

FORMULES OPTIMALES DE QUADRATURE DE FONCTIONS CONCAVES

Marc Bourdeau et Serge Dubuc

I. INTRODUCTION

Soit $f(x)$ une fonction concave non-négative définie sur l'intervalle $[0,1]$, si l'on désire estimer

$$\int_0^1 f(x) d\mu(x),$$

l'intégrale de Riemann-Stieljes de f par rapport à la fonction déterminante $\mu(x)$, alors que l'on ne connaît explicitement que les valeurs de la fonction f en des points $x_1, x_2, \dots, x_n$, on est amené à considérer les formules de quadrature

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i).$$

Les x_i sont les noeuds de la quadrature et les p_i en sont les poids. Si les noeuds sont fixes, quels sont les poids les plus avantageux à utiliser? Nous verrons que les poids suivants sont commodes

$$p_i = (x_{i+1} - x_i)^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x) dx - (x_i - x_{i-1})^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu(x) dx$$

lorsque les noeuds ont été ordonnés par ordre croissant et que l'on pose $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$. La formule de quadrature qui correspond à ce choix de poids est appelée la formule trapézoïdale pour l'intégrale

$$\int_0^1 f(x) d\mu(x);$$

elle a l'avantage de minorer la valeur de l'intégrale de f lorsque f est une fonction concave non-négative. Nous établirons que parmi les formules de quadrature à noeuds fixes qui sous-estiment les intégrales de fonctions concaves non-négatives, la formule trapézoïdale sous-estime les intégrales le moins possible. A une quadrature Q , nous associerons un paramètre $\sigma(Q)$, le facteur de sous-estimation de la quadrature. Nous nous permettrons ensuite de faire varier la position des

noeuds. Nous verrons que parmi toutes les quadratures à noeuds variables, il existe une quadrature Q qui rend le facteur de sous-estimation $\sigma(Q)$ le plus voisin possible de un; de plus, cette quadrature est unique à une constante multiplicative près. Nous déterminerons la formule optimale de quadrature à n noeuds associée à l'intégrale

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Nous évaluerons le facteur de sous-estimation de la règle du trapèze et de la règle de Simpson à l'égard de

$$\int_0^1 f(x) dx$$

et nous proposerons une formule de quadrature d'une simplicité comparable à ces deux dernières et dont le rendement est nettement supérieur à celles-ci.

II. CADRE FONCTIONNEL D'UN CRITERE D'OPTIMALITE

Soit C un cône convexe fermé de sommet 0 dans un espace vectoriel topologique localement convexe E , soit I une fonctionnelle linéaire sur E telle que si $f \in C - \{0\}$, $I(f) > 0$; nous supposons de plus que $C_I = \{f: f \in C \text{ et } I(f) = 1\}$ est un compact. Soit Q une fonctionnelle linéaire continue sur E , posons $M(Q) = \sup\{Q(f): f \in C_I\}$ et $m(Q) = \inf\{Q(f): f \in C_I\}$. Si $m(Q) > 0$, on obtient les inégalités suivantes sur C : $Q(f)/M(Q) \leq I(f) \leq Q(f)/m(Q)$. On observe que le quotient des deux membres extrêmes des dernières inégalités est $m(Q)/M(Q)$; plus ce nombre sera voisin de un, plus on aura une idée précise de $I(f)$. Ceci nous amène à définir ce que nous appellerons le paramètre de sous-estimation de I par Q : $\sigma(Q) = m(Q)/M(Q)$ lorsque $M(Q) > 0$ et $\sigma(Q) = -\infty$ si $M(Q) \leq 0$. Si $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des points extrémaux du convexe C_I et que l'on paramétrise $\mathcal{Q}$ par une variable t , $\mathcal{Q} = \{f_t\}$, nous poserons $\hat{Q}(t) = Q(f_t)$. On a que

$$M(Q) = \sup_t \hat{Q}(t), \quad m(Q) = \inf_t \hat{Q}(t).$$

La seule connaissance de $\hat{Q}(t)$ permet donc de calculer aisément les paramètres, $m(Q)$, $M(Q)$ et $\sigma(Q)$. Soit $\mathcal{Q}$ une collection de fonctionnelles linéaires continues sur E , on dira qu'une fonctionnelle Q_0 de $\mathcal{Q}$ est σ -optimale pour approcher I sur C si pour tout Q de $\mathcal{Q}$, $\sigma(Q) \leq \sigma(Q_0)$.

III. FORMULES OPTIMALES DE QUADRATURE A NOEUDS FIXES

Soit C le cône des fonctions concaves non-négatives définies sur $[0,1]$, soit $E = C - C$ le sous-espace vectoriel engendré par C , on munit E de la topologie de la convergence simple. Soit μ une mesure positive, finie sur $(0,1)$ telle que $\mu((0,1)) > 0$, on introduira la fonctionnelle

$$I_{\mu}(f) = \int_0^1 f(x) d\mu(x)$$

lorsque $f \in E$. Soit $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une collection de n points de $[0,1]$ ordonnés par ordre croissant, on désigne par $Q(N)$ la famille des formules de quadrature dont les noeuds donnent l'ensemble N :

$$Q(N) = \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \delta_{x_i} : p_i \in \mathbb{R} \right\}$$

où δ_x est la fonctionnelle de Dirac (pour tout f de E , $\delta_x(f) = f(x)$). La formule trapézoïdale associée aux noeuds N et à la mesure μ sera par définition:

$$T_{\mu, N} = \sum_{i=1}^n p_i \delta_{x_i}$$

où

$$p_i = (x_{i+1} - x_i)^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x) dx - (x_i - x_{i-1})^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu(x) dx$$

alors que $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$. Ici $\mu(x) = \mu((0, x))$. Il est sous-entendu que si $x_1 = 0$,

$$p_1 = \int_0^{x_2} \mu(x) dx / x_2.$$

De même si $x_n = 1$,

$$p_n = \mu((0, 1)) - (1 - x_{n-1})^{-1} \int_{x_{n-1}}^1 \mu(x) dx.$$

Introduisons un opérateur de projection P_N : si f est une fonction définie sur $[0,1]$, $g = P_N(f)$ est la fonction définie sur $[0,1]$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x \in N$, $g(0) = 0$ si $0 \notin N$, $g(1) = 0$ si $1 \notin N$ et g est linéaire sur chacun des intervalles fermés déterminés par $N \cup \{0,1\}$.

