	$2A_1$	K_1, P_2	$S_{5,3}$	K_1, P_2
$S_{2,10}$	$2A_1$	K_1, P_1	$S_{7,2}$	K_1, P_1
$S_{2,11}$	$2A_1$	K_1, P_1+aP_2 ($a>0$)	$S_{5,3}$	K_1, P_1+aP_2
$S_{2,12}$	$2A_1$	$K_1+\varepsilon P_2, K_2-\varepsilon P_1$	$S_{6,4}$	$K_1+\varepsilon P_2, K_2-\varepsilon P_1$
$S_{2,13}$	$2A_1$	K_1+aP_2, P_1-aK_2 ($0 < a < 1$)	$S_{5,6}$	K_1+aP_2, P_1-aK_2
$S_{2,14}$	$2A_1$	$P_1+\varepsilon K_2, P_2$	$S_{5,2}$	$P_1+\varepsilon K_2, P_2$
$S_{2,15}$	A_2	$D+aJ, T$	$S_{3,6}$	aucun

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$S_{2,16}$	A_2	D, P_1	$S_{2,16}$	aucun
$S_{1,1}$	A_1	$C+T+aJ \quad (a \neq \pm 1)$	$S_{2,1}$	$C+T+aJ$
$S_{1,2}$	A_1	J	$S_{4,7}$	J
$S_{1,3}$	A_1	T	$S_{5,10}$	T
$S_{1,4}$	A_1	$J+\varepsilon T$	$S_{2,2}$	$J+\varepsilon T$
$S_{1,5}$	A_1	$D+aJ \quad (a \geq 0)$	$S_{2,3}$	$D+aJ$
$S_{1,6}$	A_1	P_1	$S_{6,2}$	P_1
$S_{1,7}$	A_1	$K_2+\varepsilon P_1$	$S_{5,1}$	$K_2+\varepsilon P_1$
$S_{1,8}$	A_1	$T+K_1$	$S_{3,3}$	$T+K_1$
$S_{1,9}$	A_1	$J-\varepsilon(C+T)+a(K_1+\varepsilon P_2) \quad (a > 0)$	$S_{3,1}$	$J-\varepsilon(C+T)+a(K_1+\varepsilon P_2)$
$S_{1,10}$	A_1	$J-\varepsilon(C+T)$	$S_{4,4}$	$J-\varepsilon(C+T)$

TABLE 2

Sous-algèbres de $\widetilde{\text{sch}}_2$, classifiées par rapport aux automorphismes intérieurs de $\widetilde{\text{sch}}_2$. Chaque classe de conjugaison est représentée par une base appropriée de générateurs. Les générateurs situés à droite du point-virgule (;) sont ceux de l'idéal dérivé de l'algèbre. Les classes d'isomorphie sont dénotées comme dans la référence [22]; $\epsilon = \pm 1$; les paramètres sans indication de domaine prennent toutes les valeurs réelles

$$J = JM-K_1P_2+K_2P_1, \quad T = 2MT-P_1^2-P_2^2, \quad C = 2MC-K_1^2-K_2^2, \quad D = 2MD+K_1P_1+P_1K_1+K_2P_2+P_2K_2, \quad I^2 = 2TC+2CT-D^2.$$

