

ANALYSE FONCTIONNELLE NON LINÉAIRE
ET APPLICATIONS À L'ÉQUILIBRE ÉCONOMIQUE

Jean-Pierre Aubin

PLAN

Introduction

1. Jeux à 2 personnes
2. Partitions continues de l'unité
3. Inégalités de Lasry et de Ky Fan
4. Equilibres non coopératifs de jeux à n personnes (I)
5. Système de prix d'équilibre walrasien (I)
6. Correspondances héli-contiues supérieurement
7. Théorèmes d'existence d'un point critique d'une correspondance
8. Théorèmes de points fixes d'une correspondance
9. Théorèmes de surjectivité pour une correspondance
10. Inéquations variationnelles
11. Inéquations quasi-variationnelles
12. Equilibre non coopératifs de jeux à n personnes (II)
13. Systèmes de prix d'équilibre Walrasien (II)

INTRODUCTION

L'objet des quelques pages qui suivent est de présenter de façon succincte et autonome les principaux résultats d'analyse non linéaire concernant l'existence de points critiques et de points fixes d'une correspondance, des théorèmes de surjectivité, ainsi que l'existence de solutions d'inéquations variationnelles et quasi-variationnelles.

Pour rendre la lecture de ces pages plus attrayante, nous avons mentionné quelques applications à la théorie des jeux et à l'équilibre économique. Ces applications de l'analyse non linéaire, moins connues que les applications usuelles de l'analyse, devraient convaincre le lecteur de l'importance des théorèmes que nous présentons.

Nous avons tenté d'unifier les techniques de démonstration en les ramenant toutes à l'utilisation de l'inégalité de Ky Fan et à celle des partitions continues de l'unité. (Ces deux outils seront donc rappelés dans les trois premiers paragraphes.) En fait, les résultats que nous démontrons sont tous équivalents; on aurait pu les ordonner et montrer que chaque théorème implique le suivant; cela aurait considérablement augmenté la longueur de l'exposé. Par expérience personnelle, nous avons constaté que l'usage de l'inégalité de Ky Fan comme source permet la plus brève des présentations.

Nous n'avons pas cherché à donner les théorèmes les plus généraux; nous nous sommes cantonnés au cas des espaces de Hilbert (et même, en fait, au cas des espaces de dimension finie). Nous avons cependant choisi les démonstrations qui se généralisent sans difficulté aux espaces plus généraux.

Les trois premiers paragraphes ont pour but de démontrer l'inégalité de Ky Fan qui, comme nous le verrons, est un résultat équivalent au théorème de point fixe de Brouwer, mais qui nous semble plus maniable.

Nous donnons aussitôt des applications à la théorie des jeux (théorème de Nash) et à l'équilibre économique (paragraphes 4 et 5). Ces paragraphes peuvent être omis en première lecture. Nous définissons au paragraphe 6 la notion d'hémi-continuité supérieure d'une correspondance. Nous abordons au paragraphe 7 le théorème fondamental de Brouwer-Ky Fan d'existence d'un point critique $\bar{x}$ d'une correspondance S (c'est-à-dire de la solution de l'équation multivoque $0 \in S(\bar{x})$). La démonstration que nous donnons est due à B.Cornet. Nous proposons ensuite quelques généralisations; nous adaptions également un théorème de Granas pour déduire par homotopie d'autres théorèmes d'existence de points critiques.

Ce paragraphe est de loin le plus important.

Nous en déduisons des théorèmes de point fixe au paragraphe 8 (en particulier, le célèbre théorème de Kakutani) et des théorèmes de surjectivité au paragraphe 9.

Nous démontrons au paragraphe 10 un théorème d'existence de solutions $\bar{x}$ d'équation variationnelle pour une correspondance S sur un ensemble convexe fermé X . Au paragraphe 11, nous prouverons l'existence d'une solution d'inéquations quasi-variationnelles, qui permet de retrouver au paragraphe 12 un théorème d'existence d'un équilibre non coopératif dû à Arrow-Debreu-Nash. Enfin, le paragraphe 13 est consacré à la démonstration du théorème de Debreu-Gale-Nikaido à partir duquel on obtient l'existence d'un équilibre économique; c'est le théorème le plus commode permettant de démontrer l'existence d'une solution dans de nombreux modèles mathématiques que l'on rencontre en économie.

Je voudrais souligner que Bernard Cornet est l'auteur de la plupart des idées concernant la présentation de l'analyse non linéaire que nous avons choisie.

Je remercie l'Université de Montréal de m'avoir donné l'occasion d'enseigner ce cours que je voudrais évidemment dédier à Ky Fan.

1. JEUX A 2 PERSONNES

On désigne par E et F les ensembles de stratégies de deux joueurs Emile et François respectivement et par $f(x,y)$ la perte d'Emile associée aux choix des stratégies $x \in E$ et $y \in F$ d'Emile et de François. Dans le cadre d'un comportement non-coopératif des joueurs (c'est-à-dire, sans échange d'informations entre les joueurs), Emile associera à toute $x \in E$ qu'il contrôle la pire des pertes

$$f^\#(x) = \sup_{y \in F} f(x,y) \quad (1)$$

qu'il peut subir dans tous les cas.

Par suite, sans autres hypothèses, Emile est conduit à choisir $\bar{x} \in E$ minimisant la fonction $f^\#$.

Proposition 1.

Nous supposons que

$$E \text{ est compact} \quad (2)$$

et que

$$\forall y \in F, x \rightarrow f(x,y) \text{ est semi-continue inférieurement.} \quad (3)$$

Alors, il existe $\bar{x} \in E$ tel que

$$\sup_{y \in F} f(\bar{x},y) = \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x,y) = v^\# \quad (4)$$

Démonstration.

Puisque les fonctions $x \rightarrow f(x,y)$ sont semi-continues inférieurement, il en est de même de la fonction $f^\#$.

Puisque E est compact, le théorème de Weierstrass implique l'existence de $\bar{x} \in E$ qui minimise $f^\#$: D'après (1), cela s'écrit:

$$\sup_{y \in F} f(\bar{x},y) = f^\#(\bar{x}) = \inf_{x \in E} f^\#(x) = \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x,y). \quad \blacksquare$$

En fait les hypothèses (2) et (3) de la proposition 1 entraînent une conclusion plus forte que (4).

Nous introduisons

$$\mathcal{K}, \text{ l'ensemble des suites finies } K = \{y_1, \dots, y_n\} \text{ de } F \quad (5)$$

et désignons par:

$$v^h = \sup_{K \in \mathcal{K}} \inf_{x \in E} \max_{y \in K} f(x, y). \quad (6)$$

Puisque

$$\max_{y \in K} f(x, y) \leq \sup_{y \in F} f(x, y),$$

on en déduit que

$$\inf_{x \in E} \max_{y \in K} f(x, y) \leq \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y) = v^\#.$$

Cela implique que

$$v^h \leq v^\#. \quad (7)$$

Nous allons montrer que sous les hypothèses topologiques de la proposition 1, on a l'égalité $v^\# = v^h$.

Théorème 1.

Supposons que les hypothèses (2) et (3) soient satisfaites. Il existe alors $\bar{x} \in E$ tel que

$$\sup_{y \in F} f(\bar{x}, y) = v^\# = v^h. \quad (8)$$

Démonstration.

Il suffit de montrer qu'il existe $\bar{x} \in E$ tel que

$$\sup_{y \in F} f(\bar{x}, y) \leq v^h. \quad (9)$$

(Puisque $v^\# \leq \sup_{y \in F} f(\bar{x}, y)$ et $v^h \leq v^\#$, on en déduira que $v^h = v^\#$.) Posons

$$S_y = \{x \in E \text{ tel que } f(x, y) \leq v^h\}. \quad (10)$$

L'inégalité (9) revient à dire que

$$\bar{x} \in \bigcap_{y \in F} S_y. \quad (11)$$

Il nous faut donc montrer que cette intersection est non vide.

Pour cela, nous allons vérifier que les S_y sont des ensembles fermés vérifiant la propriété de l'intersection finie.

L'ensemble S_y est fermé puisque S_y est une section inférieure de la fonction semi-continue inférieurement $x \rightarrow f(x, y)$.

Montrons que pour toute suite finie

$$K = \{y_1, \dots, y_n\} \in \mathcal{K} \text{ de } F,$$

l'intersection

$$\bigcap_{i=1, \dots, n} S_{y_i} \neq \emptyset.$$

Puisque E est compact et puisque

$$x \mapsto \max_{i=1, \dots, n} f(x, y_i) = \max_{y \in K} f(x, y)$$

est semi-continue inférieurement, on en déduit qu'il existe $\bar{x} \in E$ qui minimise cette fonction. Un tel $\bar{x} \in E$ vérifie:

$$\max_{y \in K} f(\bar{x}, y) = \inf_{x \in E} \max_{y \in K} f(x, y) \leq \sup_{K \in \mathcal{K}} \inf_{x \in E} \max_{y \in K} f(x, y) \leq v^h$$

Puisque E est compact, l'intersection des fermés S_y est non vide et il existe $\bar{x}$ vérifiant (11), et donc (9). ■

2. PARTITIONS CONTINUES DE L'UNITE

Nous allons montrer dans ce paragraphe que l'on peut associer à tout recouvrement fini d'un espace métrique une partition de l'unité qui lui est subordonnée.

