

SOLUTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE OPÉRATIONNELLE

Paul Arminjon

1. INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert de norme $\| \cdot \|$ et produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et A un opérateur auto-adjoint et semi-défini positif (≥ 0), de domaine $D(A)$ dense dans H , à valeurs dans H .

Une fonction vectorielle sur la droite réelle $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow H$, est dite *presque périodique* si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\ell(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $\ell(\varepsilon)$, sur la droite réelle, contient au moins un point d'abscisse τ_ε doté de la propriété

$$\|f(t+\tau_\varepsilon)-f(t)\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Les nombres τ_ε sont appelés les " ε -presque périodes" de f . Les fonctions presque périodiques sont aussi caractérisées (cf. [10]) par la *Propriété d'approximation*: pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique à valeurs dans H ,

$$T_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} c_k \exp(i\lambda_k t) \quad (1.2)$$

avec λ_k et t réels, $c_k \in H$, tel que

$$\|f(t)-T_\varepsilon(t)\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Une fonction $u(t)$, avec $u \in C^2(\mathbb{R}, H)$, est une solution de l'équation différentielle opérationnelle

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - Au = f, \quad \text{ou encore } \ddot{u} - Au = f, \quad (1.4)$$

si $u(t) \in D(A)$ et $\ddot{u}(t) - Au(t) = f(t)$ pour tout t réel. Un problème intéressant consiste à savoir si, lorsque le membre de droite f est une fonction presque

périodique, les solutions u le sont aussi, indépendamment des conditions initiales. En utilisant la théorie spectrale des opérateurs non bornés, S.Zaidman [29] a démontré le théorème suivant:

Théorème 1. Si A est auto-adjoint et positif (≥ 0) et si f est une fonction presque périodique de $\mathbb{R}$ dans H , alors toute solution bornée u de l'équation $\ddot{u} - Au = f$ est presque périodique, pourvu que $u(t) \in D(A)$ pour tout t réel.

Le problème de la presque périodicité des solutions présente un intérêt appréciable pour plusieurs types d'équation. Pour l'équation des ondes, classique ou opérationnelle, la presque-périodicité des solutions a été établie dans des contextes de plus en plus généraux par Muckenhoupt [19], Bochner [8], Bochner et von Neumann [9], Sobolev [22], Ladyženskaja [16], Zaidman [24],[25], Amerio [3][4]. Pour l'équation des ondes avec un terme dissipatif non-linéaire, citons les travaux d'Amerio pour la presque-périodicité; Lions et Strauss, Prodi (voir [5]) pour la périodicité. Enfin pour les équations de Navier-Stokes, des résultats de presque-périodicité ont été obtenus par Prouse [21], Foias [11], et de périodicité par Prodi, Iudovic et Prouse (voir [5], p.174-175). Dans cet article, nous présentons une démonstration du Théorème 1 qui reprend et complète une étude par Zaidman [30], en développant une idée de L.Nirenberg (communication orale) et certaines inégalités de Gagliardo généralisées ici à des fonctions à valeurs vectorielles. Nous utilisons aussi un résultat bien connu de Friedrichs pour étendre ce théorème au cas d'un opérateur symétrique (et non auto-adjoint).

Exemple. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $I = \{t: -\infty < t < \infty\}$, $H = L^2(\Omega)$, $C(x)$ et $A_{ij}(x)$ ($1 \leq i, j \leq n$) des fonctions de $L^\infty(\Omega)$ presque partout positives, $f: I \rightarrow H$ une fonction donnée dans $L^2[(-\infty, \infty); H]$ et considérons l'opérateur $A = A(x, \frac{\partial}{\partial x})$ défini, pour $u \in C^2(\Omega)$, par

$$A(x, \frac{\partial}{\partial x})u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + C(x)u.$$

En effectuant des intégrations par parties dans le produit scalaire

$$(Au, v)_{L^2(\Omega)}$$

on est conduit à considérer pour A le domaine

$$D(A) = \{u \in H^1(\Omega); \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) \in L^2(\Omega)\}$$

i.e. $Au \in L^2(\Omega) \equiv H$. On a donc $A: H \supset D(A) \rightarrow H$ où $D(A)$ est dense dans H .

Les solutions classiques de l'équation elliptique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A(x, \frac{\partial}{\partial x})u = f \quad x \in \Omega, t \in I$$

sont alors les solutions de l'équation différentielle-opérationnelle

$$\ddot{u} - Au = f$$

et A est auto-adjoint et positif si $A_{ij} \geq 0$, $C \geq 0$. Un cas particulier important est celui, étudié par Zaidman [28], de l'équation de Poisson:

$$u_{tt}(x,t) + \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x,t) = f(x,t)$$

dans l'espace $\mathbb{R}^n \times I$.