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$\tilde{S}_{9,1}$	$\widetilde{\text{sch}}_2$	J; C, D, T, K_1, K_2, P_1, P_2, M	$\tilde{S}_{9,1}$	M, J, I^2
$\tilde{S}_{8,1}$		D, J; T, K_1, K_2, P_1, P_2, M	$\tilde{S}_{8,1}$	M, J
$\tilde{S}_{8,2}$		; C, D, T, K_1, K_2, P_1, P_2, M	$\tilde{S}_{9,1}$	M, I^2
$\tilde{S}_{7,1}$		J, T; K_1, K_2, P_1, P_2, M	$\tilde{S}_{8,1}$	M, J, T
$\tilde{S}_{7,2}$		D; T, K_1, K_2, P_1, P_2, M	$\tilde{S}_{8,1}$	M
$\tilde{S}_{7,3}$		J+aD; T, K_1, K_2, P_1, P_2, M (a $\neq 0$)	$\tilde{S}_{8,1}$	M
$\tilde{S}_{7,4}$		J, C+T; K_1, K_2, P_1, P_2, M	$\tilde{S}_{7,4}$	$M, J, T+C$
$\tilde{S}_{7,5}$		D, J; K_1, K_2, P_1, P_2, M	$\tilde{S}_{7,5}$	M, J, D
$\tilde{S}_{6,1}$	$A_{1\oplus A_{5,35}}^{0,2}$	(M) Θ (D, J; T, P_1, P_2)	$\tilde{S}_{6,1}$	$M, T/(P_1^2+P_2^2)$
$\tilde{S}_{6,2}$	$A_{6,14}^1$	T, K_1, K_2, P_1, P_2, M	$\tilde{S}_{8,1}$	M, T

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$\bar{S}_{6,3}$		$D; K_1, K_2, P_1, P_2, M$	$\bar{S}_{7,5}$	M, D
$\bar{S}_{6,4}$		$J+aD; K_1, K_2, P_1, P_2, M \quad (a \neq 0)$	$\bar{S}_{7,5}$	$M, 2J+aD$
$\bar{S}_{6,5}$		$J; K_1, K_2, P_1, P_2, M$	$\bar{S}_{9,1}$	M, J
$\bar{S}_{6,6}$		$C+T; K_1, K_2, P_1, P_2, M$	$\bar{S}_{7,4}$	$M, T+C$
$\bar{S}_{6,7}$		$J+a(C+T); K_1, K_2, P_1, P_2, M \quad (a \neq \pm 1, 0)$	$\bar{S}_{7,4}$	$M, 2J+a(T+C)$
$\bar{S}_{6,8}$		$J+\epsilon T; K_1, K_2, P_1, P_2, M$	$\bar{S}_{7,1}$	$M, 2J+\epsilon T$
$\bar{S}_{6,9}$		$D; T, K_1, P_1, P_2, M$	$\bar{S}_{6,9}$	$M, (2MT-P_1^2)/P_2^2$
$\bar{S}_{6,10}$		$J+\epsilon(C+T), K_1-\epsilon P_2, K_1+\epsilon P_1; K_1+\epsilon P_2, K_2-\epsilon P_1, M$	$\bar{S}_{7,4}$	$M, 2J+\epsilon(T+C)$
$\bar{S}_{6,11}$		$; C, D, T, K_1, P_1, M$	$\bar{S}_{6,11}$	$2(2MT-P_1^2)(2MC-K_1^2)+2(2MC-K_1^2)(2MT-P_1^2)-$ $(2MD+P_1K_1+K_1P_1)^2, M$
$\bar{S}_{5,1}$	$2A_1 \oplus A_{3,6}$	$(T) \oplus (M) \oplus (J; P_1, P_2)$	$\bar{S}_{6,1}$	$M, T, P_1^2+P_2^2$
$\bar{S}_{5,2}$	$2A_1 \oplus A_{3,8}$	$(J) \oplus (M) \oplus (; C, D, T)$	$\bar{S}_{5,2}$	$J, M, (C+T)^2-(C-T)^2-D^2$
$\bar{S}_{5,3}$	$A_1 \oplus A_{4,1}$	$(P_2) \oplus (T, K_1; P_1, M)$	$\bar{S}_{7,2}$	$P_2, M, 2MT-P_1^2$
$\bar{S}_{5,4}$	$A_1 \oplus A_{4,5}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$	$(M) \oplus (D; T, P_1, P_2)$	$\bar{S}_{6,1}$	$M, P_1/P_2, T/(P_1^2+P_2^2)$