Définition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un espace métrique E . On appelle support de f et on note $\text{supp}(f)$ le plus petit ensemble "fermé" S tel que $f(x) = 0 \quad x \notin S$.

En d'autres termes, le support de f est l'adhérence dans E de l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. On peut encore dire que c'est l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que, dans tout voisinage V de x , il existe un point y tel que $f(y) \neq 0$.

Définition 2

Considérons un recouvrement ouvert $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ de E . On appelle partition continue de l'unité subordonnée à ce recouvrement une famille $\{f_i\}_{i \in I}$ de fonctions continues de E dans $[0, 1]$ telle que

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^n f_i(x) = 1 \\ \text{(ii)} \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \text{supp } f_i \subset A_i. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Avant de démontrer l'existence d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert fini, nous aurons besoin des propositions suivantes.

Proposition 1. (Séparation de deux fermés par une fonction continue.)

Soient A et B deux sous-ensembles fermés non vides disjoints d'un espace métrique E . Il existe alors une fonction continue g de E dans $[0,1]$ telle que

$$g(x) = 0 \text{ pour tout } x \in A, \quad g(x) = 1 \text{ pour tout } x \in B.$$

Démonstration.

Puisque A et B sont disjoints, $d(x,A) + d(x,B) > 0$ pour tout $x \in E$. Donc la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

est une fonction continue de E dans $[0,1]$, s'annulant sur A et égale à 1 sur B .

Proposition 2.

Supposons que $E = A \cup B$ soit la réunion de deux ouverts. Il existe un ouvert W tel que

$$\bar{W} \subset A \quad \text{et} \quad E = W \cup B \quad (2)$$

Démonstration

Tout d'abord, nous allons construire un ouvert V tel que

$$\bar{A} \subset V \subset \bar{V} \subset B. \quad (3)$$

Si $A = E$, on prend $V = \emptyset$ et si $B = E$, on prend $V = E$. Puisque $E = A \cup B$, les fermés non vides $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont disjoints. D'après la proposition 1, il existe une fonction continue de E dans $[0,1]$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \bar{A}$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \bar{B}$. Alors $\bar{A}$ est contenu dans l'ouvert $V = \{y \in E \text{ tel que } f(y) < \frac{1}{2}\}$ et $\bar{V}$ est évidemment contenu dans B .

Prenons alors $W = \bar{V}$, qui est ouvert. Puisque $\bar{A} \subset V$, on en déduit que $\bar{W} = \bar{V} \subset A$. Puisque $\bar{V} \subset B$, il en résulte que $E = W \cup B$. ■

Proposition 3.

Soit $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ un recouvrement ouvert fini de E . Il existe un recouvrement ouvert $\{W_i\}_{i=1,\dots,n}$ tel que

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \bar{W}_i \subset A_i. \quad (4)$$

Démonstration

On construit le recouvrement W_i par récurrence à l'aide de la proposition 1.

En posant $B_1 = \bigcup_{i=2}^n A_i$, on obtient $E = A_1 \cup B_1$.

La proposition 2 implique l'existence d'un ouvert $W_1 \subset A_1$ tel que

$$\bar{W}_1 \subset A_1 \quad \text{et} \quad E = W_1 \cup B_1 = W_1 \cup \bigcup_{i=1}^n A_i. \quad (5)$$

Supposons que nous ayons construit des ouverts W_j ($1 \leq j \leq k-1$) tels que

$$\bar{W}_j \subset A_j \quad \text{si} \quad 1 \leq j \leq k-1; \quad E = \bigcup_{i=1}^{k-1} W_i \cup \bigcup_{j=k}^n A_j. \quad (6)$$

On introduit l'ouvert

$$B_k = \bigcup_{i=1}^{k-1} W_i \cup \bigcup_{j=k+1}^n A_j \quad (7)$$

de telle sorte que $E = A_k \cup B_k$ d'après (6). La proposition 1 implique l'existence d'un ouvert $W_k \subset A_k$ tel que $\bar{W}_k \subset A_k$ et $E = W_k \cup B_k$. On a donc construit k ouverts W_i tels que

$$\bar{W}_i \subset A_i \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq k, \quad E = \bigcup_{i=1}^k W_i \cup \bigcup_{j=k+1}^n A_j.$$

La récurrence peut donc se poursuivre, ce qui démontre la proposition. ■

Théorème 1.

Pour tout recouvrement ouvert fini d'un espace métrique E , il existe une partition continue de l'unité qui lui est subordonnée.

Démonstration

Supposons que $E = \bigcup_{i=1}^n A_i$ où les A_i sont ouverts.

D'après la proposition 3, il existe n ouverts $W_i \subset A_i$ tels que $\bar{W}_i \subset A_i$ et $E = \bigcup_{i=1}^n W_i$.

D'après la proposition 1 de séparation, il existe des fonctions continues h_i de E dans $[0,1]$ telles que

$$\left. \begin{aligned} h_i(x) &= 1 \quad \text{si} \quad x \in \bar{W}_i \\ h_i(x) &= 0 \quad \text{si} \quad x \in \bar{A}_i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

puisque $\bar{W}_i$ et $\bar{A}_i$ sont des fermés non vides disjoints. On pose alors

$$g_i(x) = \max(0, h_i(x) - \frac{1}{2}). \quad (10)$$

Les fonctions g_i sont continues. Le support de g_i est contenu dans l'ensemble $\{x \in E \text{ tels que } h_i(x) \geq \frac{1}{2}\}$, et par suite, est contenu dans A_i . En posant

$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) > 0$, puisque $E = \bigcup_{i=1}^n \bar{W}_i$, les fonctions f_i définies par

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{g(x)} \quad (11)$$

forment une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement de E par les A_i . ■

3. INEGALITES DE LASRY ET DE KY FAN

Considérons les joueurs Emile et François, dont les ensembles de stratégies respectifs sont désignés par E et F . On désigne par $f(x,y)$ la perte subie par Emile et le gain de François lorsqu'Emile joue $x \in E$ et lorsque son partenaire joue $y \in F$.

Rappelons que

$$v^\# = \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x,y) \quad (1)$$

désigne la meilleure perte d'Emile lorsqu'il n'a aucune information sur le choix de François.

Supposons que François bénéficie de l'information sur les stratégies mises en oeuvre par Emile. Au lieu de choisir une stratégie $y \in F$, François pourra choisir une "règle de décision" D , c'est-à-dire une application D de E dans F associant à toute stratégie $x \in E$ jouée par Emile une stratégie $D(x) \in F$.

Dans ce cas, François associera à une telle règle de décision le pire des gains

$$f^b(D) = \inf_{x \in E} f(x, D(x)) \quad (2)$$

et cherchera à maximiser $f^b(D)$ sur l'ensemble des règles de décision permises.

On a toujours, quelle que soit la règle de décision D ,

$$f^b(D) = \inf_{x \in E} f(x, D(x)) \leq \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x,y) = v^\#. \quad (3)$$

Proposition 1.

Si François a le droit d'utiliser toutes les règles de décision possibles, alors:

$$\sup_{D \in \mathcal{J}(E,F)} \inf_{x \in E} f(x, D(x)) = \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x,y), \quad (4)$$

où $\mathcal{J}(E,F)$ est l'ensemble des applications de E dans F . En effet, par définition, on peut associer à tout $\varepsilon > 0$ et à tout $x \in E$ une stratégie $D_\varepsilon(x) \in F$ telle que

$$\sup_{y \in F} f(x,y) \leq f(x, D_\varepsilon(x)) + \varepsilon. \quad (5)$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} v^\# &= \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y) \leq f^b(D_\varepsilon) + \varepsilon \\ &\leq \sup_{D \in \mathcal{C}(E, F)} \inf_{x \in E} f(x, D(x)) + \varepsilon \end{aligned}$$

Puisque cette inégalité a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient l'inégalité $v^\# \leq \sup_{D \in \mathcal{C}(E, F)} \inf_{x \in E} f(x, D(x))$, qui, jointe aux inégalités (3), impliquent l'égalité cherchée (4). ■

Nous allons montrer que, sous des hypothèses supplémentaires, l'égalité (4) demeure lorsqu'on oblige François à utiliser uniquement des règles de décision continues (afin de "modéliser" un comportement "régulier" de François).

Théorème 1 (Egalité de Lasry)

Nous supposons que

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad E \text{ est compact} \\ \text{(ii)} \quad \forall y \in F, \quad x \rightarrow f(x, y) \text{ est semi-continue inférieurement} \end{array} \right\} \quad (6)$$

et que

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad F \text{ est un sous-ensemble convexe} \\ \text{(ii)} \quad \forall x \in E, \quad y \rightarrow f(x, y) \text{ est concave.} \end{array} \right\} \quad (7)$$

Alors, si $\mathcal{C}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications continues de E dans F , on a l'égalité

$$\sup_{D \in \mathcal{C}(E, F)} \inf_{x \in E} f(x, D(x)) = \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y). \quad (8)$$

Démonstration

Nous savons déjà que $\sup_{D \in \mathcal{C}(E, F)} \inf_{x \in E} f(x, D(x)) \leq v^\#$ d'après (3). Il nous faut donc démontrer l'inégalité inverse. Tout d'abord, nous pouvons associer à tout $\varepsilon > 0$ une application (non nécessairement continue) D_ε de E dans F vérifiant (5).