II. PRELIMINAIRES

Soit $[a,b]$ un intervalle compact et d un nombre réel > 0 . Soit ψ la fonction réelle

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } a - \frac{d}{2} \leq t \leq b + \frac{d}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.1)$$

et considérons une fonction $K(t)$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ et de support contenu dans $[-1,1]$, telle que $\int K(t)dt = 1$. Définissons la fonction K_d par $K_d(t) = K(\frac{2t}{d})$; on a $\text{supp } K_d \subseteq \{t: \frac{2|t|}{d} \leq 1\}$, ou encore $\text{supp } K_d \subseteq [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$, où $\text{supp } K$ désigne le support de K .

Définissons une fonction φ par

$$\varphi(t) = \frac{2}{d} \int \psi(s) K_d(t-s) ds \quad (2.2)$$

où l'intégrale peut être calculée sur $[t - \frac{d}{2}, t + \frac{d}{2}]$ puisque $K_d(t-s) = 0$ est en dehors de cet intervalle. D'après les propriétés de la convolution, on a

$$\text{supp } \varphi \subseteq \text{supp } \psi + \text{supp } K_d = [a-d, b+d]$$

et $|\varphi(t)| \leq 1$ pour tout t réel. De plus,

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{2}{d} \int_{|s-t| \leq \frac{d}{2}} \psi(s) K_d(t-s) ds = \frac{2}{d} \int \psi(s) \frac{2}{d} K[\frac{2(t-s)}{d}] ds$$

d'où la majoration

$$|\dot{\varphi}(t)| \leq \frac{4}{d^2} \int_{|u| \leq \frac{d}{2}} |K(\frac{2u}{d})| du$$

et par suite

$$|\dot{\varphi}(t)| \leq \frac{C_0}{d}$$

pour un choix approprié de la constante C_0 . En définissant maintenant

$$z(t) = \varphi^4(t) \quad (2.3)$$

et en remarquant que $|\ddot{\varphi}(t)| < \frac{C_1}{d^2}$, on obtient l'inégalité

$$\frac{|\dot{z}(t)|^2}{z(t)} < \frac{C}{d^4} \quad (2.4)$$

où C est une constante indépendante de t .

III. QUELQUES LEMMES ET INEGALITES; FORME VECTORIELLE DE L'INEGALITE DE GAGLIARDO

Le lemme suivant est une généralisation, au cas des fonctions à valeurs vectorielles, d'une inégalité due à Gagliardo ([13] et [14]).

Lemme 1. Si $u \in C^2([a, a+\lambda]; H)$ où λ est un nombre réel positif, alors sa dérivée u satisfait l'inégalité

$$\max_{t \in I} \|\dot{u}(t)\| < C_1 (\max_{t \in I} \|u(t)\|)^{\frac{1}{3}} \left(\int_I \|\ddot{u}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{C_2}{\lambda} \max_{t \in I} \|u(t)\| \quad (3.1)$$

où $I = [a, a+\lambda]$, et C_1, C_2 sont indépendantes de λ et a .

Démonstration. Nous utiliserons l'inégalité suivante, obtenue en prenant $p = 2$ dans la remarque 2 suivant le lemme 1.II de Gagliardo [14]: si $w \in C^2(I; \mathbb{R})$, on a

$$\max_{t \in I} |\dot{w}(t)| \leq C_1 (\max_{t \in I} |w(t)|)^{\frac{1}{3}} \left(\int_I |\ddot{w}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{C_2}{\lambda} \max_{t \in I} |w(t)| \quad (3.2)$$

où les constantes C_1 et C_2 sont indépendantes de λ et a . Pour démontrer (3.1), considérons, pour $y \in H$ et $\|y\| \leq 1$, la fonction scalaire u_y définie par $u_y(t) = \langle y, u(t) \rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans H . On a $\dot{u}_y(t) = \langle y, \dot{u}(t) \rangle$ et $\ddot{u}_y(t) = \langle y, \ddot{u}(t) \rangle$. En appliquant (3.2) à $w = u_y$, on obtient

$$|\langle y, \dot{u}(t) \rangle| \leq C_1 (\max_I |\langle y, u(t) \rangle|)^{\frac{1}{3}} \left(\int_I |\langle y, \ddot{u}(t) \rangle|^2 dt \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{C_2}{\lambda} \max_I |\langle y, u(t) \rangle|,$$

ce qui entraîne, compte tenu du fait que y est un élément arbitraire de la boule unité de H :

$$\sup_{\|y\| \leq 1} |\langle y, \dot{u}(t) \rangle| \leq C_1 \sup_{\|y\| \leq 1} (\max_I |\langle y, u(t) \rangle|)^{\frac{1}{3}} \left(\int_I |\langle y, \ddot{u}(t) \rangle|^2 dt \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{C_2}{\lambda} \sup_{\|y\| \leq 1} \max_I |\langle y, u(t) \rangle|$$

d'où l'inégalité (3.1) annoncée.