La fonction g sera appelée la N -linéarisation de f . Une fonction h telle que $P_N h = h$ sera dite N -linéaire.

Lemme 1. Pour toute fonction f définie sur $[0,1]$

$$T_{\mu, N}(f) = \int_0^1 P_N f(x) d\mu(x).$$

Démonstration. Puisque pour toute fonction f , $T_{\mu, N}(f) = T_{\mu, N}(P_N f)$, il suffit de montrer que pour toute fonction g , N -linéaire,

$$T_{\mu, N}(g) = \int_0^1 g(x) d\mu(x).$$

Les fonctions N -linéaires forment un espace vectoriel de dimension n dont on peut spécifier une base $\{g_i\}_{i=1}^n$:

$$g_i(x) = \begin{cases} (x-x_{i-1})/(x_i-x_{i-1}) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1}-x)/(x_{i+1}-x_i) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Une intégration par parties donne que

$$\int_0^1 g_i(x) d\mu(x) = p_i = T_{\mu, N}(g_i).$$

Ce qui achève la vérification du lemme.

Remarques: Les poids d'une formule trapézoïdale sont toujours non-négatifs et la somme des poids est toujours majorée par

$$\int_0^1 d\mu(x).$$

Si le support de la mesure μ est dans l'intervalle $[x_1, x_n]$, alors

$$\sum_{i=1}^n p_i = \int_0^1 d\mu(x).$$

Si f est une fonction concave non-négative, on voit que $P_N(f) \leq f$; d'où

$$T_{\mu, N}(f) \leq \int_0^1 f(x) d\mu(x)$$

et $M(Q) = 1$. La formule trapézoïdale $T_{\mu, N}$ sous-estime en tout temps

$$\int_0^1 f(x) d\mu(x)$$

lorsque f est une fonction concave non-négative.

Explicitons maintenant les fonctions extrêmes du convexe

$$C_I = \{f \in C: \int_0^1 f(x) d\mu(x) = 1\}.$$

Soit g_t la $\{t\}$ -linéarisation de la fonction constante 1 pour $t \in [0, 1]$, on pose

$$f_t(x) = g_t(x) / \int_0^1 g_t(x) d\mu(x).$$

On pose aussi

$$f_{0+}(x) = \lim_{t \downarrow 0} f_t(x) \quad \text{et} \quad f_{1-}(x) = \lim_{t \uparrow 1} f_t(x).$$

L'ensemble des points extrémaux & de C_I est $\{f_t\}_{t \in [0, 1]} \cup \{f_{0+} \text{ et } f_{1-}\}$.

Lemme 2. Soit $\omega(t)$ une fonction concave non-négative non-linéaire définie sur un intervalle $[a, b]$, soit $L(t)$ une fonction linéaire telle que $L(a) \leq \omega(a)$ et $L(b) \leq \omega(b)$, soit $L_0(t)$ une fonction linéaire définie sur un sous-intervalle

$[c,d]$ de $[a,b]$ telle que $L_0(c) = \omega(c)$ et $L_0(d) = \omega(d)$, posons

$$m_0 = \inf\{L_0(t)/\omega(t): t \in [c,d]\}$$

et

$$m = \inf\{L(t)/\omega(t): t \in [a,b]\},$$

alors

$$m \leq m_0.$$

De plus, si $m = m_0$ alors $a = c$, $b = d$ et $L = L_0$.

Démonstration. Vu la concavité de $\omega(t)$, on a que $L(t) \leq \omega(t)$ pour tout t de $[a,b]$. D'où $L(c) \leq \omega(c) = L_0(c)$ et $L(d) \leq \omega(d) = L_0(d)$. Ainsi $L(t) \leq L_0(t)$ pour tout t de $[c,d]$.

$$m \leq \inf\{L(t)/\omega(t): t \in [c,d]\} \leq m_0.$$

Maintenant si $m = m_0$, il faut que $L(t) = L_0(t)$ pour tout t de $[c,d]$. Puisque $\omega(t)$ n'est pas linéaire sur $[c,d]$, il faut aussi que $a = c$ et $b = d$.

Théorème 3. Soit μ une mesure ($\mu \neq 0$) sur $(0,1)$, soit N une collection finie et fixe de noeuds dans $[0,1]$, on considère le cône C des fonctions concaves, non-négatives et la fonctionnelle

$$I(f) = \int_0^1 f(x) d\mu(x),$$

alors la formule trapézoïdale $T_{\mu,N}$ est σ -optimale pour approcher I sur C par rapport aux formules de quadrature $Q(N)$.

Démonstration: Comparons une quadrature

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i \delta_{x_i}$$

à la quadrature

$$T_{\mu,N} = Q_0 = \sum_{i=1}^n p_i^0 \delta_{x_i}.$$

Sans perte de généralité pour montrer que $\sigma(Q) \leq \sigma(Q_0)$, on peut supposer que $M(Q) = 1$. Puisque $M(Q_0) = 1$, il faut vérifier que $m(Q) \leq m(Q_0)$. On peut aussi supposer que $m(Q_0) < 1$. Soit f une fonction extrémale du convexe C_I telle que $Q_0(f) = m(Q_0)$. Le premier cas qui peut se présenter est que $f = f_u$ alors que $0 < x_{i-1} < u < x_i < 1$ où x_{i-1} et x_i sont deux noeuds consécutifs. Introduisons les fonctions $\pi_t(x) = \min(x(1-t), (1-x)t)$, $t \in (0,1)$ et posons

$$\omega(t) = \int_0^1 \pi_t(x) d\mu(x).$$

Nous avons que $f_t(x) = \pi_t(x)/\omega(t)$. D'où si $\hat{Q}(t) = Q(f_t)$,

$$\hat{Q}(t) = \left[\sum_{j=1}^{i-1} p_j x_j (1-t) + \sum_{j=i}^n p_j (1-x_j) t \right] / \omega(t).$$