D'autre part, puisque les fonctions $x \rightarrow f(x, y)$ sont semi-continues inférieurement, il existe des voisinages $B(x, \eta(x))$ de x tels que

$$\forall z \in B(x, \eta(x)), \quad f(x, D_\varepsilon(x)) \leq f(z, D_\varepsilon(x)) + \varepsilon. \quad (9)$$

Puisque E est compact, il peut être recouvert par n boules $\bar{B}(x_i, \eta(x_i))$. Soit $\{g_i\}_{i=1, \dots, n}$ une partition subordonnée à ce recouvrement. On introduit la fonction D définie par

$$D(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) D_\varepsilon(x_i),$$

qui est continue puisque les fonctions g_i le sont. Enfin, puisque les fonctions $y \rightarrow f(x, y)$ sont concaves, puisque $g_i(x) \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$, on obtient

$$f(x, D(x)) \geq \sum_{i \in I(x)} g_i(x) f(x, D_\varepsilon(x_i)) \quad (10)$$

où $I(x)$ est l'ensemble des entiers $i = 1, \dots, n$ tels que $g_i(x) > 0$. Cet ensemble n'est pas vide puisque $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$.

D'autre part, si $g_i(x) > 0$, x appartient au support de g_i , qui est contenu dans la boule $\bar{B}(x_i, \eta(x_i))$. On déduit alors de (9) que $f(x, D_\varepsilon(x_i)) \geq f(x_i, D_\varepsilon(x_i)) - \varepsilon$ et de (5) que $f(x_i, D_\varepsilon(x_i)) \geq \sup_{y \in F} f(x_i, y) - \varepsilon \geq v^\# - \varepsilon$.

Donc, si $i \in I(x)$, on obtient $f(x, D_\varepsilon(x_i)) \geq v^\# - 2\varepsilon$. Alors (10) implique que $f(x, D(x)) \geq \sum_{i \in I(x)} g_i(x) (v^\# - 2\varepsilon) = v^\# - 2\varepsilon$. Il en résulte que $\inf_{x \in E} f(x, D(x)) \geq v^\# - 2\varepsilon$ et par suite, que $\sup_{D \in \mathcal{C}(E, F)} \inf_{x \in E} f(x, D(x)) \geq v^\# - 2\varepsilon$.

En faisant tendre ε vers 0, on obtient l'inégalité cherchée. ■

Inégalité de Ky Fan

Nous allons démontrer l'inégalité de Ky Fan à l'aide de l'égalité de Lasry et du théorème de Browder que nous admettons et dont nous rappelons l'énoncé:

Théorème de Browder

Toute application continue D d'un sous-ensemble convexe compact K d'un espace vectoriel de dimension finie dans lui-même possède un point fixe.

Tout d'abord, nous allons établir une autre expression de $v^\#$.

Dans le cadre de la théorie des jeux, nous supposons cette fois que c'est Emile qui bénéficie de l'information sur le choix des stratégies de François et qui a le droit de choisir des règles de décision continues $C \in \mathcal{C}(F, E)$ qui lui permettent d'associer continûment à toute stratégie $y \in F$ jouée par François une stratégie $C(y) \in E$.

Théorème 2

On fait les hypothèses (6) et (7) du théorème 1. Alors, si $\mathcal{C}(F, E)$ désigne l'ensemble des règles de décision continues de F dans E , on a l'égalité

$$\inf_{C \in \mathcal{C}(F,E)} \sup_{y \in F} f(C(y), y) = \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y). \quad (11)$$

Démonstration

Le théorème 2 résulte du théorème 1, du théorème de point fixe de Brouwer et du théorème 1 du paragraphe 1 sur les jeux à deux personnes.

Nous allons utiliser l'ensemble convexe compact

$$M^n = \{ \lambda \in \mathbb{R}_+^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n \lambda^i = 1 \}. \quad (12)$$

L'inégalité $\inf_{G \in \mathcal{C}(F,E)} \sup_{y \in F} f(G(y), y) \leq v^\#$ est évidemment toujours satisfaite.

Puisque E est compact et les fonctions $x \rightarrow f(x, y)$ sont semi-continues inférieurement, le théorème 1 du paragraphe 1 implique l'existence de $\bar{x} \in E$ tel que

$$\sup_{y \in F} f(\bar{x}, y) = v^\# = \sup_{K = \{y_1, \dots, y_n\} \in \mathcal{K}} \inf_{x \in E} \max_{i=1, \dots, n} f(x, y_i) \quad (13)$$

Il suffit alors de démontrer que pour tout ensemble fini $K = \{y_1, \dots, y_n\}$ et toute application continue $C \in \mathcal{C}(F, E)$, on a

$$\inf_{x \in E} \max_{i=1, \dots, n} f(x, y_i) \leq \sup_{y \in F} f(C(y), y). \quad (14)$$

Tout d'abord, on remarque que

$$\left. \begin{aligned} \inf_{x \in E} \max_{i=1, \dots, n} f(x, y_i) &= \inf_{x \in E} \sup_{\lambda \in M^n} \sum_{i=1}^n \lambda^i f(x, y_i) \\ &\leq \inf_{\mu \in M^n} \sup_{\lambda \in M^n} \sum_{i=1}^n \lambda^i f\left(C\left(\sum_{j=1}^n \mu^j y_j\right), y_i\right) \\ &= \inf_{\mu \in M^n} \sup_{\lambda \in M^n} \phi(\mu, \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

où la fonction ϕ est définie sur $M^n \times M^n$ par

$$\phi(\mu, \lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda^i f\left(C\left(\sum_{j=1}^n \mu^j y_j\right), y_i\right). \quad (16)$$

Puisque C est continue et puisque les fonctions $x \rightarrow f(x, y_i)$ sont semi-continues inférieurement, on en déduit que les fonctions $\mu \rightarrow \phi(\mu, \lambda)$ sont semi-continues inférieurement. Les fonctions $\lambda \rightarrow \phi(\mu, \lambda)$ sont linéaires, donc concaves. L'ensemble M^n est convexe et compact.

Le théorème 1 implique donc que

$$\inf_{\mu \in M^n} \sup_{\lambda \in M^n} \varphi(\mu, \lambda) = \sup_{D \in \mathcal{C}(M^n, M^n)} \inf_{\mu \in M^n} \varphi(\mu, D(\mu)). \quad (17)$$

Mais le théorème de Brouwer entraîne que l'on peut associer à $D \in \mathcal{C}(M^n, M^n)$ un point fixe $\mu_D \in M^n$. Donc

$$\inf_{\mu \in M^n} \varphi(\mu, D(\mu)) \leq \varphi(\mu_D, D(\mu_D)) = \varphi(\mu_D, \mu_D) \leq \sup_{\mu \in M^n} \varphi(\mu, \mu).$$

Ceci entraîne alors que

$$\sup_{D \in \mathcal{C}(M^n, M^n)} \inf_{\mu \in M^n} \varphi(\mu, D(\mu)) \leq \sup_{\mu \in M^n} \varphi(\mu, \mu). \quad (18)$$

D'autre part, puisque les fonctions $y \rightarrow f(x, y)$ sont supposées concaves, on obtient

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mu, \mu) &= \sum_{i=1}^n \mu^i f\left(C\left(\sum_{j=1}^n \mu^j y_j\right), y_i\right) \\ &\leq f\left(C\left(\sum_{j=1}^n \mu^j y_j\right), \sum_{j=1}^n \mu^j y_j\right) \\ &\leq \sup_{y \in F} f\left(C(y), y\right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Donc les inégalités (15), (17), (18) et (19) impliquent l'inégalité (14) qu'il fallait démontrer. ■

En particulier, nous en déduisons l'importante inégalité de Ky Fan suivante.

Théorème 3 (Inégalité de Ky Fan)

Supposons que E soit un sous-ensemble convexe compact d'un espace de Banach et que f soit une fonction de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad &\forall y \in E, \quad x \rightarrow f(x, y) \text{ est semi-continue inférieurement} \\ (ii) \quad &\forall x \in E, \quad y \rightarrow f(x, y) \text{ est concave.} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Il existe alors $\bar{x} \in E$ tel que

$$\sup_{y \in E} f(\bar{x}, y) \leq \sup_{y \in E} f(y, y). \quad (21)$$

Démonstration

Les théorèmes 1 du paragraphe 1 et 1 de ce paragraphe impliquent l'existence de $\bar{x} \in E$ tel que

$$\sup_{y \in E} f(\bar{x}, y) \leq v^\# \leq \inf_{C \in \mathcal{C}(E, E)} \sup_{y \in E} f(C(y), y) \leq \sup_{y \in E} f(y, y)$$

puisque l'application identité est continue de E dans E . ■

Remarque 1

Nous avons déduit l'inégalité de Ky Fan du théorème de point fixe de Brouwer. En fait, ce sont deux résultats équivalents: nous pouvons déduire le théorème de Brouwer de l'inégalité de Ky Fan à l'aide du théorème des projections.

En effet, soit D une application continue d'un convexe compact K d'un espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Posons

$$f(x, y) = \langle x - D(x), x - y \rangle \quad (22)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$.

Cette fonction f vérifie évidemment les hypothèses du théorème 3 (Inégalité de Ky Fan). Il existe donc un élément $\bar{x} \in K$ tel que

$$\langle \bar{x} - D(\bar{x}), \bar{x} - y \rangle \leq 0 \quad (23)$$

pour tout $y \in K$.