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$\bar{S}_{5,5}$	$A_1 \oplus A_{4,6}^{2 a , a }$	$(M) \oplus (J+aD; T, P_1, P_2) \quad (a \neq 0)$	$\bar{S}_{6,1}$	$M, T/(P_1^2+P_2^2), (P_1^2+P_2^2)(P_1-iP_2)^{-ia}(P_1+iP_2)^{ia}$
$\bar{S}_{5,6}$	$A_1 \oplus A_{4,10}$	$(J-\epsilon(C+T)) \oplus (J+\epsilon(C+T); K_1+\epsilon P_2, K_2-\epsilon P_1, M)$	$\bar{S}_{5,6}$	$J-\epsilon(C+T), M, C+T+2\epsilon J$
$\bar{S}_{5,7}$	$A_1 \oplus A_{4,10}$	$(K_2+\epsilon P_1) \oplus (J+\epsilon(C+T); K_1+\epsilon P_2, K_2-\epsilon P_1, M)$	$\bar{S}_{6,10}$	$K_2+\epsilon P_1, M, C+T+2\epsilon J$
$\bar{S}_{5,8}$	$A_1 \oplus A_{4,12}$	$(M) \oplus (D, J; P_1, P_2)$	$\bar{S}_{5,8}$	M
$\bar{S}_{5,9}$	$A_{5,4}$	$K_1, K_2, P_1, P_2; M$	$\bar{S}_{9,1}$	M
$\bar{S}_{5,10}$	$A_{5,5}$	$T+K_1, K_2+aK_1, P_1-aP_2; P_2+aP_1, M$	$\bar{S}_{6,2}$	M
$\bar{S}_{5,11}$	$A_{5,19}^{0,1}$	$D; K_1, P_1, P_2, M$	$\bar{S}_{5,12}$	M
$\bar{S}_{5,12}$	$A_{5,26}^{0,1}$	$C+T+\epsilon J+a(K_1-\epsilon P_2), K_2+\epsilon P_1; K_2-\epsilon P_1, K_1+\epsilon P_2, M \quad (a > 0)$	$\bar{S}_{6,10}$	M
$\bar{S}_{5,13}$	$A_{5,30}^{-1}$	$D, T; K_1, P_1, M$	$\bar{S}_{5,13}$	M
$\bar{S}_{5,14}$	$A_{5,35}^{0,2}$	$D+aM, J+bM; T, P_1, P_2$	$\bar{S}_{6,1}$	$T/(P_1^2+P_2^2)$
$\bar{S}_{4,1}$	$4A_1$	T, P_1, P_2, M	$\bar{S}_{8,1}$	T, P_1, P_2, M
$\bar{S}_{4,2}$	$2A_1 \oplus A_2$	$(J) \oplus (M) \oplus (D; T)$	$\bar{S}_{4,2}$	J, M
$\bar{S}_{4,3}$	$A_1 \oplus A_{3,1}$	$(J-\epsilon(C+T)) \oplus (K_1+\epsilon P_2, K_2-\epsilon P_1; M)$	$\bar{S}_{5,6}$	$J-\epsilon(C+T), M$
$\bar{S}_{4,4}$	$A_1 \oplus A_{3,1}$	$(P_2) \oplus (T+K_1, P_1; M)$	$\bar{S}_{6,2}$	P_2, M