Lemme 2. (Inégalité fondamentale) Sous les hypothèses du théorème 1, la solution u de l'équation $\ddot{u} - Au = f$ satisfait l'inégalité

$$\int_a^{b+d} \|\ddot{u}\|^2 dt \leq \int_{a-d}^{b+d} \|f\|^2 dt + \frac{C_1}{d^4} \int_{a-d}^{b+d} \|u\|^2 dt + \frac{C_2}{d^2} \int_{a-d}^{b+d} \|\dot{u}\|^2 dt \quad (3.3)$$

où d est un nombre positif arbitraire, et C_1 et C_2 des constantes positives indépendantes de d .

Démonstration. Soit u une solution de $\ddot{u} - Au = f$ avec $u(t) \in D(A)$ et $\dot{u}(t) \in D(A)$. On a $\langle \ddot{u} - Au, \ddot{u} - Au \rangle = \|f\|^2$, d'où, en multipliant par une fonction z telle que définie dans les préliminaires et en intégrant:

$$\int_{a-d}^{b+d} z \langle \ddot{u} - Au, \ddot{u} - Au \rangle dt = \int_{a-d}^{b+d} z \|f\|^2 dt$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int z (\|\ddot{u}\|^2 + \|Au\|^2) dt = \int z (\langle \ddot{u}, Au \rangle + \langle Au, \ddot{u} \rangle) dt + \int z \|f\|^2 dt. \quad (3.4)$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int z \langle \ddot{u}, Au \rangle dt &= \int z \left\{ \frac{d}{dt} \langle \dot{u}, Au \rangle - \langle \dot{u}, A\dot{u} \rangle \right\} dt \\ &= - \int z \langle \dot{u}, A\dot{u} \rangle dt + [z \langle \dot{u}, Au \rangle]_{a-d}^{b+d} - \int \langle \dot{u}, Au \rangle \dot{z}(t) dt; \end{aligned}$$

puisque $z \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\text{supp } z \subseteq [a-d, b+d]$ d'après les préliminaires, le second terme du membre de droite s'annule, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int z \langle \ddot{u}, Au \rangle dt &= - \int \dot{z} \langle \dot{u}, A\dot{u} \rangle dt - \int \langle \dot{u}, Au \rangle \dot{z}(t) dt \\ &= - \int z \langle \dot{u}, A\dot{u} \rangle dt + \int \dot{z} \langle u, A\dot{u} \rangle dt + \int \langle u, Au \rangle \ddot{z}(t) dt \end{aligned}$$

après une deuxième intégration par parties.

A étant auto-adjoint, nous obtenons

$$\int z \langle \ddot{u}, Au \rangle dt = - \int z \langle A\dot{u}, \dot{u} \rangle dt + \int \dot{z} \langle Au, \dot{u} \rangle dt + \int \ddot{z} \langle Au, u \rangle dt \quad (3.5)$$

On montrerait d'une manière analogue que

$$\int z \langle Au, \ddot{u} \rangle dt = - \int z \langle A\dot{u}, \dot{u} \rangle dt + \int \dot{z} \langle A\dot{u}, \dot{u} \rangle dt + \int \ddot{z} \langle Au, u \rangle dt. \quad (3.6)$$

En additionnant (3.5) et (3.6), on obtient

$$\int z (\langle \ddot{u}, Au \rangle + \langle Au, \ddot{u} \rangle) dt = -2 \int z \langle A\dot{u}, \dot{u} \rangle dt + 2 \int \dot{z} \text{Re} \langle Au, \dot{u} \rangle dt + 2 \int \ddot{z} \langle Au, u \rangle dt \quad (3.7)$$

Les relations (3.4) et (3.7) entraînent donc

$$\int_{a-d}^{b+d} z (\|\ddot{u}\|^2 + \|Au\|^2) dt = \int_{a-d}^{b+d} z \|f\|^2 dt - 2 \int_{a-d}^{b+d} z \langle A\dot{u}, \dot{u} \rangle dt + 2 \int_{a-d}^{b+d} \dot{z} \text{Re} \langle Au, \dot{u} \rangle dt + 2 \int_{a-d}^{b+d} \ddot{z} \langle Au, u \rangle dt.$$

Comme A est un opérateur positif et z une fonction numérique positive, on en déduit l'inégalité:

$$\int_{a-d}^{b+d} z (\|\ddot{u}\|^2 + \|Au\|^2) dt \leq \int z \|f\|^2 dt + 2 \int \ddot{z} \langle Au, u \rangle dt + 2 \int |\dot{z} \text{Re} \langle Au, \dot{u} \rangle| dt.$$