Cette inégalité exprime que $\bar{x}$ est la projection de meilleure approximation de $D(\bar{x})$ sur K . Puisque $D(\bar{x}) \in K$ par hypothèse, on en déduit que $\bar{x} = D(\bar{x})$, c'est à-dire que D possède un point fixe $\bar{x}$. ■

4. EQUILIBRES NON-COOPERATIFS DE JEUX A n PERSONNES (I)

On désigne par $N = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des n joueurs. Nous posons $\hat{i} = \{j \in N \text{ tels que } j \neq i\}$. Un jeu non-coopératif est décrit dans la donnée de

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } n \text{ ensembles de stratégies } E^i \\ \text{(ii) } n \text{ fonctions de perte } f_i: \prod_{i=1}^n E^i \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad (1)$$

La fonction de perte f_i du i ème joueur associe à chaque multistratégie $x = \{x^1, \dots, x^n\} \in \prod_{i=1}^n E^i$ la perte $f_i(x) = f_i(x^1, \dots, x^n)$ qu'il subit.

Chaque joueur i distinguera la stratégie $x^i \in E^i$ qu'il contrôle des multistratégies $x^{\hat{i}} = \{x^1, \dots, x^n\} \in \prod_{j \neq i} E^j$ mises en oeuvre par la coalition adverse $\hat{i}$.

De son point de vue, les multistratégies sont décomposées ainsi:

$$x = \{x^i, x^{\hat{i}}\} \in E^i \times \prod_{j \neq i} E^j. \quad (2)$$

Nous décrivons le comportement non coopératif des joueurs de la façon suivante :

Si la coalition adverse met en oeuvre la multistratégie $x^{\hat{i}} \in \prod_{j \neq i} E^j$ nous supposons que le i ème joueur choisit une stratégie $x^i \in E^i$ qui minimise la fonction de perte $y^i \rightarrow f_i(y^i, x^{\hat{i}})$.

Définition 1

Nous dirons qu'une multistratégie $x = \{x^1, \dots, x^n\}$ est un *équilibre non coopératif* si pour tout joueur i , la stratégie x^i minimise la fonction de perte $y^i \rightarrow f_i(y^i, x^{\hat{i}})$.

Autrement dit, $x = \{x^1, \dots, x^n\}$ est un équilibre non coopératif si

$$\forall i \in N, f_i(x) = f_i(x^i, x^{\hat{i}}) = \min_{y^i \in E^i} f_i(y^i, x^{\hat{i}}). \quad (3)$$

Remarque 1

Ce concept d'équilibre non-coopératif décrit une propriété de stabilité individuelle de la multistratégie x , au sens où aucun joueur n'a intérêt à modifier seul son choix x^i lorsque la coalition adverse a mis en oeuvre $x^{\hat{i}}$.

Théorème 1 (Nash)

Nous supposons que

$$\forall i \in N, \text{ les ensembles } E^i \text{ sont convexes compacts} \quad (4)$$

et que

$$\left. \begin{array}{l} \forall i \in N, \text{ les fonctions } f_i \text{ sont continues} \\ \text{et les fonctions } y^i \rightarrow f_i(y^i, x^{\hat{i}}) \text{ sont convexes.} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Il existe alors un équilibre non coopératif.

Démonstration

Le théorème résulte du théorème 3.3 de Ky Fan (c'est-à-dire, en fait, du théorème de Brouwer que nous avons admis).

En effet, on introduit l'ensemble E et la fonction définie par

$$\left. \begin{array}{l} (i) \ E = \prod_{i=1}^n E^i \\ (ii) \ \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n (f_i(x^i, x^{\hat{i}}) - f_i(y^i, x^{\hat{i}})). \end{array} \right\} \quad (6)$$

L'ensemble E est convexe compact, comme produit d'ensembles convexes compacts E^i (d'après l'hypothèse (4)). D'autre part, les hypothèses (5) impliquent évidemment que les fonctions $x \rightarrow \varphi(x,y)$ sont continues et $y \rightarrow \varphi(x,y)$ sont concaves. Le théorème de Ky Fan entraîne donc l'existence de $x = \{x^i, x^{\hat{i}}\} \in E$ tel que

$$\sup_{y \in E} \varphi(x,y) \leq \sup_{y \in E} \varphi(x,y) = 0$$

puisque $\varphi(y,y) = 0$ pour tout y .

En particulier, prenons $y = \{y^i, x^{\hat{i}}\}$.

L'inégalité $\varphi(x,y) \leq 0$ s'écrit

$$f_i(x^i, x^{\hat{i}}) - f_i(y^i, x^{\hat{i}}) + \sum_{j \neq i} (f_j(x^j, x^{\hat{j}}) - f_j(y^j, x^{\hat{j}})) \leq 0. \quad (7)$$

Or $x = \{x^j, x^{\hat{j}}\} = \{y^j, x^{\hat{j}}\}$ toutes les fois que $j \neq i$. Donc (7) implique que

$$\forall y^i \in E^i, f_i(x^i, x^{\hat{i}}) \leq f_i(y^i, x^{\hat{i}}), \quad (8)$$

c'est-à-dire, que x est un équilibre non coopératif. ■

Considérons en particulier le cas d'un jeu à deux joueurs et à somme nulle, c'est-à-dire le cas où

$$E^1 = E, E^2 = F, f_1(x,y) = f(x,y) \text{ et } f_2(x,y) = -f(x,y).$$

Proposition 1

Un couple $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ est un équilibre non-coopératif d'un jeu à deux personnes et à somme nulle si et seulement si

$$\forall x \in E, y \in F, f(\bar{x}, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x, \bar{y}). \quad (9)$$

Dans ce cas, on obtient

$$\sup_{y \in F} \inf_{x \in E} f(x,y) = \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x,y). \quad (10)$$

Démonstration

Dire que $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in E \times F$ est un équilibre non coopératif est dire que

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x, \bar{y}) \quad \text{et} \quad -f(\bar{x}, \bar{y}) \leq -f(\bar{x}, y) \quad (11)$$

pour tout $x \in E, y \in F$. Dans ce cas, on obtient l'égalité (10). ■

Définition 2

Tout couple $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in E \times F$ vérifiant (9) est appelé *point selle* de f .

Le théorème 1 de Nash implique le célèbre théorème de von Neumann d'existence d'un point selle.

Théorème 2 (von Neumann)

Nous supposons que

$$E \text{ et } F \text{ sont des ensembles convexes compacts} \quad (12)$$

et que

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } \forall y \in F, x \mapsto f(x,y) \text{ est semi-continue inférieurement et convexe} \\ \text{(ii) } \forall x \in E, y \mapsto f(x,y) \text{ est semi-continue supérieurement et concave} \end{array} \right\} (13)$$

Il existe alors un point selle.

Démonstration

On applique le théorème de Ky Fan à la fonction définie sur $(E \times F)^2$ par $\varphi(\{\bar{x}, \bar{y}\}, \{x, y\}) = f(\bar{x}, y) - f(x, \bar{y})$, qui est semi-continue inférieurement par rapport à $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ et concave par rapport à $\{x, y\}$. Le théorème de Ky Fan implique alors l'existence de $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ tel que

$$\varphi(\{\bar{x}, \bar{y}\}, \{x, y\}) \leq \sup_{\{x, y\}} (\varphi(\{x, y\}, \{x, y\})) = 0. \quad (14)$$

Cette inégalité s'écrit: $f(\bar{x}, y) \leq f(x, \bar{y})$ pour tout $x \in E, y \in F$. En prenant successivement $x = \bar{x}$ et $y = \bar{y}$, on en déduit que $f(\bar{x}, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x, \bar{y})$.

Remarque 1

On peut démontrer ce théorème sans utiliser le théorème de point fixe de Brouwer, mais seulement le théorème de séparation de deux convexes dans des espaces de dimension finie.

Remarque 2

Nous poursuivrons cette étude au paragraphe 12.

5. SYSTEMES DE PRIX D'EQUILIBRE WALRASIEEN (I)

On considère un espace de dimension finie $U = \mathbb{R}^n$ représentant un espace de complexes de biens. Son dual représente alors l'espace des systèmes de prix et

$$M^n = \{p \in \mathbb{R}_+^{n*} \text{ tels que } \sum_{k=1}^n p^k = 1\}$$

est interprété comme un ensemble de prix normalisés.

Nous supposons maintenant que la description de l'économie est résumée par une

fonction de revenu

$$p \in M^n \rightarrow r(p) \in R \quad (1)$$

associant à tout système de prix p le revenu total produit par l'économie.

Considérons alors I consommateurs $i = 1, \dots, I$, dont le but est de choisir des complexes de biens $x^i \in U$ que nous appellerons consommations. Ceci étant, nous dirons que I consommations forment une allocation si pour tout système de prix $q \in M^n$ nous avons:

$$\sum_{i=1}^I \langle q, x^i \rangle \leq r(q) \quad (2)$$

c'est-à-dire, si pour tout système de prix q , la valeur de la somme des complexes de biens consommés est inférieure au revenu total produit par l'économie.

Il y a un ensemble infini de telles allocations; nous allons construire un "mécanisme" (théorique) permettant de choisir une telle allocation en faisant des hypothèses supplémentaires sur le comportement des consommateurs et sur la répartition des revenus entre eux.