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$\bar{S}_{4,5}$	$A_1 \oplus A_{3,1}$	$(P_2) \oplus (K_1, P_1; M)$	$\bar{S}_{7,2}$	P_2, M
$\bar{S}_{4,6}$	$A_1 \oplus A_{3,1}$	$(K_2 + \epsilon P_1) \oplus (K_1 + \epsilon P_2, K_2 - \epsilon P_1; M)$	$\bar{S}_{6,10}$	$K_2 + \epsilon P_1, M$
$\bar{S}_{4,7}$	$A_1 \oplus A_{3,3}$	$(M) \oplus (D; P_1, P_2)$	$\bar{S}_{5,8}$	$M, P_1/P_2$
$\bar{S}_{4,8}$	$A_1 \oplus A_{3,4}$	$(M) \oplus (D; K_1, P_2)$	$\bar{S}_{4,8}$	$M, K_1 P_2$
$\bar{S}_{4,9}$	$A_1 \oplus A_{3,5}^{\frac{1}{2}}$	$(M) \oplus (D; T, P_1)$	$\bar{S}_{4,9}$	$M, T/P_1^2$
$\bar{S}_{4,10}$	$A_1 \oplus A_{3,6}$	$(T + \epsilon M) \oplus (J + aM; P_1, P_2)$	$\bar{S}_{5,1}$	$T + \epsilon M, P_1^2 + P_2^2$
$\bar{S}_{4,11}$	$A_1 \oplus A_{3,6}$	$(T) \oplus (J + aM; P_1, P_2)$	$\bar{S}_{6,1}$	$T, P_1^2 + P_2^2$
$\bar{S}_{4,12}$	$A_1 \oplus A_{3,6}$	$(M) \oplus (J; P_1, P_2)$	$\bar{S}_{6,1}$	$M, P_1^2 + P_2^2$
$\bar{S}_{4,13}$	$A_1 \oplus A_{3,6}$	$(M) \oplus (J + \epsilon T; P_1, P_2)$	$\bar{S}_{5,1}$	$M, P_1^2 + P_2^2$
$\bar{S}_{4,14}$	$A_1 \oplus A_{3,7}^{ a }$	$(M) \oplus (J + aD; P_1, P_2) \quad (a \neq 0)$	$\bar{S}_{5,8}$	$M, (P_1^2 + P_2^2)(P_1 + iP_2)^{ia}(P_1 - iP_2)^{-ia}$
$\bar{S}_{4,15}$	$A_1 \oplus A_{3,8}$	$(J + aM) \oplus (C, D, T)$	$\bar{S}_{5,2}$	$J + aM, (C+T)^2 - (C-T)^2 - D^2$
$\bar{S}_{4,16}$	$A_1 \oplus A_{3,8}$	$(M) \oplus (C, D, T)$	$\bar{S}_{5,2}$	$M, (C+T)^2 - (C-T)^2 - D^2$
$\bar{S}_{4,17}$	$A_{4,1}$	$T, K_1; P_1, M$	$\bar{S}_{6,9}$	$M, 2MT - P_1^2$

Nom	Classe d'isomor- phie	Générateurs	Norma- lisateur	Invariants
$\bar{S}_{4,18}$	$A_{4,1}$	$T, K_1 + \varepsilon P_2; P_1, M$	$\bar{S}_{5,3}$	$M, 2MT - P_1^2$
$\bar{S}_{4,19}$	$A_{4,1}$	$T + K_1, K_2 + aK_1 + bP_1; P_2 + aP_1, M$	$\bar{S}_{5,10}$	$M, (P_2 + aP_1 - bM)^2 - 2M[(1+a^2)(T+K_1) - a(K_2 + aK_1 + bP_1)]$
$\bar{S}_{4,20}$	$A_{4,5}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$	$D + aM; T, P_1, P_2$	$\bar{S}_{6,1}$	$T / (P_1^2 + P_2^2), P_1 / P_2$
$\bar{S}_{4,21}$	$A_{4,6}^{2 a , a }$	$J + aD + bM; T, P_1, P_2 \quad (a \neq 0)$	$\bar{S}_{6,1}$	$T / (P_1^2 + P_2^2), (P_1^2 + P_2^2)(P_1 - iP_2)^{-ia} (P_1 + iP_2)^{ia}$
$\bar{S}_{4,22}$	$A_{4,8}$	$D; K_1, P_1 + aP_2, M$	$\bar{S}_{4,22}$	$M, K_1(P_1 + aP_2) + (P_1 + aP_2)K_1 + 2MD$
$\bar{S}_{4,23}$	$A_{4,10}$	$J + a(C+T); K_1 + \varepsilon P_2, K_2 - \varepsilon P_1, M \quad (a \neq -\varepsilon)$	$\bar{S}_{5,6}$	$M, 4M[J + a(C+T)] - (a + \varepsilon)[(K_2 - \varepsilon P_1)^2 + (K_1 + \varepsilon P_2)^2]$
$\bar{S}_{4,24}$	$A_{4,10}$	$C + T; K_1 + aP_2, P_1 - aK_2, M \quad (a < 1)$	$\bar{S}_{4,24}$	$M, (P_1 - aK_2)^2 + (K_1 + aP_2)^2 - 2(1+a^2)M(C+T)$
$\bar{S}_{4,25}$	$A_{4,10}$	$C + T; K_1 + \varepsilon P_2, K_2 - \varepsilon P_1, M$	$\bar{S}_{5,6}$	$M(K_1 + \varepsilon P_2)^2 + (K_2 - \varepsilon P_1)^2 - 4M(C+T)$
$\bar{S}_{4,26}$	$A_{4,10}$	$J + \varepsilon(C+T) + a(K_1 - \varepsilon P_2); K_1 + \varepsilon P_2, K_2 - \varepsilon P_1, M \quad (a > 0)$	$\bar{S}_{6,10}$	$M, (K_1 + \varepsilon P_2)^2 + (K_2 - \varepsilon P_1)^2 - 2\varepsilon M(J + \varepsilon(C+T) + a(K_1 - \varepsilon P_2))$
$\bar{S}_{4,27}$	$A_{4,12}$	$D + aM, J + bM; P_1, P_2$	$\bar{S}_{5,8}$	aucun
$\bar{S}_{3,1}$	$3A_1$	T, P_1, P_2	$\bar{S}_{6,1}$	T, P_1, P_2
$\bar{S}_{3,2}$	$3A_1$	$T + \varepsilon M, P_1, P_2$	$\bar{S}_{5,1}$	$T + \varepsilon M, P_1, P_2$
$\bar{S}_{3,3}$	$3A_1$	$J, C + T, M$	$\bar{S}_{3,3}$	$J, C + T, M$