Autrement dit $\hat{Q}(t) = L(t)/\omega(t)$ où $L(t)$ est linéaire sur $[x_{i-1}, x_i]$. De même, $\hat{Q}_0(t) = L_0(t)/\omega(t)$ où L_0 est linéaire sur le même intervalle et $L_0(x_{i-1}) = \omega(x_{i-1})$ et $L_0(x_i) = \omega(x_i)$. Le lemme 2 donne que $\hat{Q}(u) \leq \hat{Q}_0(u) = m(Q_0)$ et ainsi $m(Q) \leq m(Q_0)$. Pour traiter des autres cas, posons $a = x_1$ si $x_1 > 0$ et $a = x_2$ si $x_1 = 0$. De même sur l'intervalle $(0, a]$, $\hat{Q}(t) = L(t)/\omega(t)$, $\hat{Q}_0(t) = L_0(t)/\omega(t)$ alors que L et L_0 sont linéaires sur $[0, a]$, $L(0) = L_0(0) = 0$, $L(a) \leq \omega(a)$, $L_0(a) = \omega(a)$. Le lemme 2 donnera encore que

$$\begin{aligned} \hat{Q}(0+) &= \inf\{L(t)/\omega(t) : t \in (0, a]\} \\ &\leq \hat{Q}_0(0+) = \inf\{L_0(t)/\omega(t) : t \in (0, a]\}. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que $m(Q) \leq m(Q_0)$ lorsque $m(Q_0) = Q_0(f_u)$ où $u \in (0, a] \cup \{0+\}$. Enfin remarquons que si $Q_0(f_0) \neq Q_0(f_{0+})$ alors $0 \in N$ et dans ce cas $Q_0(f_0) = 1$ par la construction même de la règle trapézoïdale. Ceci permet d'achever la démonstration.

IV. FORMULES OPTIMALES DE QUADRATURE A NOEUDS VARIABLES

Désignons par $\mathcal{Q}_n$ l'ensemble des formules de quadrature Q qui utilisent au plus n noeuds de $(0, 1)$. Désignons par

$$\sigma_n(\mu) = \sup\{m(Q)/M(Q) : Q \in \mathcal{Q}_n \text{ et } M(Q) > 0\}.$$

Nous allons montrer qu'il existe une quadrature Q_0 de $\mathcal{Q}_n$ telle que $\sigma_n(\mu) = m(Q_0)/M(Q_0)$ et à une constante multiplicative près cette quadrature est unique. Nous construisons plus ou moins explicitement cette formule et celle-ci sera une formule trapézoïdale comme le théorème 3 nous en assure.

Théorème 4. Soit $\omega(t)$ une fonction concave définie sur $[0, 1]$ telle que $\omega(0) = \omega(1) = 0$, $\omega'(0)$ et $\omega'(1)$ existent, soit $n \geq 1$, on suppose de plus que pour toute collection M de noeuds de moins de n points de $(0, 1)$, ω n'est pas M -linéaire, alors il existe une collection $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de n noeuds de $(0, 1)$ telle que $(P_N^\omega)/\omega$ atteint son minimum en $(n+1)$ valeurs $y_0, y_1, \dots, y_n$ où $y_0 = 0$, $y_n = 1$ et $x_i < y_i < x_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$ (il est sous-entendu que

$$P_N^\omega(0)/\omega(0) = \lim_{t \downarrow 0} P_N^\omega(t)/\omega(t)$$

et

$$P_N^\omega(1)/\omega(1) = \lim_{t \uparrow 1} P_N^\omega(t)/\omega(t)).$$

La collection N est uniquement déterminée par la fonction ω .

Démonstration: Faisons d'abord l'hypothèse supplémentaire que $\omega(t)$ est strictement concave sur $[0,1]$. Désignons par $L_{x,y}(t)$ la fonction linéaire telle que $L_{x,y}(x) = \omega(x)$ et $L_{x,y}(y) = \omega(y)$ et posons

$$m(x,y) = \inf\{L_{x,y}(t)/\omega(t) : t \in (x,y)\}$$

(on suppose que $0 \leq x < y \leq 1$). Nous recherchons n noeuds de $(0,1)$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ tels que $m(x_{i-1}, x_i) = m(x_i, x_{i+1})$, $1 \leq i \leq n$ alors que $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$. Soit λ un nombre de $(0,1)$, désignons par $x_1(\lambda)$ la solution à l'équation $\omega(x) = \lambda \omega'(0)$. La fonction $t \rightarrow L_{0,x}(t)/\omega(t)$ est croissante à cause de la concavité de $\omega(t)$. D'où

$$m(0, x_1(\lambda)) = \lim_{t \downarrow 0} L_{0, x_1(\lambda)}(t)/\omega(t) = \lambda.$$

De même on peut voir que la fonction $\lambda \rightarrow x_1(\lambda)$ est décroissante; lorsque λ varie de 0 à 1, $x_1(\lambda)$ varie de 1 à 0. D'autre part, la fonction $x \rightarrow m(x, 1)$ est croissante; lorsque x varie de 0 à 1, $m(x, 1)$ varie de 0 à 1. D'où $\lambda \rightarrow m(x_1(\lambda), 1)$ est une fonction décroissante et lorsque λ varie de 0 à 1, $m(x_1(\lambda), 1)$ varie de 1 à 0. Ainsi $\{\lambda : m(x_1(\lambda), 1) < \lambda\}$ est un intervalle $(\lambda_1, 1)$. Si $\lambda \in (\lambda_1, 1)$, on peut trouver un et un seul nombre $x_2(\lambda)$ de $(x_1(\lambda), 1)$ tel que $m(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = \lambda$, car la fonction $x \rightarrow m(x_1(\lambda), x)$ décroît de 1 à λ_1 lorsque x varie de $x_1(\lambda)$ à 1. Vérifions que la fonction $\lambda \rightarrow x_2(\lambda)$ est décroissante. Considérons deux nombres λ et λ' , $\lambda_1 < \lambda < \lambda' < 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x_1(\lambda') < x_1(\lambda) < x_2(\lambda) < x_2(\lambda')$. Par le lemme 2, on sait que la fonction $x \rightarrow m(x, x_2(\lambda))$ est croissante sur $(0, x_2(\lambda))$; d'où $m(x_1(\lambda'), x_2(\lambda)) < m(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = \lambda$. De même la fonction $x \rightarrow m(x_1(\lambda'), x)$ est décroissante sur $(x_1(\lambda'), 1)$ et ainsi

$$m(x_1(\lambda'), x_2(\lambda)) \geq m(x_1(\lambda'), x_2(\lambda')) = \lambda'.$$

Ainsi $\lambda' < \lambda$, ce qui est absurde. $\{\lambda : m(x_2(\lambda), 1) < \lambda\}$ est donc un intervalle $(\lambda_2, 1)$.