Nous supposons que le comportement du consommateur i est décrit par une fonction de demande $f_i: M^n \times R \rightarrow U$ associant à tout système de prix $p \in M^n$ et à tout revenu r une consommation $x = f_i(p, r)$ vérifiant la propriété

$$\langle p, x \rangle = \langle p, f_i(p, r) \rangle \leq r. \quad (3)$$

Cette propriété exprime que pour chaque système de prix p , la valeur de la demande $f_i(p, r)$ est inférieure au revenu r .

Nous supposons également que le revenu $r(p)$ produit par l'économie est partagé entre les I consommateurs:

$$r(p) = \sum_{i=1}^I r_i(p) \quad (4)$$

où $r_i(p)$ est la part du revenu total allouée au consommateur i .

Le problème se pose de savoir s'il existe un système de prix $\bar{p}$ de M^n tel que

$$\text{les consommations } f_i(\bar{p}, r_i(\bar{p})) \text{ forment une allocation.} \quad (5)$$

Definition 1

Nous dirons qu'un système de prix $\bar{p} \in M^n$ vérifiant (5) est un *système de prix d'équilibre walrasien* associé aux fonctions de demande f_i et à la répartition du revenu total (4).

Théorème 1

Supposons que les fonctions f_i et r_i soient continues et que la fonction $r(\cdot)$ soit convexe. Il existe alors un système de prix d'équilibre walrasien.

Démonstration

Considérons la fonction définie sur le produit $M^n \times M^n$ par

$$\varphi(p, q) = \sum_{i=1}^I \langle q, f_i(p, r_i(p)) \rangle - r(q). \quad (6)$$

L'ensemble M^n est convexe et compact. La fonction φ est continue par rapport à p et concave par rapport à q . De plus, les inégalités (3) impliquent la "loi de Walras":

$$\varphi(q, q) = \sum_{i=1}^I (\langle q, f_i(q, r_i(q)) \rangle - r_i(q)) \leq 0 \text{ pour tout } q \in M^n. \quad (7)$$

Le théorème de Ky Fan entraîne alors l'existence de $\bar{p} \in M^n$ tel que

$$\sup_{q \in M^n} \varphi(\bar{p}, q) \leq \sup_{q \in M^n} \varphi(q, q) \leq 0. \quad (8)$$

Cette dernière inégalité exprime que les consommations $f_i(\bar{p}, r_i(\bar{p}))$ forment une allocation. ■

Exemple: Economies d'échange

Nous supposons que les I consommateurs désirent échanger des complexes de biens $w^i \in U$ qu'ils possèdent. Ces complexes de biens leur procurent le revenu $r_i(p) = \langle p, w^i \rangle$. Une économie d'échange est une économie dont les revenus $r_i(p)$ proviennent des seuls biens w^i et où $r(p) = \sum_{i=1}^I \langle p, w^i \rangle$. Dans ce cas, des consommations forment une allocation si, d'après (2),

$$\sum_{i=1}^I x^i \leq \sum_{i=1}^I w^i \quad (\text{inégalité dans } \mathbb{R}^n). \quad (9)$$

Corollaire 1

Supposons que les fonctions de demande soient continues. Il existe un système de prix d'équilibre walrasien de l'économie d'échange.

Nous poursuivrons cette étude au paragraphe 13, dans lequel nous remplacerons le concept de fonction de demande par celui de correspondance de demande.

6. CORRESPONDANCES HEMI-CONTINUES SUPERIEUREMENT

Nous allons étudier toute une classe de problèmes non linéaires se ramenant à un problème de la forme suivante

$$\text{chercher } \bar{x} \in X \text{ tel que } 0 \in S(\bar{x}) \quad (1)$$

où S est une correspondance de X dans un espace de Hilbert V associant à tout $x \in X$ un sous-ensemble $S(x)$ de V qui sera toujours non-vidé, convexe et fermé. Si S est une application, le problème (1) s'écrit sous la forme plus familière

$$\text{chercher } \bar{x} \in X \text{ tel que } S(\bar{x}) = 0 \quad (2)$$

de la résolution d'une équation. Une solution $\bar{x}$ de (1) est appelée "point critique" de S .

L'utilisation des correspondances est motivée par des problèmes posés par la théorie de l'optimisation, de la théorie des jeux et l'économie mathématique notamment.

En fait, nous n'utilisons que peu d'éléments de la théorie générale des correspondances. Nous profitons du fait que les images $S(x)$ sont convexes fermées pour les représenter par leurs fonctions d'appui:

$$\forall p \in V^*, \text{ on pose } \sigma(S(x), p) = \sup_{y \in S(x)} \langle p, y \rangle \quad (3)$$

(puisque $y \in S(x)$ si et seulement si $\langle p, y \rangle \leq \sigma(S(x), p)$ pour tout $p \in V^*$).

Définition 1

Nous dirons qu'une correspondance S est *hemi-continue supérieurement* en $x_0 \in X$ si et seulement si $\forall p \in V^*$, la fonction $x \rightarrow \sigma(S(x), p)$ est semi-continue supérieurement en x_0 .

Toute application continue S de X dans V définit évidemment une correspondance hēmi-continue supérieurement (il suffit même que $\forall p \in V^*$, les fonctions $x \rightarrow \langle p, S(x) \rangle$ soient continues).

Soit B la boule unité de V .

Rappelons qu'une correspondance S de X dans V est dite "semi-continue supérieurement en x_0 " si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $N(x_0)$ de x_0 tel que $S(x) \subset S(x_0) + \varepsilon B$ pour tout $x \in N(x_0)$. Cela implique que pour tout $p \in V^*$, $p_0 \in V^*$, $\sigma(S(x), p) \leq \sigma(S(x_0), p) + \sigma(\varepsilon B, p) = \sigma(S(x_0), p) + \varepsilon \|p\|_* \leq \sigma(S(x_0), p_0) + \|p - p_0\|_* \sup_{v \in S(x_0)} \|v\| + \varepsilon \|p\|_*$.

Par suite, toute correspondance semi-continue supérieurement est hémi-continue supérieurement. De plus, si les images de S sont bornées, les fonctions $\{x, p\} \rightarrow (S(x), p)$ sont semi-continues supérieurement. Nous allons donner un autre exemple de correspondance hémi-continue supérieurement.

Proposition 1

Soit f une fonction convexe continue sur l'intérieur (supposé non vide) X de son domaine. Alors la correspondance $x \rightarrow \partial f(x)$ est hémi-continue supérieurement de X dans U^* ; de plus, la fonction $\{x, y\} \rightarrow \sigma(\partial f(x), y)$ est semi-continue supérieurement sur $X \times U$.

Démonstration

En tout point x où f est continue, on sait que $\partial f(x)$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide dont la fonction d'appui vérifie:

$$\sigma(\partial f(x), y) = Df(x)(y) = \inf_{\theta > 0} \frac{f(x + \theta y) - f(x)}{\theta} \quad (4)$$

où $x \in X$. Or, les fonctions $f(x + \theta y) - f(x)$ étant continues en tout $\{x, y\}$ pour θ suffisamment petit, on en déduit que $\sigma(\partial f(x), y)$ est semi-continue supérieurement en $\{x, y\}$ (comme enveloppe inférieure de fonctions continues). ■

Remarque

Si f est localement lipschitzienne, F.H. Clarke a introduit son "gradient généralisé" $\partial f(x)$, ensemble convexe fermé borné non vide dont la fonction d'appui est définie par

$$\sigma(\partial f(x), v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \theta \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + \theta v) - f(y)}{\theta} . \quad (5)$$

Clarke a démontré que $x \rightarrow \partial f(x)$ est hémi-continue supérieurement de X , domaine de f , dans U^* et aussi que l'application $\{x, v\} \in X \times U \rightarrow \sigma(\partial f(x), v)$ est semi-continue supérieurement.

Si f est convexe continue, le gradient généralisé $\partial f(x)$ coïncide avec le sous-différentiel de f .

7. THEOREMES D'EXISTENCE D'UN POINT CRITIQUE D'UNE CORRESPONDANCE

Donnons-nous deux ensembles de Hilbert U et V et

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) un sous-ensemble convexe fermé } X \text{ de } U \\ \text{(ii) une correspondance } S \text{ de } X \text{ dans } V. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Donnons-nous $x \in X$.

Rappelons que le cône convexe fermé

$$N_X(x) = \{p \in U^* \text{ tel que } \langle p, x \rangle = \max_{y \in X} \langle p, y \rangle\} \quad (2)$$

est le cône normal à X en x et que le cône convexe fermé

$$T_X(x) = N_X(x)^\circ \subset U$$

est le cône tangent à X en x . On vérifie que $T_X(x) = \text{adh}(\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(X-x))$ et que $T_X(x) = U$ lorsque $x \in \text{Int } X$. ■

Lemme 1

Soit $L \in \mathcal{L}(U, V)$. La condition

$$\forall x \in X, \quad -L(T_X(x)) \cap S(x) \neq \emptyset \quad (3)$$

implique la propriété

$$\forall x \in X, \quad \inf_{L^*p \in N_X(x)} \sigma(S(x), p) \geq 0. \quad (4)$$

La réciproque est vraie si les images $S(x)$ sont convexes compactes non vides et si $L(T_X(x))$ est fermé pour tout $x \in X$.