D'autre part l'inégalité élémentaire $2|ab| \leq a^2 + b^2$ et (2.4) entraînent

$$|\ddot{z}\langle Au, u \rangle| \leq \frac{1}{2}(z)^{\frac{1}{2}} \|Au\| \cdot \frac{2|\dot{z}|}{(z)^{\frac{1}{2}}} \|u\| \leq \frac{1}{8} |z| \|Au\|^2 + \frac{2|\dot{z}|^2 \|u\|^2}{z};$$

si l'on observe aussi que

$$|\dot{z} \operatorname{Re}\langle Au, \dot{u} \rangle| \leq \dot{z} \|Au\| \|\dot{u}\| = \frac{2|\dot{z}| \|\dot{u}\| (z)^{\frac{1}{2}} \|Au\|}{(z)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2|\dot{z}|^2 \|\dot{u}\|^2}{z} + \frac{1}{8} z \|Au\|^2,$$

on obtient

$$\int_{a-d}^{b+d} z(\|\ddot{u}\|^2 + \|Au\|^2) dt \leq \int z \|f\|^2 dt + \frac{1}{2} \int z \|Au\|^2 dt + 4 \int \frac{|\dot{z}|^2 \|u\|^2}{z} dt + 4 \int \frac{|\dot{z}|^2 \|\dot{u}\|^2}{z} dt.$$

En remarquant que

$$\frac{|\dot{z}|^2}{z} = \frac{16\phi^6(\dot{\phi})^2}{\phi^4} = 16(\dot{\phi})^2 \phi^2 \leq \frac{C_1}{d^2},$$

et en tenant compte de (2.4), on peut donc écrire

$$\int_{a-d}^{b+d} (z \|\ddot{u}\|^2 + \frac{z \|Au\|^2}{2}) dt \leq \int z \|f\|^2 dt + \frac{4C}{d^4} \int \|u\|^2 dt + \frac{4C_1}{d^2} \int \|\dot{u}\|^2 dt,$$

et puisque $z(t)$ est égale à 1 sur tout l'intervalle $[a, b]$ et $z(t) \leq 1$ pour tout t , d'après la définition de z dans les préliminaires, nous obtenons finalement

$$\int_a^b \|\ddot{u}\|^2 dt \leq \int_{a-d}^{b+d} \|f\|^2 dt + \frac{C_1}{d^4} \int_{a-d}^{b+d} \|u\|^2 dt + \frac{C_2}{d^2} \int_{a-d}^{b+d} \|\dot{u}\|^2 dt \quad (3.3)$$

pour de nouvelles constantes positives appropriées C_1, C_2 indépendantes de d , ce qui démontre le lemme 2.

Lemme 3. Si A est un opérateur positif auto-adjoint et u une solution bornée de l'équation $\ddot{u} - Au = f$, où f est une fonction bornée, alors pour tout nombre réel T et tout $d > 0$, il existe une constante C_d , qui ne dépend que de d , telle que

$$\int_{T-\frac{3d}{2}}^{T+\frac{3d}{2}} \|\dot{u}(t)\|^2 dt \leq C_d \int_{T-2d}^{T+2d} (\|u(t)\|^2 + \|f(t)\|^2) dt. \quad (3.8)$$

La démonstration de ce lemme, assez élaborée, sera présentée après celles des théorèmes 1 et 2, pour alléger la présentation du théorème 1.

Lemme 4. Sous les mêmes hypothèses (A positif auto-adjoint, $\ddot{u} - Au = f$, u et f bornées) la fonction $\dot{u}$ est bornée sur $(-\infty, +\infty)$.

Démonstration. En prenant $d = 1$ dans (3.8), on obtient la majoration suivante avec des constantes absolues C et K , pour tout T réel:

$$\int_{T-1}^{T+1} \|\dot{u}\|^2 dt \leq C \left(\int_{T-2}^{T+2} \|f(t)\|^2 dt + \int_{T-2}^{T+2} \|u(t)\|^2 dt \right) \leq K^2 \quad (3.9)$$

puisque u et f sont bornées; $\dot{u}$ étant continue, il existe un point $t_T \in [T-1, T+1]$ auquel $\|\dot{u}(t)\|$ atteint son minimum:

$$\|\dot{u}(t_T)\| = \min_{|t-T| \leq 1} \|\dot{u}(t)\|.$$

Cela entraîne $\|\dot{u}(t_T)\|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{T-1}^{T+1} \|\dot{u}(t)\|^2 dt$, de sorte que d'après (3.9),

$$\|\dot{u}(t_T)\| \leq \frac{K}{\sqrt{2}}. \quad (3.10)$$

Pour T réel et arbitraire, on peut écrire

$$\begin{aligned} \dot{u}(T) &= \int_0^T \ddot{u}(t) dt + \dot{u}(0) = \int_0^{t_T} \ddot{u}(t) dt + \int_{t_T}^T \ddot{u}(t) dt + \dot{u}(0) \\ &= \dot{u}(t_T) + \int_{t_T}^T \ddot{u}(t) dt. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|\dot{u}(T)\| \leq \|\dot{u}(t_T)\| + \int_{t_T}^T \|\ddot{u}(t)\| dt \leq \frac{K}{\sqrt{2}} + (T-t_T)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T-1}^{T+1} \|\ddot{u}\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