On peut continuer ainsi de façon récurrente à construire des fonctions $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda), \dots, x_n(\lambda)$ définies respectivement sur les intervalles $(0,1)$, $(\lambda_1, 1)$, $(\lambda_2, 1)$, $\dots$ et $(\lambda_{n-1}, 1)$ où $0 < \lambda_1 < \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$. $x_n(\lambda)$ est une fonction décroissante. Soit λ_n la solution à l'équation $m(x_n(\lambda), 1) = \lambda$, on considère alors les noeuds $N = \{x_1(\lambda_n), x_2(\lambda_n), \dots, x_n(\lambda_n)\}$. Sur chacun des $(n+1)$ intervalles déterminés par les noeuds, le minimum de la fonction $P_N \omega(t)/\omega(t)$ est égal à λ_n . Le théorème 4 a donc été établi pour une fonction ω strictement concave.

Traisons maintenant du cas où $\omega(t)$ est une fonction concave pour laquelle il n'existe pas de partition de $[0,1]$ en n sous-intervalles telle que ω restreint à chacun des sous-intervalles soit linéaire. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction ω_ε strictement concave non-négative telle que $|\omega_\varepsilon(t) - \omega(t)| \leq$

$\varepsilon(1-t)$. Soit $N_\varepsilon = \{x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_n(\varepsilon)\}$ un choix de noeuds tel que les minima de la fonction $P_{N_\varepsilon} \omega_\varepsilon(t)/\omega_\varepsilon(t)$ sur les intervalles $[x_{i-1}(\varepsilon), x_i(\varepsilon)]$, $1 \leq i \leq n+1$, sont tous égaux entre eux ($x_0(\varepsilon) = 0$, $x_{n+1}(\varepsilon) = 1$). On peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $x_i(\varepsilon) - x_{i-1}(\varepsilon) > \delta$ pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et pour tout i , $1 \leq i \leq n+1$; en effet si ceci n'était pas le cas, il existerait une suite $\varepsilon_k \downarrow 0$ et un entier i tel $x_{i-1}(\varepsilon_k)$ et $x_i(\varepsilon_k)$ deviendraient de plus en plus rapprochés; on obtiendrait alors que

$$P_{N_{\varepsilon_k}} \omega_{\varepsilon_k}(t)/\omega_{\varepsilon_k}(t)$$

convergerait vers la fonction 1; il existerait une collection de noeuds N' utilisant moins de n points de $(0,1)$ telle que $P_{N'} \omega = \omega$; ceci est éliminé par hypothèse.

Il existe alors des points $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ tels que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est adhérent à la courbe de R^n $(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_n(\varepsilon))$. Si $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on obtient que les minima de la fonction $P_N \omega/\omega$ sur les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n+1$ (on pose toujours $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$) sont tous égaux entre eux.

C.Q.F.D.

La collection de noeuds N décrite dans le théorème précédent sera appelée la configuration optimale de degré n associée à la fonction ω . Et nous noterons par

$$\lambda_n(\omega) = \inf\{P_N \omega(t)/\omega(t) : t \in (0,1)\}.$$

Théorème 5. Soit $\omega(t)$ une fonction concave remplissant les hypothèses du théorème 4, soit $f(t)$ une fonction linéaire par morceaux, les morceaux venant d'une partition de $[0,1]$ en au plus $(n+1)$ sous-intervalles, on suppose que $f(t) \leq \omega(t)$ et que f diffère de $P_N \omega$ où N est la configuration optimale de degré n associée à ω , alors

$$\inf\{f(t)/\omega(t) : t \in (0,1)\} < \lambda_n(\omega).$$

Démonstration: Soit $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ une partition de $[0,1]$ telle que $m \leq n+1$ et f restreinte à $[y_{j-1}, y_j]$ est linéaire. Si $\{y_1, y_2, \dots, y_{m-1}\}$ diffère de la configuration optimale associée à ω , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on peut trouver deux entiers i et j , $1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq j \leq m$ tels que $y_{j-1} \leq x_{i-1}$, $x_i \leq y_j$ et $y_j - y_{j-1} > x_i - x_{i-1}$. Le lemme 2 montre que

$$\inf\{f(t)/\omega(t) : y_{j-1} < t < y_j\} < \lambda_n(\omega),$$

car en aucun cas la fonction $\omega(t)$ ne peut être linéaire sur $[x_{i-1}, x_i]$.

Si $m = n+1$ et si $y_i = x_i$, $1 \leq i \leq n$, alors il existe un entier i tel que $f(t) \neq P_N \omega(t)$ pour $t \in [x_{i-1}, x_i]$. Le lemme 2 donne encore que

$$\inf\{f(t)/\omega(t) : x_{j-1} < t < x_j\} < \lambda_n(\omega).$$

Les théorèmes 4 et 5 admettent une transcription littérale aux formules de quadrature. Si μ est une mesure positive définie sur $(0,1)$, alors la fonction

$$\omega(t) = \int_0^1 \pi_t(x) d\mu(x) = (1-t) \int_0^t x d\mu(x) + \int_t^1 (1-x) d\mu(x)$$

est une fonction concave. De plus

$$\omega'(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\omega(t)}{t} = \int_0^1 (1-x) d\mu(x) < \infty.$$

De même

$$-\omega'(1) = \lim_{t \uparrow 1} \frac{\omega(t)}{1-t} = \int_0^1 x d\mu(x).$$

Les théorèmes 4 et 5 assurent que la quantité $\sigma_n(\mu)$ définie au début de cette section est précisément égale à $\lambda_n(\omega)$, lorsque le support de la mesure $d\mu$ contient plus de $(n-1)$ points. En effet soit $Q \in \mathcal{Q}_n$ telle que $M(Q) = 1$, $\hat{Q}(t) = Q(\pi_t) = Q(\pi_t)/\omega(t)$. $Q(\pi_t)$ est une fonction N -linéaire où N est la collection des noeuds de Q

$$m(Q) = \inf\{\hat{Q}(t): t \in (0,1)\} \leq \lambda_n(\omega).$$

De plus si $m(Q) = \lambda_n(\omega)$, Q est nécessairement égale à la formule trapézoïdale attachée à la configuration optimale de degré n associée à la fonction ω .