Démonstration

Montrons que (3) implique (4): Si $y = -Lz$ appartient à $S(x)$ où z appartient à $T_X(x)$, si $p \in V^*$ vérifie $L^*p \in N_X(x) = T_X(x)^\circ$, on obtient que

$$\sigma(S(x), p) \geq \langle p, y \rangle = -\langle p, Lz \rangle = -\langle L^*p, z \rangle \geq 0.$$

Inversement, supposons (4). Puisque $L^{*-1}(N_X(x))$ est convexe et puisque $S(x)$ est convexe compact, le théorème du minisup implique l'existence de $\bar{y} \in S(x)$ tel que

$$0 \leq \inf_{L^*p \in N_X(x)} \sigma(S(x), p) = \inf_{p \in L^{*-1}(N_X(x))} \sup_{y \in S(x)} \langle p, y \rangle = \inf_{p \in L^{*-1}(N_X(x))} \langle p, \bar{y} \rangle.$$

Cela montre que $\bar{y} \in -L^{*-1}(N_X(x))^\circ = -L(T_X(x))^{--} = -L(T_X(x))$ (lorsque $L(T_X(x))$ est fermée). ■

Définition 1

Nous dirons que S vérifie la condition de Browder - Ky Fan sur X par rapport à $L \in \mathcal{L}(U, V)$ si la condition (4) est satisfaite.

Nous allons utiliser le théorème 3 du paragraphe 3 (Inégalité de Ky Fan) pour démontrer l'existence d'un point critique de S .

Théorème 1 (Browder-Cornet-Ky Fan)

Supposons que

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } X \text{ soit convexe compact} \\ \text{(ii) } S \text{ soit une correspondance h mi-continue supérieurement} \\ \text{à valeurs convexes fermées non-vides,} \end{array} \right\} \quad (5)$$

et que

$$S \text{ vérifie la condition de Browder-Ky Fan pour un opérateur } L \in \mathcal{L}(U,V). \quad (6)$$

Il existe alors $\bar{x} \in X$ tel que $0 \in S(\bar{x})$. De plus, $L+S$ est "surjective" au sens où

$$\forall v \in L(X), \exists x \in X \text{ tel que } v \in Lx + S(x). \quad (7)$$

Démonstration

Supposons qu'il n'existe aucun point critique: pour tout $x \in X$, $0 \notin S(x)$; puisque $S(x)$ est convexe fermé, le théorème de séparation implique qu'il existe $p \in V^*$ tel que $\sigma(S(x), p) > 0$. Par suite, X est recouvert par les ensembles $N(p) = \{x \in X \text{ tels que } \sigma(S(x), p) < 0\}$. Puisque S est h mi-continue supérieurement, ces ensembles sont ouverts. Donc, X étant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $N(p_i)$ ($i=1, \dots, n$) et associer à ce recouvrement ouvert fini une partition continue de l'unité $\{\beta_i\}_{i=1, \dots, n}$ (voir théorème 2 du paragraphe 1).

Introduisons alors la fonction numérique ϕ définie sur $X \times X$ par

$$\phi(x, y) = - \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \langle L^* p_i, x-y \rangle. \quad (8)$$

Elle est évidemment semi-continue inférieurement par rapport à x (en fait, continue) et concave par rapport à y (en fait, linéaire). Le théorème de Ky Fan implique donc l'existence de $\bar{x} \in X$ solution de

$$\sup_{y \in X} \phi(\bar{x}, y) \leq \sup_{y \in X} \phi(y, y) = 0. \quad (9)$$

Si l'on pose $\bar{p} = \sum_{i=1}^n \beta_i(\bar{x}) p_i$, cela revient à dire que $\langle L^* \bar{p}, \bar{x} \rangle = \max_{y \in X} \langle L^* \bar{p}, y \rangle$,

autrement dit, que $L^* \bar{p}$ appartient au cône normal à X en $\bar{x}$. D'autre part, puisque $\sum_{i=1}^n \beta_i(\bar{x}) = 1$, l'ensemble I des indices i tels que $\beta_i(\bar{x}) > 0$ est non vide. Cela exprime que pour de tels $i \in I$, $\bar{x} \in \text{supp}(\beta_i) \subset N(p_i)$, c'est-à-dire, $\sigma(S(\bar{x}), p_i) < 0$. Donc

$$\sigma(S(\bar{x}), \bar{p}) = \sigma(S(\bar{x}), \sum_{i \in I} \beta_i(\bar{x}) p_i) \leq \sum_{i \in I} \beta_i(\bar{x}) \sigma(S(\bar{x}), p_i) < 0.$$

Par suite,

$$\inf_{L^* p \in N_X(\bar{x})} \sigma(S(\bar{x}), p) \leq \sigma(S(\bar{x}), \bar{p}) < 0. \quad (10)$$

Cela contredit la condition de Browder-Ky Fan par rapport à L .

Pour démontrer la seconde assertion, il suffit démontrer que la correspondance R définie par $R(x) = S(x) + Lx - v$ possède un point critique. Pour cela, on peut utiliser la première partie du théorème, puisque R est héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées et puisque, pour tout $p \in U^*$ vérifiant $L^* p \in N_X(x)$,

$$\sigma(R(x), p) = \sigma(S(x), p) + \langle L^* p, x \rangle - \langle p, v \rangle = \sigma(S(x), p) + \langle L^* p, x - y \rangle \geq 0$$

(car $v = Ly \in L(X)$). ■

Exemple 1

Cas où $U = V$ est un espace de dimension finie.

Nous prendrons dans ce cas $L = 1$. L'exemple le plus simple d'ensemble convexe compact X est la boule unité $B = \{x \in U \mid \|x\| \leq 1\}$ de U , que l'on identifie à son dual.

Théorème 2 (Browder)

Soit B la boule unité d'un espace de dimension finie U .

Supposons que S soit une correspondance héli-continue supérieurement à valeurs fermées de B dans U . Si elle vérifie la condition aux limites

$$\inf_{\|x\|=1} \sigma(S(x), x) \geq 0 \quad (11)$$

il existe alors $\bar{x} \in B$ vérifiant $0 \in S(\bar{x})$.

Démonstration

En effet, la boule unité est convexe compacte. Il suffit alors de vérifier que S vérifie la condition de Browder-Ky Fan. Or $N_B(x) = \{0\}$ si $\|x\| < 1$ et $N_B(x) = \{\lambda x\}_{\lambda \geq 0}$ si $\|x\| = 1$. $\therefore \inf_{\lambda \geq 0} \sigma(S(x), \lambda x) \geq 0$ d'après la condition (11).

Les hypothèses du théorème 1 sont alors satisfaites. ■

Exemple 2

Considérons toujours le cas où $U = V$ est un espace de dimension finie.

Théorème 3 (Altman)

Soit B la boule unité d'un espace de dimension finie U .

Supposons qu'une correspondance S de B dans U héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non-vides vérifie

$$\forall \|x\| = 1, \forall u \in S(x), \|u\|^2 \geq \|u-x\|^2 - \|x\|^2. \quad (12)$$

Alors S admet un point critique.

Démonstration

En effet, on obtient, si $\|x\|$ est norme euclidienne de U , que pour tout $\|x\| = 1$,

$$\langle u, x \rangle = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|x\|^2 - \|u-x\|^2) \geq 0 \quad \text{lorsque } u \in S(x)$$

et par suite, que $\sigma(S(x), x) \geq 0$ si $\|x\| = 1$. Le théorème 3 résulte alors du théorème 2. ■

Exemple 3

Points critiques de correspondances coercives.

Nous allons donner un exemple de théorème d'existence d'un point critique lorsque $X = U = V$ est un espace de dimension finie. On introduit les définitions suivantes:

Définition 2

Nous dirons qu'une correspondance de S de U dans U est *semi-coercive* (resp. *coercive*) si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\sigma(S(x), x)}{\|x\|} > 0 \quad (\text{resp. } = \infty). \quad (13)$$

Théorème 4

Supposons que S soit une correspondance semi-coercive et héli-continue supérieurement à valeurs fermées d'un espace de dimension finie U dans lui-même. Il existe un point critique $\bar{x}$ de S .

Démonstration

Soit $a = \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\sigma(S(x), x)}{\|x\|} > 0$. Prenons $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Il existe alors $A > 0$ tel que $\frac{\sigma(S(x), x)}{\|x\|} \geq a - \varepsilon = \frac{a}{2}$ dès que $\|x\| \geq A$. En particulier, si $\|x\| = A$, $\sigma(S(x), x) \geq \frac{a}{2}\|x\| = \frac{aA}{2}$.

Donc la restriction de S à la boule $B(A)$ de rayon A satisfait les hypothèses du théorème 2. Il existe alors une solution $\bar{x} \in B(A)$ de l'équation $0 \in S(\bar{x})$. ■

Perturbation de S

On peut déduire du théorème 1 d'autres théorèmes d'existence de points critiques par la méthode de Poincaré. Nous adaptons pour cela un théorème de Granas.

Considérons la frontière X de l'ensemble convexe compact X (qui est distincte de X si U est de dimension finie et X est d'intérieur non vide). Prenons $U = V$ et $L = 1$.

Théorème 5 (Granas)

Considérons un ensemble convexe compact X d'intérieur non vide et une correspondance S de $X \times [0,1]$ dans V héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides.