En prenant maintenant $d=1$, $a=T-1$ et $b=T+1$ dans l'inégalité fondamentale (3.3), on obtient

$$\int_{T-1}^{T+1} \|\ddot{u}\|^2 dt \leq \int_{T-2}^{T+2} \|f\|^2 dt + C_1 \int_{T-2}^{T+2} \|u\|^2 dt + C_2 \int_{T-2}^{T+2} \|\dot{u}\|^2 dt.$$

Si M et L désignent respectivement les maxima de f et u (en norme) sur la droite, on a ainsi

$$\int_{T-1}^{T+1} \|\ddot{u}\|^2 dt \leq 4M^2 + 4C_1 L^2 + C_2 \int_{T-2}^{T+2} \|\dot{u}\|^2 dt. \quad (3.12)$$

Appliquons l'inégalité (3.8) du lemme 3 à cette dernière intégrale, avec $d = \frac{4}{3}$:

$$\int_{T-2}^{T+2} \|\dot{u}\|^2 dt \leq C \int_{T-\frac{8}{3}}^{T+\frac{8}{3}} (\|u\|^2 + \|f\|^2) dt \leq \frac{16C}{3} (L^2 + M^2). \quad (3.13)$$

Comme d'autre part $(T-t_T)^{\frac{1}{2}} \leq 1$, les inégalités (3.11) à (3.13) entraînent finalement

$$\|\dot{u}(T)\| \leq W \quad (3.14)$$

où W est une constante absolue; T étant un nombre réel arbitraire, il en résulte que $\dot{u}$ est bornée, ce qui démontre le lemme 4.

IV. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Soit f une fonction presque périodique de $(-\infty, \infty)$ dans H , u une solution bornée de l'équation $\ddot{u} - Au = f$, et soit τ une ε -presque-période (pour $\varepsilon > 0$ arbitraire). Posons $v(t) = u(t+\tau) - u(t)$ et $g(t) = f(t+\tau) - f(t)$, de sorte que

$$\ddot{v}(t) - Av(t) = f(t+\tau) - f(t) = g(t). \quad (4.1)$$

En prenant $a = T - \frac{L}{\varepsilon}$ et $\lambda = \frac{2L}{\varepsilon}$ dans l'inégalité de Gagliardo vectorielle (3.1), avec $I = [T - \frac{L}{\varepsilon}, T + \frac{L}{\varepsilon}]$, nous obtenons

$$\max_{t \in I} \|\dot{v}(t)\| \leq C_1 (\max_I \|v(t)\|)^{\frac{1}{3}} \left(\int_I \|\ddot{v}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\varepsilon C_2}{2L} \max_I \|v(t)\|. \quad (4.2)$$

D'autre part, pour $d = \frac{L}{\varepsilon}$ et $b = T + \frac{L}{\varepsilon}$, l'inégalité fondamentale (3.3) donne

$$\int_{T-\frac{L}{\varepsilon}}^{T+\frac{L}{\varepsilon}} \|\ddot{v}(t)\|^2 dt \leq \int_{T-\frac{2L}{\varepsilon}}^{T+\frac{2L}{\varepsilon}} \|g\|^2 dt + \frac{K_1 \varepsilon^4}{L^4} \int_{T-\frac{2L}{\varepsilon}}^{T+\frac{2L}{\varepsilon}} \|v(t)\|^2 dt + \frac{K_2 \varepsilon^2}{L^2} \int_{T-\frac{2L}{\varepsilon}}^{T+\frac{2L}{\varepsilon}} \|\dot{v}(t)\| dt. \quad (4.3)$$

D'après la presque-périodicité de f , nous obtenons

$$\max_{-\infty < t < \infty} \|g(t)\| < \varepsilon \quad (4.4)$$

et donc, en reportant (4.4) dans (4.3),

$$\int_{T-\frac{L}{\varepsilon}}^{T+\frac{L}{\varepsilon}} \|\ddot{v}(t)\|^2 dt \leq \frac{4L}{\varepsilon} \varepsilon^2 + \frac{K_1 \varepsilon^4}{L^4} \frac{4L}{\varepsilon} (2L)^2 + \frac{K_2 \varepsilon^2}{L^2} \frac{4L}{\varepsilon} (2W)^2 \equiv h(\varepsilon). \quad (4.5)$$