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$\bar{S}_{3,4}$	$3A_1$	J, T, M	$\bar{S}_{4,2}$	J, T, M
$\bar{S}_{3,5}$	$3A_1$	D, J, M	$\bar{S}_{3,5}$	D, J, M
$\bar{S}_{3,6}$	$3A_1$	T, P_1, M	$\bar{S}_{6,9}$	T, P_1, M
$\bar{S}_{3,7}$	$3A_1$	$T + K_1, P_2, M$	$\begin{matrix} a=0 \\ \bar{S}_{5,10} \end{matrix}$	$T + K_1, P_2, M$
$\bar{S}_{3,8}$	$3A_1$	P_1, P_2, M	$\bar{S}_{8,1}$	P_1, P_2, M
$\bar{S}_{3,9}$	$3A_1$	K_1, P_2, M	$\bar{S}_{6,3}$	K_1, P_2, M
$\bar{S}_{3,10}$	$3A_1$	$J - \varepsilon(C+T), K_1 + \varepsilon P_2, M$	$\bar{S}_{4,3}$	$J - \varepsilon(C+T), K_1 + \varepsilon P_2, M$
$\bar{S}_{3,11}$	$A_1 \oplus A_2$	$(J + aM) \oplus (D + bM; T)$	$\bar{S}_{4,2}$	$J + aM$
$\bar{S}_{3,12}$	$A_1 \oplus A_2$	$(M) \oplus (D + aJ; T)$	$\bar{S}_{4,2}$	M
$\bar{S}_{3,13}$	$A_1 \oplus A_2$	$(M) \oplus (D; P_1)$	$\bar{S}_{3,13}$	M
$\bar{S}_{3,14}$	$A_{3,1}$	$J - \varepsilon(C+T) + a(K_2 - \varepsilon P_1), K_1 + \varepsilon P_2; M \quad (a \neq 0)$	$\bar{S}_{4,3}$	M
$\bar{S}_{3,15}$	$A_{3,1}$	$T + K_1, P_1; M$	$\bar{S}_{5,3}$	M
$\bar{S}_{3,16}$	$A_{3,1}$	$T + K_1, P_2 + aP_1; M \quad (a \neq 0)$	$\bar{S}_{5,10}$	M
$\bar{S}_{3,17}$	$A_{3,1}$	$K_1, P_1; M$	$\bar{S}_{8,2}$	M
$\bar{S}_{3,18}$	$A_{3,1}$	$K_1, P_1 + aP_2; M \quad (a > 0)$	$\bar{S}_{6,3}$	M