Supposons que pour $t = 0$, la correspondance $x \rightarrow S(x,0)$ vérifie la condition de Browder-Ky Fan. On est alors en présence de la situation suivante:

$$\left. \begin{array}{l} \text{OU (i) la correspondance } x \mapsto S(x,1) \text{ admet un point critique } \bar{x} \in X \\ \text{OU (ii) } \exists \lambda \in [0,1[, \exists x \in \partial X \text{ tel que } 0 \in S(x,\lambda). \end{array} \right\} \quad (14)$$

Démonstration

Nous allons supposer que ni (14) (i) ni (14)(ii) sont satisfaites et en déduire une contradiction. Posons $A = \partial X$, sous-ensemble fermé de X ; on introduit le sous-ensemble

$$B = \{x \in X \text{ tels que } \exists \lambda \in [0,1] \text{ vérifiant } 0 \in S(x,\lambda)\}. \quad (15)$$

L'ensemble B est non vide car il contient les points critiques de $x \rightarrow S(x,0)$. Il est fermé (car S est héli-continue supérieurement) et disjoint de A : si $x \in A$ et si $t \in [0,1[$, la négation de (14) (ii) implique que $x \notin B$. Si $x \in A$ et si $t = 1$, $x \notin B$ puisque $S(.,1)$ n'a pas de points critiques.

On introduit alors une fonction continue φ de X dans $[0,1]$ égale à 0 sur A et à 1 sur B (voir proposition 1 du paragraphe 2) et on introduit la correspondance T définie par

$$T(x) = S(x, \varphi(x)). \quad (16)$$

Alors T est évidemment héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides. Elle coïncide avec $S(x,0)$ sur A , et par suite, vérifie les hypothèses du théorème 1. Donc, la correspondance T admet un point critique $\bar{x} \in X$ tel que $0 \in T(\bar{x}) = S(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$. Or cela implique que $\bar{x} \in B$ et par suite, que

$\phi(\bar{x}) = 1$ et donc, que $0 \in S(\bar{x}, 1)$. Il en résulte que $S(., 1)$ a un point critique, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par suite, l'une des propriétés (14)(i) ou (14)(ii) est satisfaite.

En particulier, on obtient le résultat suivant:

Théorème 6

Soient X un sous-ensemble convexe compact d'intérieur non vide et deux correspondances R et S de X dans V héli-continués supérieurement à valeurs convexes fermées non vides.

Supposons que

$$R \text{ vérifie la condition de Browder-Ky Fan} \quad (17)$$

et que

$$\forall \mu \geq 0, \forall x \in \partial X, 0 \notin R(x) + \mu S(x). \quad (18)$$

Alors la correspondance S admet un point critique.

Démonstration

On applique le théorème précédent avec $S(x, t) = (1-t)R(x) + tS(x)$. La condition (14)(ii) s'écrit: $\exists \mu \geq 0, \exists x \in \partial X$ tel que $0 \in R(x) + \mu S(x)$. Celle-ci étant exclue à cause de l'hypothèse (18), on en déduit que $S(., 1) = S(., 1)$ admet un point critique.

Prenons $U = V$, espace de dimension finie et $x_0 \in \text{Int } X$. Alors l'application $R(x) = x - x_0$ vérifie la condition de Browder-Ky Fan. On obtient alors le célèbre théorème suivant:

Théorème 7

Soient x_0 un point intérieur à un ensemble convexe compact X de U et S une correspondance de X dans U héli-continue supérieurement à valeurs fermées non vides. Supposons que

$$\forall \mu > 0, \forall x \in \partial X, x_0 \notin x + \mu S(x). \quad (19)$$

Alors S admet un point critique.

Généralisation 1

On peut remplacer la condition suffisante (4) par d'autres conditions suffisantes que nous allons décrire. Soit f une fonction de $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les hypothèses

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \forall x, y \mapsto f(x,y) \text{ est concave} \\ \text{(ii)} \quad \forall y, x \mapsto f(x,y) \text{ est semi-continue inférieurement} \\ \text{(iii)} \quad \forall y, f(y,y) \leq 0. \end{array} \right\} \quad (20)$$

Le théorème 3 du paragraphe 3 (Inégalité de Ky Fan) implique que l'on peut associer à tout $p \in B^*$ une solution $x \in X$ de

$$\sup_y [f(x,y) - \langle L^* p, x-y \rangle] \leq 0. \quad (21)$$

La démonstration du théorème 1 où la fonction φ définie par (8) est remplacée par la fonction φ définie par

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \langle L^* p_i, x-y \rangle \quad (22)$$

montre l'existence d'un point critique $\bar{x}$ lorsque la condition (4) est remplacée par

$$\left. \begin{array}{l} \exists f \text{ vérifiant (20) et } L \in \mathcal{L}(U,V) \text{ tels que pour tout } p \in V^*, \\ \text{pour toute solution } x \text{ de (21), on ait } \sigma(S(x), p) \geq 0. \end{array} \right\} \quad (24)$$

Théorème 8

Supposons que les hypothèses (5) et (24) soient satisfaites. Il existe alors un point critique $\bar{x}$ de S .

Remarque

On peut également généraliser à ce cas le théorème 5 en remplaçant la frontière $A = \partial X$ de X par l'ensemble fermé A des solutions de (23) lorsque p parcourt B^* .

Généralisation 2

On peut également utiliser le théorème 2 du paragraphe 3 directement pour donner d'autres conditions suffisantes d'existence de points critiques lorsque X est un espace métrique compact quelconque.

Théorème 9

Soit S une correspondance héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides d'un espace compact X dans un espace de Hilbert V . Soit B^* la boule unité de V^* . Supposons que

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \text{ il existe une application continue } C_\varepsilon \text{ de } B^* \text{ dans } X \text{ vérifiant} \\ \forall p \text{ tel que } \|p\| \leq 1, \sigma(S(C_\varepsilon(p)), p) + \varepsilon \|p\|_*^2 \geq 0. \end{array} \right\} \quad (25)$$

Il existe alors un point critique de S .

Démonstration

Dire que $\bar{x} \in X$ est un point critique équivaut à dire que pour tout $p \in B^*$, $0 \in \sigma(S(\bar{x}), p)$. Posons $\phi(x, p) = -\sigma(S(x), p)$. Alors ϕ est semi-continue inférieurement par rapport à x et concave par rapport à p . Puisque X est compact et B convexe, le théorème 2 du paragraphe 3 implique l'existence de $\bar{x} \in X$ vérifiant

$$\sup_{p \in B} \phi(\bar{x}, p) \leq \inf_{C \in \mathcal{C}(B, X)} \sup_{p \in B} \phi(C(p), p) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{p \in B} \phi(C_\varepsilon(p), p) = \inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon = 0$$

puisque d'après l'hypothèse (25),

$$\phi(C_\varepsilon(p), p) = -\sigma(S(C_\varepsilon(p)), p) \leq \varepsilon \|p\|_*^2 \leq \varepsilon. \quad (26)$$

Nous avons donc démontré que $0 \in \sigma(S(\bar{x}), p)$ pour tout $p \in B$, c'est-à-dire que $0 \in S(\bar{x})$. ■

Remarque

Si X est un sous-ensemble convexe compact, on peut étendre ce théorème en permettant l'usage de correspondances semi-continues supérieurement à valeurs convexes fermées C de B^* dans X au lieu d'applications C_ε . L'hypothèse (25) devient alors

$$\forall p \in B^*, \forall x \in C(p), \sigma(S(x), p) \geq 0. \quad (27)$$

Généralisation 3

Le point de vue adopté dans la généralisation 2 permet d'affaiblir l'hypothèse que X est compact.

Théorème 10

Soit S une correspondance héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides d'un ensemble fermé $X \subset \mathbb{R}^n$ dans un espace $V = \mathbb{R}^m$. Supposons que l'hypothèse (25) soit satisfaite. Supposons également que

$$\exists M \in \mathcal{L}(V, U) \text{ tel que } \bigcup_{x \in X} \{x - MS(x)\} \text{ soit borné.} \quad (28)$$

Il existe alors un point critique de S .

Démonstration

Puisque B^* est convexe compact, $\forall \varepsilon > 0$, la fonction $f_\varepsilon(p, q) = -\sigma(S(C_\varepsilon(p)), q)$ vérifie les hypothèses du théorème 3 du paragraphe 3 (Ky Fan). Il existe donc p_ε tel que, $\forall q \in B^*$, $-\sigma(S(C_\varepsilon(p_\varepsilon)), q) \leq \varepsilon$. Cela implique que si l'on pose $\varphi(x, q) = -\sigma(S(x), q)$, alors

$$v^\# = \inf_{x \in X} \sup_{q \in B^*} \varphi(x, q) \leq \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon > 0. \quad (29)$$

Donc $v^\# = 0$. Considérons une suite minimisante d'éléments $x_n \in X$ tels que

$$\sup_{q \in B^*} \varphi(x_n, q) \leq \frac{1}{n}. \quad (30)$$

Remarquons aussi que l'hypothèse de compacité (28) implique que

$$\sup_{y \in X} [\langle q, y \rangle - \varphi(y, M^*q)] = \sup_{y \in X} [-\sigma(MS(y) - y, q)] \leq c \quad (31)$$

où c est une constante positive. Il en résulte donc que $\forall q \in B^*$, $\forall x_n$,

$$\langle q, x_n \rangle \leq \varphi(x_n, M^*q) + \sup_{y \in X} [\langle q, y \rangle - \varphi(y, M^*q)] \leq \frac{1}{n} + c.$$

Cela implique que la suite des x_n est bornée. Une sous-suite converge vers un élément $\bar{x}$ qui, d'après (30), vérifie $\sup_{q \in B^*} \varphi(\bar{x}, q) \leq 0$. Donc $\bar{x}$ est un point critique.