Théorème 6. Soit $d\mu$ une mesure sur $(0,1)$ dont le support contient plus de $(n-1)$ points, soit

$$\omega(t) = (1-t) \int_0^t x d\mu(x) + t \int_t^1 (1-x) d\mu(x),$$

à une constante multiplicative près, il existe une et une seule formule de quadrature Q telle que $m(Q)/M(Q) = \sigma_n(\mu)$. Cette formule est la formule trapézoïdale attachée à la configuration optimale de degré n associée à ω . On a que $\sigma_n(\omega) = \lambda_n(\omega)$.

V. CAS PARTICULIERS DE QUADRATURE

(a) Utilisons les résultats précédents dans quelques situations différentes. Recherchons d'abord la formule optimale de quadrature qui se servirait d'un seul noeud pour approcher l'intégrale de Riemann-Stieljes

$$\int_0^1 f(x) d\mu(x).$$

Un retour à la démonstration du théorème 4 donne que la position idéale pour le noeud est le point x tel

$$\frac{\omega(x)}{x\omega'(0)} = \frac{\omega(x)}{(x-1)\omega'(1)}.$$

D'où

$$x = -\omega'(1)/(\omega'(0)-\omega'(1))$$

$$x = \int_0^1 x d\mu(x) / \int_0^1 d\mu(x).$$

Le poids p à accorder au point x pour obtenir la formule trapézoïdale est

$$p = -x^{-1} \int_0^x (t) dt + (1-x) \int_x^1 (t) dt$$

$$p = \int_0^1 \min\left(\frac{t}{x}, \frac{1-t}{1-x}\right) d\mu(t).$$

Le paramètre de sous-estimation de cette formule est

$$\lambda = \frac{px}{\int_0^1 x d\mu(x)} = \frac{\int_0^1 \min\left(\frac{t}{x}, \frac{1-t}{1-x}\right) d\mu(t)}{\int_0^1 d\mu(x)}.$$

(b) Déterminons maintenant la formule optimale de quadrature à n noeuds pour l'intégrale de Riemann

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Ici

$$\omega(t) = \int_0^1 \pi_t(x) dx = t(1-t)/2.$$

Evaluons la quantité $m(x,y) = \inf\{L_{x,y}(t)/\omega(t) : x < t < y\}$

$$L_{x,y}(t)/\omega(t) = \frac{xy}{t} + \frac{(1-x)(1-y)}{1-t}.$$

D'où

$$m(x,y) = (\sqrt{xy} + \sqrt{(1-x)(1-y)})^2.$$

Nous voulons trouver une partition $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ de l'intervalle $[0,1]$ telle que

$$m(x_{i-1}, x_i) = \lambda_n \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Posons

$$x_i = \sin^2 \theta_i \quad 0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$$

$$m(x_{i-1}, x_i) = \cos^2(\theta_i - \theta_{i-1}).$$

D'où tous les accroissements $\theta_i - \theta_{i-1}$ sont égaux entre eux et puisque $\theta_0 = 0$ et $\theta_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ on obtient que

$$\theta_i = \frac{i\pi}{2(n+1)}$$

et

$$\lambda_n = \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Evaluons les poids de la formule optimale.

$$p_i = \frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)^{-1}(x_{i+1}^2-x_i^2) - \frac{1}{2}(x_i-x_{i-1})^{-1}(x_i^2-x_{i-1}^2)$$

$$p_i = \frac{1}{2}(x_{i+1}-x_{i-1}).$$

Un peu de trigonométrie donne que $p_i = \frac{1}{2} \sin i\pi/(n+1) \sin \pi/(n+1)$. On peut résumer ces calculs dans le résultat suivant.

Théorème 7. Si f est une fonction concave non-négative sur $(0,1)$ et si

$$Q_n(f) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n+1} \right) f \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right),$$

alors

$$Q_n(f) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq Q_n(f) \sec^2 \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

(c) Nous allons calculer le facteur de sous-estimation de quelques formules usuelles de quadrature. Considérons d'abord la règle du trapèze:

$$T_n(f) = \frac{1}{2n}(f(0)+f(1)) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Evaluons $\hat{T}_n(t)$. Il est relativement aisé de montrer que T_n est une formule trapézoïdale. Posons $x_i = i/n$, $0 \leq i \leq n$. Si $t \in (x_{i-1}, x_i)$,

$$T_n(t) = x_{i-1}x_i/t + (1-x_{i-1})(1-x_i)/(1-t).$$

$$m(x_{i-1}, x_i) = ([x_{i-1}x_i]^{\frac{1}{2}} + [(1-x_{i-1})(1-x_i)]^{\frac{1}{2}})^2.$$

Posons $h = (2n)^{-1}$ et $y_i = (x_{i-1}+x_i)/2$.

$$\sqrt{m(x_{i-1}, x_i)} = \sqrt{y_i^2 - h^2} + \sqrt{(1-y_i)^2 - h^2}.$$

Or la fonction $y \rightarrow \sqrt{y^2 - h^2}$ est concave sur (h, ∞) . D'où la fonction

$$\sqrt{y^2 - h^2} + \sqrt{(1-y)^2 - h^2}$$

est concave et symétrique par rapport à $y = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $(h, 1-h)$. D'où le minimum sur i de $m(x_{i-1}, x_i)$ s'obtiendra sur les valeurs extrêmes de i . Ainsi $m(T_n) = m(0, 1/n) = (1 - \frac{1}{n})$.

Considérons maintenant la règle de Simpson définie pour les valeurs paires de n :

$$S_n(f) = \frac{1}{3n}f(0) + \frac{4}{3n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{3n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$S_n(f) = \frac{4}{3}T_n(f) - \frac{1}{3}T_{n/2}(f).$$

Evaluons $\hat{S}_n(t)$. Posons encore $x_i = i/n$. Si $t = x_i$ et que i est pair, $\hat{S}_n(x_i) = 1$, car $\hat{T}_n(x_i) = \hat{T}_{n/2}(x_i) = 1$. Si $t = x_i$ et que i est impair $T_n(f_{x_i}) = 1$ et

$$T_{n/2}(f_{x_i}) = \frac{x_{i-1}x_{i+1}}{x_i} + \frac{(1-x_{i-1})(1-x_{i+1})}{1-x_i}.$$

Cette dernière quantité vaut également

$$(x_i^2 - n^2)/x_i + ((1-x_i)^2 - n^2)/(1-x_i) = 1 - n^2 \left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{1-x_i} \right).$$

Si i est impair,

$$\hat{S}_n(x_i) = 1 + \frac{1}{3n^2} \left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{1-x_i} \right).$$