En reportant (4.5) dans (4.2), on obtient

$$\max_I \|\dot{v}(t)\| \leq C_1 (2L)^{\frac{1}{3}} (h(\varepsilon))^{\frac{1}{3}} + C_2 \frac{\varepsilon}{2L} 2L$$

c'est-à-dire

$$\max_I \|\dot{v}(t)\| \leq \kappa (\alpha \varepsilon^3 + \beta \varepsilon) + \gamma \varepsilon \quad (4.6)$$

où les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ sont indépendantes de ε . On en déduit finalement, pour une constante $c > 0$ indépendante de ε et de $T \in (-\infty, \infty)$, que

$$\max \|\dot{u}(t+\tau) - \dot{u}(t)\| \leq c \varepsilon^{\frac{1}{3}}. \quad (4.7)$$

Comme T est un nombre réel arbitraire et $\varepsilon > 0$ étant lui aussi quelconque, il en résulte que la fonction $\dot{u}$ est presque périodique de $(-\infty, \infty)$ dans H . D'après un théorème de L. Amerio ([2]), ceci entraîne que u est elle aussi une fonction presque périodique de $(-\infty, \infty)$ dans H , ce qui achève la démonstration du théorème 1 (compte tenu du lemme 3 que nous démontrons à la section V).

Avant de démontrer le lemme 3, notons que le théorème 1 peut se généraliser au cas d'un opérateur A *symétrique* de la manière suivante. On sait que si A_0 est un opérateur symétrique et positif, il admet un prolongement auto-adjoint et positif A (voir Friedrichs [12], ou Yosida [23], p.317). Dans ces conditions si u est une solution bornée de l'équation $\ddot{u} - A_0 u = f$, avec A_0 symétrique et positif et f presque périodique, u est aussi une solution bornée de l'équation associée $\ddot{u} - A u = f$, où A est le prolongement auto-adjoint de A_0 . D'après le théorème 1, u est presque périodique, d'où le résultat suivant:

Théorème 2. Si A est un opérateur positif et symétrique de domaine $D(A)$ dense dans H et si f est une fonction presque périodique de $(-\infty, \infty)$ dans H , alors toute solution bornée u de $\ddot{u} - A u = f$ est aussi presque périodique, pourvu que $u(t)$ et $\dot{u}(t)$ soient dans $D(A)$ pour tout t réel.

V. DEMONSTRATION DU LEMME 3

La démonstration repose sur une représentation de la fonction u à l'aide de transformées de Fourier, suivant une méthode utilisée par Agmon-Nirenberg ([1], p. 192) et Zaidman [29].

Soit $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $x(t) = 0$ pour $|t| \geq 1$, $|x(t)| \leq 1$ pour tout t , et $x(t) = 1$ pour $|t| < \frac{6}{7}$, et considérons la fonction $z_d(t) = x(\frac{4(t-T)}{7d})$ pour T réel et fixé. On vérifie facilement que $z_d(t) = 0$ pour $|t-T| \geq \frac{7d}{4}$, $z_d(t) = 1$ pour $|t-T| \leq \frac{3d}{2}$, et $|z_d(t)| \leq 1$ pour tout t réel; de plus

$$|z_d'(t)| = |\frac{4}{7d} x'(\frac{4(t-T)}{7d})| \leq \frac{c}{d}$$

et $|z_d''(t)| \leq \frac{c}{d^2}$, où c est une constante positive appropriée. Soit alors $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$ une solution de $\ddot{u} - A u = f$, avec $u(t) \in D(A)$, et posons $v(t) = z_d(t) \cdot u(t)$. On a $v = u$ pour $|t-T| \leq \frac{3d}{2}$, et $v = 0$ pour $|t-T| \geq \frac{7d}{4}$. Il est facile de vérifier que v satisfait l'équation $\ddot{v} - A v = z(\ddot{u} - A u) + 2\dot{z}\dot{u} + \ddot{z}u$ (avec $z = z_d$ pour simplifier), ou encore

$$\ddot{v} - A v = z f + \ddot{z}u + 2\dot{z}\dot{u}.$$

En prenant les transformées de Fourier de ces fonctions continues à supports compacts, et en observant que $\widehat{A v} = A \widehat{v}$ (pour une démonstration détaillée voir [7], p.72) on obtient

$$-\lambda^2 \widehat{v}(\lambda) - A \widehat{v}(\lambda) = \widehat{z} \widehat{f} + \widehat{\ddot{z}} \widehat{u} + 2\widehat{\dot{z}\dot{u}}.$$