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$\bar{S}_{3,19}$	$A_{3,1}$	$K_1 + \varepsilon P_2, K_2 - \varepsilon P_1; M$	$\bar{S}_{7,4}$	M
$\bar{S}_{3,20}$	$A_{3,1}$	$K_1 + aP_2, P_1 - aK_2; M \quad 0 < a < 1$	$\bar{S}_{6,6}$	M
$\bar{S}_{3,21}$	$A_{3,1}$	$P_1 + \varepsilon K_2, P_2; M$	$\bar{S}_{6,2}$	M
$\bar{S}_{3,22}$	$A_{3,3}$	$D + aM; P_1, P_2$	$\bar{S}_{5,8}$	P_1/P_2
$\bar{S}_{3,23}$	$A_{3,4}$	$D + aM; K_1, P_2$	$\bar{S}_{4,8}$	$K_1 P_2$
$\bar{S}_{3,24}$	$A_{3,5}^\dagger$	$D + aM; T, P_1$	$\bar{S}_{4,9}$	P_1^2/T
$\bar{S}_{3,25}$	$A_{3,6}$	$J + aM; P_1, P_2$	$\bar{S}_{6,1}$	$P_1^2 + P_2^2$
$\bar{S}_{3,26}$	$A_{3,6}$	$J + \varepsilon T + aM; P_1, P_2$	$\bar{S}_{5,1}$	$P_1^2 + P_2^2$
$\bar{S}_{3,27}$	$A_{3,7}^a$	$J + aD + bM; P_1, P_2 \quad (a \neq 0)$	$\bar{S}_{5,8}$	$(P_1^2 + P_2^2)(P_1 + iP_2)^{ia}(P_1 - iP_2)^{-ia}$
$\bar{S}_{3,28}$	$A_{3,8}$	$; C, D, T$	$\bar{S}_{5,2}$	$(C+T)^2 - (C-T)^2 - D^2$
$\bar{S}_{2,1}$	$2A_1$	$J + aM, C+T+bM$	$\bar{S}_{3,3}$	$J+aM, C+T+bM$
$\bar{S}_{2,2}$	$2A_1$	$J+aM, T$	$\bar{S}_{4,2}$	$J+aM, T$
$\bar{S}_{2,3}$	$2A_1$	$J+aM, T+\varepsilon M$	$\bar{S}_{3,4}$	$J+aM, T+\varepsilon M$
$\bar{S}_{2,4}$	$2A_1$	$D+aM, J+bM$	$\bar{S}_{3,5}$	$D+aM, J+bM$