Maintenant, si i est impair et si $x_{i-1} < t < x_i$,

$$\hat{S}_n(t) = \frac{A_i}{t} + \frac{B_i}{1-t}$$

où

$$\frac{A_i}{x_{i-1}} + \frac{B_i}{1-x_{i-1}} = 1$$

et

$$\frac{A_i}{x_i} + \frac{B_i}{1-x_i} = 1 + \frac{1}{3n^2 x_i (1-x_i)}.$$

D'où

$$A_i = x_{i-1}(x_i - 1/3n) \quad \text{et} \quad B_i = (1-x_{i-1}) \left(\frac{1}{3n} + 1 - x_i \right).$$

Le minimum de $\hat{S}_n(t)$ sur l'intervalle (x_{i-1}, x_i) est $(\sqrt{A_i} + \sqrt{B_i})^2$ et le maximum de $\hat{S}_n(t)$ sur $[x_{i-1}, x_i]$ est

$$1 + \frac{1}{3n^2(x_i(1-x_i))}.$$

De même si $x_i < t < x_{i+1}$, $\hat{S}_n(t) = \frac{C_i}{t} + \frac{D_i}{1-t}$ où

$$\frac{C_i}{x_{i+1}} + \frac{D_i}{1-x_{i+1}} = 1$$

et

$$\frac{C_i}{x_i} + \frac{D_i}{1-x_i} = 1 + \frac{1}{3n^2 x_i (1-x_i)}.$$

$$C_i = x_{i+1}(x_i + 1/3n)$$

et

$$D_i = (1-x_{i+1})((1-x_i) - 1/3n).$$

Le minimum de $\hat{S}_n(t)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est

$$(\sqrt{C_i} + \sqrt{D_i})^2$$

alors que le maximum sera

$$1 + \frac{1}{3n^2 x_i (1-x_i)}.$$

D'où

$$M(S_n) = 1 + \frac{1}{3n-3}.$$

Puisque

$$A_i = x_i^2 - \frac{4}{3n}x_i + \frac{1}{3n^2}$$

$$B_i = (1-x_i)^2 + \frac{4}{3n}(1-x) + \frac{1}{3n^2},$$

la concavité des fonctions

$$\sqrt{3x^2-4x+1} \quad (x \geq 1)$$

$$\sqrt{3x^2+4x+1} \quad (x \geq 0)$$

donne que

$$\sqrt{x^2 - \frac{4}{3n}x + \frac{1}{3n^2}} + \sqrt{(1-x)^2 + \frac{4}{3n}(1-x) + \frac{1}{3n^2}}$$

est une fonction concave lorsque x varie dans l'intervalle $(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})$. Le minimum sur i de $\sqrt{A_i} + \sqrt{B_i}$ sera atteint pour $i = 1$ ou $n-1$. Or

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 1 - \frac{2}{3n}$$

$$A_{n-1} = 1 - \frac{10}{3n} + \frac{8}{3n^2}$$

$$B_{n-1} = \frac{8}{3n^2}.$$

Après avoir considéré quelques inégalités entre fonctions irrationnelles, on obtient que

$$m(S_n) = B_1 = 1 - \frac{2}{3n}.$$

Le facteur de sous-estimateur pour la règle de Simpson est donc $\frac{n-1}{n}$.

Nous indiquons enfin une formule de quadrature dont le rendement est assez voisin de la formule optimale. Soit $P(x)$ le polynôme $3x^2-2x^3$, posons

$$x_i = P(i/n) \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

considérons les poids $p_i = (x_{i+1} - x_{i-1})/2$ ($x_{n-1} = 0$ et $x_{n+1} = 1$). Nous définissons la formule de quadrature

$$R_n(f) = \sum_{i=0}^n p_i f(x_i).$$

Il s'agit d'une formule trapézoïdale. Nous allons montrer que

$$m(R_n) = 1 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}.$$

Il s'agit d'établir que

$$\min_{1 \leq i \leq n} m(x_{i-1}, x_i) = m(0, x_1).$$

Nous allons montrer que si $0 \leq u \leq w \leq \frac{1}{2}$ et si $v = \frac{u+w}{2}$, alors

$$m(P(u), P(v)) \leq m(P(v), P(w)).$$

Posons $x = P(u)$, $y = P(v)$ et $z = P(w)$ et déterminons les valeurs α, β et γ telles que $x = \sin^2 \alpha$, $y = \sin^2 \beta$, $z = \sin^2 \gamma$, α, β et γ étant choisis dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$

$$m(P(u), P(v)) = \cos^2(\beta - \alpha) \quad \text{et} \quad m(P(v), P(w)) = \cos^2(\gamma - \beta).$$

On veut montrer que

$$\beta \geq \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Soit $\phi(x)$ la fonction inverse de $\theta \rightarrow \sin^2 \theta$, $\phi(x) = \frac{1}{2} \arccos(1-2x)$, on veut montrer que $\phi(P(v))$ est une fonction concave sur $[0, \frac{1}{2}]$.

$$\frac{d}{dv} \phi(P(v)) = - \frac{P'}{2\sqrt{(P-P^2)}}$$

$$\frac{d^2}{dv^2} \phi(P(v)) = - \frac{P''(P-P^2) + \frac{1}{2} P'^2 (2P-1)}{2(P-P^2)^{3/2}}.$$

Il suffit donc de vérifier que $2P''(P-P^2) + P'^2(2P-1) \geq 0$ sur $(0, \frac{1}{2})$. $2P''(P-P^2) + P'^2(2P-1) = B$ est un polynôme de degré 7. $x = 0$ est une racine de multiplicité égale 3:

$$B(x) = (12+24x)(3x^2-2x^3) + (6x-6x^2)^2(-1+3x^2-2x^3) + o(x^3)$$

$$B(x) = 36x^2 + 48x^3 - 36x^2 + 72x^3 + o(x^3)$$

$$B(x) = 120x^3 + o(x^3).$$

D'autre part $P(1-x) = 1-P(x)$. Ceci permet de vérifier que $B(1-x) = -B(x)$. D'où entre 0 et $\frac{1}{2}$, $B(x) > 0$. Si n est pair, on obtient que

$$m(R_n) = \min_{1 \leq i \leq n} m(x_{i-1}, x_i) = m(0, x_1) = 1 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}.$$

Si n est impair, on tire la même conclusion après avoir vérifié que $m(x_{i-1}, x_i) \leq m(x_i, x_{i+1})$ si $i = (n-1)/2$. Et ceci résulte du lemme suivant.