Or on peut vérifier, en intégrant $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \dot{z}(t) \dot{u}(t) dt$ par parties, que

$$2\widehat{\dot{z}\dot{u}} = 2i\lambda \widehat{\dot{z}u} - \widehat{\ddot{z}u}$$

ce qui entraîne

$$-(\lambda^2 + A)\hat{v}(\lambda) = \hat{z}\hat{f} - \hat{z}\hat{u} + 2i\lambda\hat{z}\hat{u}. \quad (5.1)$$

L'opérateur A étant positif, pour $\lambda \neq 0$, $(\lambda^2 + A)^{-1}$ est un opérateur bien défini continu de H dans H , ce qui permet d'écrire

$$\hat{v}(\lambda) = -(\lambda^2 + A)^{-1}[\hat{z}\hat{f}(\lambda) - \hat{z}\hat{u}(\lambda) + 2i\lambda\hat{z}\hat{u}(\lambda)]. \quad (5.2)$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'inégalité (3.8) du lemme 3. Remarquons d'abord que $-A$ est auto-adjoint et négatif, d'où l'inégalité

$$\|(\lambda^2 + A)^{-1}\| < \frac{1}{\lambda^2} \quad (5.3)$$

(cf. Yosida [23], p.250-251). D'autre part, la formule d'inversion de Fourier s'écrit

$$v(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \hat{v}(\lambda) d\lambda. \quad (5.4)$$

En utilisant (5.4) pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, on obtient

$$v(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \hat{v}(\lambda) d\lambda - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{|\lambda| > \varepsilon} e^{i\lambda t} (\lambda^2 + A)^{-1} [\hat{z}\hat{f} - \hat{z}\hat{u} + 2i\lambda\hat{z}\hat{u}] d\lambda. \quad (5.5)$$

Mais d'après (5.3), on a aussi la majoration

$$|\lambda| \|(\lambda^2 + A)^{-1}\| \|\hat{z}\hat{f}(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\hat{z}\hat{f}(\lambda)\|$$

et donc, en utilisant la relation de Parseval et le fait que $z \leq 1$, avec $z = 0$ en dehors de $[T-2d, T+2d]$:

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda| > \varepsilon} |\lambda|^2 \|(\lambda^2 + A)^{-1}\|^2 \|\hat{z}\hat{f}(\lambda)\|^2 d\lambda &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \|z\hat{f}\|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{T+2d}{T-2d} \int_{T-2d}^{T+2d} \|f(t)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

On peut aussi montrer de la même manière que

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda| > \varepsilon} |\lambda|^2 \|(\lambda^2 + A)^{-1}\|^2 \|\hat{z}\hat{u}(\lambda)\|^2 d\lambda &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \|z\hat{u}\|^2 dt \\ &\leq \frac{c^2}{\varepsilon^2 d^4} \frac{T+2d}{T-2d} \int_{T-2d}^{T+2d} \|u(t)\|^2 dt \end{aligned} \quad (5.7)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda| > \varepsilon} |\lambda|^2 \|(\lambda^2 + A)^{-1}\|^2 4|\lambda|^2 \|\hat{z}\hat{u}(\lambda)\|^2 d\lambda &\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \|\dot{z}u\|^2 dt \\ &\leq \frac{c^2}{d^2} \frac{T+2d}{T-2d} \int_{T-2d}^{T+2d} \|u(t)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Enfin on a aussi

$$\int_{|\lambda| < \varepsilon} |\lambda|^2 \|\hat{v}(\lambda)\|^2 d\lambda \leq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \|zu\|^2 dt \leq \varepsilon^2 \frac{T+2d}{T-2d} \int_{T-2d}^{T+2d} \|u(t)\|^2 dt. \quad (5.9)$$

En dérivant (5.5) sous le signe d'intégration (ce qui est possible puisque v est une fonction continue à support compact) et en utilisant les inégalités (5.6) à (5.9), on obtient finalement

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\dot{v}(t)\|^2 dt \leq C(d, \varepsilon) \int_{T-2d}^{T+2d} (\|u(t)\|^2 + \|f(t)\|^2) dt$$

ou, puisque $v = u$ pour $|t-T| \leq \frac{3d}{2}$,

$$\int_{T-\frac{3d}{2}}^{T+\frac{3d}{2}} \|\dot{u}(t)\|^2 dt \leq C(d, \varepsilon) \int_{T-2d}^{T+2d} (\|u(t)\|^2 + \|f(t)\|^2) dt \quad (5.10)$$

où la constante $C(d, \varepsilon)$ peut s'écrire C_d puisque ε est arbitraire et n'a servi que dans les calculs intermédiaires; ceci achève donc la démonstration du lemme 3.

L'auteur tient à exprimer ici sa reconnaissance envers le professeur S.Zaidman pour sa bienveillante collaboration, ainsi qu'au Conseil National de la Recherche à Ottawa et au Ministère de l'Éducation du Québec, pour le soutien matériel apporté à ce travail.