Nom	Classe d'isomorphie	Générateurs	Normalisateur	Invariants
$\bar{S}_{2,5}$	$2A_1$	T, P_1	$\bar{S}_{5,4}$	T, P_1
$\bar{S}_{2,6}$	$2A_1$	$T+\epsilon M, P_1$	$\bar{S}_{4,1}$	$T+\epsilon M, P_1$
$\bar{S}_{2,7}$	$2A_1$	$T+K_1, P_2$	$\bar{S}_{3,7}$	$T+K_1, P_2$
$\bar{S}_{2,8}$	$2A_1$	P_1, P_2	$\bar{S}_{6,1}$	P_1, P_2
$\bar{S}_{2,9}$	$2A_1$	K_1, P_2	$\bar{S}_{4,8}$	K_1, P_2
$\bar{S}_{2,10}$	$2A_1$	$J-\epsilon(C+T)+aM, K_1+\epsilon P_2$	$\bar{S}_{3,10}$	$J-\epsilon(C+T)+aM, K_1+\epsilon P_2$
$\bar{S}_{2,11}$	$2A_1$	J, M	$\bar{S}_{5,2}$	J, M
$\bar{S}_{2,12}$	$2A_1$	$C+T+aJ, M \quad (a \neq \pm 1)$	$\bar{S}_{3,3}$	$C+T+aJ, M$
$\bar{S}_{2,13}$	$2A_1$	T, M	$\bar{S}_{6,1}$	T, M
$\bar{S}_{2,14}$	$2A_1$	$J+\epsilon T, M$	$\bar{S}_{3,4}$	$J+\epsilon T, M$
$\bar{S}_{2,15}$	$2A_1$	$D+aJ, M \quad (a > 0)$	$\bar{S}_{3,5}$	$D+aJ, M$
$\bar{S}_{2,16}$	$2A_1$	P_1, M	$\bar{S}_{7,2}$	P_1, M
$\bar{S}_{2,17}$	$2A_1$	$K_2+\epsilon P_1, M$	$\bar{S}_{6,10}$	$K_2+\epsilon P_1, M$
$\bar{S}_{2,18}$	$2A_1$	$T+K_1, M$	$\bar{S}_{4,4}$	$T+K_1, M$
$\bar{S}_{2,19}$	$2A_1$	$J-\epsilon(C+T)+a(K_1+\epsilon P_2), M \quad (a > 0)$	$\bar{S}_{4,3}$	$J-\epsilon(C+T)+a(K_1+\epsilon P_2), M$

Nom	Classe d'isomor- phie	Générateurs	Norma- lisateur	Invariants
$\bar{S}_{2,20}$	$2A_1$	$J-\varepsilon(C+T), M$	$S_{5,6}$	$J-\varepsilon(C+T), M$
$\bar{S}_{2,21}$	A_2	$J+aD+bM; T \quad (a \neq 0)$	$\bar{S}_{4,2}$	aucun
$\bar{S}_{2,22}$	A_2	$D+aM; P_1$	$\bar{S}_{3,13}$	aucun
$\bar{S}_{1,1}$	A_1	$J+a(C+T)+bM \quad (a \neq 0, \varepsilon)$	$\bar{S}_{3,3}$	$J+a(C+T)+bM$
$\bar{S}_{1,2}$	A_1	$J+aM$	$\bar{S}_{5,2}$	$J+aM$
$\bar{S}_{1,3}$	A_1	$C+T+aM$	$\bar{S}_{3,3}$	$C+T+aM$
$\bar{S}_{1,4}$	A_1	T	$\bar{S}_{6,1}$	T
$\bar{S}_{1,5}$	A_1	$T+\varepsilon M$	$\bar{S}_{5,1}$	$T+\varepsilon M$
$\bar{S}_{1,6}$	A_1	$J+\varepsilon T+aM$	$\bar{S}_{3,4}$	$J+\varepsilon T+aM$
$\bar{S}_{1,7}$	A_1	$D+aJ+bM \quad (a \geq 0)$	$\bar{S}_{3,5}$	$D+aJ+bM$
$\bar{S}_{1,8}$	A_1	P_2	$\bar{S}_{6,9}$	P_2
$\bar{S}_{1,9}$	A_1	$K_2+\varepsilon P_1$	$\bar{S}_{5,7}$	$K_2+\varepsilon P_1$
$\bar{S}_{1,10}$	A_1	$T+K_1$	$\bar{S}_{3,7}$	$T+K_1$
$\bar{S}_{1,11}$	A_1	$J-\varepsilon(C+T)+a(K_1+\varepsilon P_2) \quad (a > 0)$	$\bar{S}_{3,10}$	$J-\varepsilon(C+T)+a(K_1+\varepsilon P_2)$

Nom	Classe d'isomor- phie	Générateurs	Norma- lisateur	Invariants
$\bar{S}_{1,12}$	A_1	$J_{-\varepsilon}(C+T)+aM$	$\bar{S}_{5,6}$	$J_{-\varepsilon}(C+T)+aM$
$\bar{S}_{1,13}$	A_1	M	$\bar{S}_{9,1}$	M