Lemme 8. Soit f une fonction définie sur un intervalle $(-a, a)$ telle que f est concave sur $[0, a)$, et telle que $f(-x) - f(0) = f(0) - f(x)$ pour tout x de $(-a, a)$; si $x \in (-\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$, alors

$$f(x) \geq \frac{f(3x) + f(-x)}{2}.$$

Démonstration: On peut supposer sans perte de généralité que $f(0) = 0$

(quitte à raisonner sur la fonction $g(x) = f(x) - f(0)$)

$$2f(x) - f(3x) - f(-x) = 3f(x) - f(3x).$$

Or $x = \frac{1}{3} \cdot 3x + \frac{2}{3} \cdot 0$, d'où

$$f(x) \geq \frac{1}{3}f(3x) + \frac{2}{3}f(0) = \frac{1}{3}f(3x).$$

Ainsi

$$f(x) \geq \frac{f(3x) - f(-x)}{2}.$$

Formons un tableau qui compare les derniers résultats entre eux

Q	m(Q)	m(Q)	$\sigma(Q)$
O_n	$1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{n+1}$	1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{n+1}$
T_n	$1 - \frac{1}{n}$	1	$1 - \frac{1}{n}$
S_n	$1 - \frac{2}{3n}$	$1 + \frac{1}{3n-3}$	$1 - \frac{1}{n}$
R_n	$1 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}$	1	$1 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}$
O_{11}	0.9797	1.0000	0.9797
T_{10}	0.9000	1.0000	0.9000
S_{10}	0.9333	1.0370	0.9000
R_{10}	0.9720	1.0000	0.9720

VI. VITESSE DE CONVERGENCE DES FORMULES OPTIMALES

Revenons au cas général d'une intégrale de Riemann-Stieljes

$$\int_0^1 f(x) d\mu(x).$$

Si $O_n(f)$ est la formule de quadrature qui utilise n points, avec quelle vitesse $O_n(f)$ converge-t-elle vers

$$\int_0^1 f(x) d\mu(x)$$

lorsqu'on fait croître n vers l'infini? Nous préciserons en particulier le comportement asymptotique du facteur de sous-estimation, $\sigma_n(\mu)$, lorsque la mesure μ provient d'une fonction de densité continue qui ne s'annulerait en aucun point de

$[0,1]$.

Si $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une collection de noeuds, le diamètre de N sera par définition le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$, $1 \leq i \leq n+1$ où $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$.

Théorème 9. Soit μ une mesure positive finie sur $(0,1)$, alors le facteur de sous-estimation $\sigma(\mu; N)$ de la formule trapézoïdale $T_{\mu, N}$ associée à μ et à N est voisin de un dès que le diamètre de N est petit.

Démonstration: Posons comme précédemment

$$\omega(x) = \int_0^x (1-t)t \, d\mu(t) + \int_x^1 t(1-t) \, d\mu(t).$$

Il peut arriver que

$$\sigma(\mu; N) = \frac{\omega(x)}{x\omega'(0)},$$

où x est le premier noeud de N dans $(0,1)$, ou encore que

$$\sigma(\mu; N) = \frac{\omega(y)}{(1-y)\omega'(1)}$$

où y est le dernier noeud de N dans $(0,1)$. Si aucun de ces cas ne se présente, on peut trouver deux noeuds consécutifs (x,y) de N dans $(0,1)$ et une valeur z de l'intervalle (x,y) telle que

$$\sigma(\mu; N) = \frac{(y-z)\omega(z) + (z-x)\omega(y)}{(y-x)\omega(z)}.$$

Minorons cette dernière expression. On a que $\omega(z) \leq z\omega(x)/x$. D'où

$$\sigma(\mu; N) \geq \frac{(y-z)\omega(x) + (z-x)\omega(y)}{(y-x)z\omega(x)/x}$$

On peut minorer encore ce dernier membre en remplaçant z par y et alors

$$\sigma(\mu; N) \geq x\omega(y)/(y\omega(x)).$$

Si l'on raisonne sur la sécante déterminée par les points $(z, \omega(z))$ et $(1,0)$, on aura que

$$\omega(z) \leq (1-z)\omega(y)/(1-y)$$

et

$$\sigma(\mu; N) \geq (1-y)\omega(x)/[(1-x)\omega(y)].$$

D'où $\sigma(\mu; N) \geq h(x,y)$ où

$$h(x,y) = \min(x\omega(y)/(y\omega(x)), (1-y)\omega(x)/(1-x)\omega(y)).$$

On vérifie assez facilement que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que $h(x,y) > 1-\varepsilon$ dès que $|x-y| < \delta$. De même si x est voisin de 0, $\omega(x)/(x\omega'(0))$ est voisin de 1; si y est voisin de 1, $-\omega(y)/((1-y)\omega'(1))$ est voisin de 1. C.Q.F.D.

Corollaire. Pour toute mesure positive finie μ sur $(0,1)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\mu) = 1.$$

Théorème 10. Si μ est une mesure positive finie sur $(0,1)$ dont le support est précisément égal à l'intervalle-unité et si N est une collection de noeuds telle que $\sigma(\mu, N)$ est voisin de 1, alors le diamètre de N est petit.

Démonstration: Il s'agit de trouver pour chaque $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que $\sigma(\mu, N) > 1 - \delta = \text{diam } N < \varepsilon$. Dire que le support de la mesure est $[0,1]$, revient à dire que la fonction

$$\omega(x) = \int_0^x (1-t) t \, d\mu(t) + \int_x^1 x(1-t) d\mu(t)$$

est strictement concave.