REFERENCES

1. AGMON, S., NIRENBERG, L., Properties of solutions of ordinary differential Equations in Banach spaces. *Comm. Pure Appl. Math.* 16, 121-239, 1963.
2. AMERIO, L., Sull'integrazione delle funzioni quasi-periodiche a valori in uno spazio hilbertiano. *Atti Accad. Naz. Lincei*, 28, 1-4, 600-603, 1960.
3. AMERIO, L., Quasi-periodicità degli integrali ed energia limitata dell'equazione delle onde con termine noto quasi-periodico, I, II, III, *Rend. Acc. Naz. Lincei* 28, 147-152, 322-327, 461-466, 1960.
4. AMERIO, L., Sull'equazione delle onde con termine noto quasi-periodico, *Rend. Mat. e Appl. Roma* 19, 333-346, 1960.
5. AMERIO, L. et PROUSE, G., *Almost-Periodic Functions and Functional Equations*, van Nostrand-Rineholt, New York, 1971.
6. AMERIO, L., Sull'integrazione delle funzioni quasi-periodiche astratte, *Ann. Mat. Pura Appl.* 53, 371-382, 1961.
7. ARMINJON, P., *Quelques aspects de la théorie des équations différentielles opérationnelles*, thèse de doctorat, Université de Montréal, 1968.
8. BOCHNER, S., Fastperiodische Lösungen der Wellengleichung, *Acta Math.* 62, 227-237, 1934.
9. BOCHNER, S. and von NEUMANN, J., On compact solutions of operational-differential equations, *Ann. Math.* 36, 255-291, 1935.
10. CORDUNEANU, C., *Almost periodic functions*, Interscience-Wiley, 1968.
11. FOJAS, C., Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes dans l'espace. L'unicité et la presque-périodicité des solutions petites, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 32, 261-294, 1962.

12. FRIEDRICHS, K.O., Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren I-III, Math. Ann. 109, 465-487, 685-713, 1934; 110, 777-779, 1935.
13. GAGLIARDO, E., Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. Ricerche Mat. 7, 102-137, 1958.
14. GAGLIARDO, E., Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili, Ricerche Mat. 8, 24-51, 1959.
15. HÖRMANDER, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, Berlin-New York, 1964.
16. LADYŽENSKAJA, O., *The Mixed Problem for Hyperbolic Equations* (en russe), Moscou, 1953.
17. LIONS, J.L., *Equations différentielles-opérationnelles et problèmes aux limites*, Springer Verlag, 1961.
18. MAAK, W., *Fastperiodische Funktionen*, Springer Verlag, Berlin 1950.
19. MUCKENHOUT, C.F., Almost-periodic functions and vibrating systems, J.Math. Phys. 8, 1929.
20. NIRENBERG, L., Lectures on elliptic equations, Ann.Scuola Normale Superiore, Pisa, 1959.
21. PROUSE, G., Soluzioni quasi-periodiche dell' equazione di Navier-Stokes in due dimensioni, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 33, 186-212, 1963.
22. SOBOLEV, S.L., Sur la presque-périodicité des solutions de l'équation des ondes II, C.R.Doklady Acad.Sci.URSS 48, 542-545, 1945.
23. YOSIDA, K., *Functional Analysis*, Springer Verlag, 1964.
24. ZAIDMAN, S., Sur la presque-périodicité des solutions de l'équation des ondes non-homogène, J.Math. Mech. 8, 369-382, 1959.
25. ZAIDMAN, S., Solutions presque périodiques des équations hyperboliques, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 79, 151-198, 1962.
26. ZAIDMAN, S., Quasi-periodicità per una equazione operativa del primo ordine, Atti Accad.Naz.Lincei 35, 152-157, 1963.
27. ZAIDMAN, S., Quasi-periodicità per l'equazione di Poisson, Atti Accad.Naz. Lincei 34, 241-245, 1963.
28. ZAIDMAN, S., Soluzioni limitate, a quasi-periodiche dell'equazione di Poisson, Ann.Mat.Pura Appl. 64, 365-405, 1964.
29. ZAIDMAN, S., Soluzioni quasi-periodiche per alcune equazione differenziali in spazi hilbertiani, Ricerche Mat. 13, 118-134, 1964.
30. ZAIDMAN, S., Almost periodicity for some differential equations in Hilbert spaces. Atti Accad.Naz. Lincei, 37, 253-257, 1964.
31. ZAIDMAN, S., Equations différentielles abstraites, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Université de Montréal, 1965.

Département de Mathématiques
 Université de Montréal
 C.P. 6128, Montréal, Québec, Canada

Manuscrit reçu le 30 avril 1976
 Révisé le 1er mars 1977