Soit $\varepsilon > 0$, posons pour $\lambda \in (0,1)$,

$$I(\lambda) = \{x: \omega(x) \geq \lambda x \omega'(0)\}, \quad J(\lambda) = \{y: \omega(y) \geq -\lambda(1-y) \omega'(1)\}$$

et

$$K(\lambda) = \{(x,y): \varepsilon \leq x \leq y \leq 1-\varepsilon, \omega(x)+\omega(y) \geq 2\lambda\omega(\frac{x+y}{2})\}.$$

$I(\lambda)$, $J(\lambda)$ et $K(\lambda)$ sont des ensembles compacts. Chacune des familles est constituée de compacts emboîtés. La concavité stricte de ω donne que

$$\bigcap_{\lambda} I(\lambda) = \{0\}, \quad \bigcap_{\lambda} J(\lambda) = \{1\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{\lambda} K(\lambda) = K_{\varepsilon} = \{(t,t): \varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon\}$$

Considérons les voisinages suivants de $\{0\}$, de $\{1\}$ et de K_{ε} :

$$[0, \varepsilon), (1-\varepsilon, 1] \quad \text{et} \quad V_{\varepsilon} = \{(x,y): |y-x| < \varepsilon\}.$$

Par compacité, on peut trouver une valeur λ_{ε} telle que

$$I(\lambda_{\varepsilon}) \subseteq [0, \varepsilon), \quad J(\lambda_{\varepsilon}) \subseteq (1-\varepsilon, 1] \quad \text{et} \quad K(\lambda_{\varepsilon}) \subseteq V_{\varepsilon}.$$

Soit N une collection de noeuds pour laquelle la formule trapézoïdale associée admet un facteur de sous-estimation $\sigma(\mu, N)$ supérieur ou égal à λ_{ε} . Si x est le premier noeud dans $(0,1)$ on sait que $m(0,x) = \omega(x)/(x\omega'(0))$. Or $m(0,x) \geq \sigma(\mu, N) \geq \lambda_{\varepsilon}$, $x \in I(\lambda_{\varepsilon})$ et ainsi $x < \varepsilon$. De façon semblable, si y est le dernier noeud de N dans $(0,1)$, $y > 1-\lambda$. Si x et y sont deux noeuds consécutifs de N dans $(0,1)$, on a que

$$\frac{\omega(x)+\omega(y)}{2\omega(\frac{x+y}{2})} \geq \inf \frac{(y-z)\omega(x)+(z-x)\omega(y)}{(y-x)\omega(z)}$$

$$\frac{\omega(x)+\omega(y)}{2\omega(\frac{x+y}{2})} \geq \sigma(\mu, N) \geq \lambda_{\varepsilon}.$$

D'où $(x,y) \in V_{\varepsilon}$, c'est-à-dire que $|y-x| \leq \varepsilon$. On a donc vérifié que le diamètre

de N est inférieur à ε .

Théorème 11. Soit $p(x)$ une fonction continue sur $[0,1]$ qui n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de $[0,1]$, si σ_n est le facteur de sous-estimation de la formule optimale de quadrature à n points associés à la mesure $p(x)dx$, si

$$\omega(x) = \int_0^x (1-t)p(t)dt + \int_x^1 t(1-t)p(t)dt,$$

alors lorsque n tend vers l'infini,

$$\sigma_n = 1 - \frac{C}{8n^2} + o(n^{-2})$$

où

$$C = \int_0^1 \sqrt{p(x)/\omega(x)} dx.$$

Démonstration: Soit N_n les n noeuds de la formule optimale de quadrature à n noeuds pour estimer les intégrales

$$f \rightarrow \int_0^1 f(x)p(x)dx.$$

Soient x et y deux noeuds consécutifs de N_n , on a que

$$\sigma_n = m(x,y) = \inf \left\{ \frac{\omega(x)(y-z) + \omega(y)(z-x)}{(y-x)\omega(z)}; z \in (x,y) \right\}$$

$$\frac{1}{\sigma_n} - 1 = \sup \left\{ \frac{(y-x)\omega(z) - \omega(x)(y-z) - \omega(y)(z-x)}{\omega(x)(y-z) + \omega(y)(z-x)}; z \in (x,y) \right\}.$$

Or on sait (cf. Gel'fond, A., Calcul des différences finies, par exemple) que

$$(y-x)\omega(z) - \omega(x)(y-z) - \omega(y)(z-x) = -\frac{1}{2}\omega''(\xi)(z-x)(y-z)(y-x)$$

où ξ est un point de (x,y) . Or $\omega''(x) = -p(x)$. Désignons par c et d le minimum et le maximum de la fonction p sur l'intervalle $[x,y]$. Si e est le maximum sur l'intervalle $[x,y]$ de la fonction

$$z \rightarrow \frac{(z-x)(y-z)(y-x)}{\omega(x)(y-z) + \omega(y)(z-x)},$$

alors

$$\frac{ce}{2} < \frac{1}{\sigma_n} - 1 \leq \frac{de}{2}.$$

Or

$$e = \frac{(y-x)^2}{(\sqrt{\omega(x)} + \sqrt{\omega(y)})^2}.$$

D'où il existe un nombre θ de $[x,y]$ tel que

$$\frac{1}{\sigma_n} - 1 = \frac{1}{2}p(\theta) \frac{(y-x)^2}{(\sqrt{\omega(x)} + \sqrt{\omega(y)})^2}.$$

Introduisons la fonction $f_n(t)$ définie sur $[0,1]$: sur l'intervalle (x,y) , $f_n(t)$ vaut $p^{\frac{1}{2}}(\theta)/(\sqrt{\omega(x)} + \sqrt{\omega(y)})$. On sait aussi que

$$\sigma_n = \frac{\omega(x_1)}{x_1 \omega'(0)};$$

d'où

$$\frac{1}{\sigma_n} - 1 = \frac{x_1 \omega'(0) - \omega(x_1)}{\omega(x_1)} = \frac{1}{2} p(\theta_0) \frac{(x_1 - x_0)^2}{\omega(x_1)}$$

$f_n(t)$ sur l'intervalle $[0, x_1]$ sera égal à $p^{\frac{1}{2}}(\theta_0)/\sqrt{\omega(x_1)}$. On procède de façon analogue sur l'intervalle $(x_n, 1]$. D'où

$$(n+1)\sqrt{\frac{1}{\sigma_n} - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^1 f_n(t) dt.$$

On vérifie aisément que l'on peut trouver une constante B tel que

$$f_n(t) \leq B \omega^{-\frac{1}{2}}(t).$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)\sqrt{\frac{1}{\sigma_n} - 1} = \sqrt{\frac{1}{8}} \int_0^1 \sqrt{\frac{p(x)}{x}} dx.$$

En effet le corollaire du théorème 9 et le théorème 10 donnent que le diamètre de N_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini et de là,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \sqrt{p(t)/(2\omega(t))}.$$

Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Case postale 6079, Succursale A
Montréal, Québec H3C 3A7

Département de Mathématiques
Université de Montréal
C.P. 6128, Montréal, Qué.

Manuscrit reçu le 1er septembre 1976