8. THEOREMES DE POINT FIXE D'UNE CORRESPONDANCE

Considérons le cas où $U = V$ est un espace de Hilbert (de dimension finie ou non) et où R est une correspondance de X dans U . Nous allons donner des conditions suffisantes d'existence de points fixes $\bar{x} \in R(\bar{x})$ de R . Puisque $\bar{x}$ est un point fixe de R si et seulement si $\bar{x}$ est solution de $0 \in \bar{x} - R(\bar{x})$ (ou $0 \in R(\bar{x}) - \bar{x}$), de tels résultats proviennent du théorème 1 du paragraphe 7.

Théorème 1 (Kakutani)

Soient X un sous-ensemble convexe compact et R une correspondance de X dans lui-même héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non-vides. Alors il existe un point fixe $\bar{x} \in R(\bar{x})$.

Démonstration

On applique le théorème 1 du paragraphe 7 à la correspondance $S = 1 - R$ qui est également héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées. Si x appartient à la frontière de X , alors p est normal en x à X si et seulement si $\langle p, x \rangle \geq \langle p, y \rangle$ pour tout $y \in X$. En particulier, cela entraîne que

$\sup_{y \in R(x)} \langle p, x-y \rangle \geq 0$. Donc $\inf_{p \in N_X(x)} \sup_{y \in R(x)} \langle p, x-y \rangle \geq 0$, ce qui implique que la condition de Browder-Ky Fan est satisfaite.

Plus généralement, on déduit du théorème 1 du paragraphe 7 l'existence d'un point fixe de R toutes les fois que la correspondance $1-R$ (ou $R-1$) vérifie la condition de Browder-Ky Fan.

Définition 1

Nous dirons que R est *rentrante* (resp. *sortante*) si $1-R$ (resp. $R-1$) vérifie la condition de Browder-Ky Fan.

En d'autres termes, R est "rentrante" si

$$\forall x \in X, \quad \theta^+(x) = \inf_{p \in N_X(x)} \sup_{y \in R(x)} \langle p, x-y \rangle \geq 0 \quad (1)$$

et R est "sortante" si

$$\forall x \in X, \quad \theta^-(x) = \inf_{p \in N_X(x)} \sup_{y \in R(x)} \langle p, y-x \rangle \geq 0. \quad (2)$$

Si les images $R(x)$ sont convexes compactes non vides, on déduit du lemme 1 du paragraphe 7 que R est rentrante si et seulement si

$$\forall x \in X, \quad R(x) \cap (x + T_X(x)) \neq \emptyset \quad (3)$$

et que R est sortante si et seulement si

$$\forall x \in X, \quad R(x) \cap (x - T_X(x)) \neq \emptyset \quad (4)$$

Le théorème 1 du paragraphe 7 implique alors le résultat suivant.

Théorème 2

Soient X un sous-ensemble convexe compact et R une correspondance hémi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides. Si R est rentrante (ou sortante), il existe un point fixe $\bar{x} \in R(\bar{x})$.

Nous allons donner une condition suffisante commode impliquant que R est sortante. Désignons par

$$\partial \sigma_X(p) = \{x \in X \text{ tels que } \langle p, x \rangle = \sigma_X(p)\} \quad (5)$$

(on remarque que $x \in \partial \sigma_X(p)$ si et seulement si $p \in N_X(x)$). Certains auteurs appellent "zone d'appui de X " les sous-ensembles $\partial \sigma_X(p)$. Si R applique toute zone d'appui en elle-même, R est sortante.):

Proposition 1

Soient X un sous-ensemble convexe compact et R une correspondance de X dans X telle que

$$\forall p \in V^*, R(\partial\sigma_X(p)) \subset \partial\sigma_X(p). \quad (6)$$

Alors R est sortante.

Démonstration

Prenons $x \in X$ et $p \in N_X(x)$. Alors $x \in \partial\sigma_X(p)$. L'hypothèse (6) implique l'existence de $y_0 \in \partial\sigma_X(p) \cap R(x)$. Donc $\langle p, y_0 \rangle = \langle p, x \rangle = \sigma_X(p)$ et par suite

$$\sup_{y \in R(x)} \langle p, y-x \rangle \geq \langle p, y_0-x \rangle = 0. \quad (7)$$

Donc $\theta^-(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$, c.à.d. R est sortante. ■

Remarque

En fait, on peut remplacer l'hypothèse (6) par la condition plus faible

$$\forall p \in U^*, \forall x \in \partial\sigma_X(p), R(x) \cap \partial\sigma_X(p) = \emptyset \quad (8)$$

9. THEOREMES DE SURJECTIVITE POUR UNE CORRESPONDANCE

Soit R une correspondance de X dans U . Etant donné $y \in U$, nous cherchons une solution $\bar{x} \in X$ de l'équation $y \in R(\bar{x})$. Cela revient à chercher une solution de l'équation $0 \in R(\bar{x}) - y$. (Ou $0 \in y - R(\bar{x})$)

Théorème 1 (Rogalski-Cornet)

Soient X un sous-ensemble convexe compact et R une correspondance sortante héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides. Alors, pour tout $y \in U$, il existe $\bar{x} \in X$ tel que $y \in R(\bar{x})$.

Démonstration

Il suffit de vérifier que la correspondance $S = R-y$ vérifie la condition de Browder-Ky Fan. Soient $x \in X$ et $p \in N_X(x)$. Donc $\langle p, x \rangle = \sigma_X(p) \geq \langle p, y \rangle$.

Par suite,

$$\sigma(S(x), p) = \sigma(R(x), p) - \langle p, y \rangle \geq \sigma(R(x), p) - \langle p, x \rangle$$

et

$$\inf_{p \in N_X(x)} \sigma(S(x), p) \geq \theta^-(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in X$$

puisque R est "sortante". Donc, il existe $\bar{x} \in X$ tel que $0 \in R(\bar{x}) - y$. ■

Le théorème 1 et la proposition 1 du paragraphe 8 impliquent le corollaire suivant:

Théorème 2 (théorème du rétracte)

Soient X un sous-ensemble convexe compact et R une correspondance de X dans X héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides. Si

$$\forall p \in U^*, R[\partial\sigma_X(p)] \subset \partial\sigma_X(p). \quad (1)$$

Alors

$$R(X) = X. \quad (2)$$

Nous pouvons également utiliser le théorème 3 du paragraphe 7 pour donner une condition suffisante de surjectivité d'une correspondance d'un espace de dimension finie dans lui-même.

Théorème 3

Soit R une correspondance coercive héli-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides d'un espace de dimension finie U dans lui-même. Alors R est surjective.

Démonstration

Il suffit de démontrer que pour tout $y \in U$, la correspondance $S = R - y$ est semi-coercive: dans ce cas, le théorème 3 résultera du théorème 4 du paragraphe 7. Mais il est évident que la coercivité de R implique celle de S . □

10. INEQUATIONS VARIATIONNELLES

Soient U un espace de Hilbert, U^* son dual et X un sous-ensemble convexe compact de U . Considérons une correspondance S de X dans U^* à valeurs convexes compactes non vides.

Nous dirons que $\bar{x} \in X$ est une solution de l'inéquation variationnelle pour la correspondance S sur X s'il existe $\bar{p} \in U^*$ tel que

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \bar{x} \in X, \bar{p} \in S(\bar{x}) \\ \text{(ii)} & \forall y \in X, \langle \bar{p}, \bar{x} - y \rangle \leq 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Cela équivaut à dire que

$$-N_X(\bar{x}) \cap S(\bar{x}) \neq \emptyset. \quad (2)$$

Si l'on identifie U à U^* , (2) équivaut à dire que $\bar{x}$ est un point critique de la correspondance $x \rightarrow S(x) + N_X(x)$ (qui est égale à S sur $\text{Int } X$).

Théorème 1

Supposons que X soit convexe compact et que S soit une correspondance semi-continue supérieurement de X dans U^* à valeurs convexes compactes non vides. Il existe une solution $\bar{x} \in X$ de l'inéquation variationnelle sur X .

Démonstration

Posons

$$\varphi(x, y) = -\sigma(S(x), y-x). \quad (3)$$

La fonction φ est concave par rapport à y , semi-continue inférieurement par rapport à x (puisque S est semi-continue supérieurement) et vérifie $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $y \in X$. Puisque X est convexe compact, le théorème 3 du paragraphe 3 (inégalité de Ky Fan) implique l'existence de $\bar{x} \in X$ tel que

$$\forall y \in X, \quad \varphi(\bar{x}, y) = -\sigma(S(\bar{x}), y-\bar{x}) \leq 0. \quad (4)$$

De plus, puisque $S(\bar{x})$ est convexe compact, puisque X est convexe et puisque les fonctions $y \mapsto \langle p, y-\bar{x} \rangle$ et $p \mapsto \langle p, y-\bar{x} \rangle$ sont continues et affines, (4) et le théorème de minisup impliquent qu'il existe $\bar{p} \in S(\bar{x})$ tel que,

$$0 \leq \inf_{y \in X} \sigma(S(\bar{x}), y-\bar{x}) = \inf_{y \in X} \sup_{p \in S(\bar{x})} \langle p, y-\bar{x} \rangle = \inf_{y \in X} \langle \bar{p}, y-\bar{x} \rangle. \quad (5)$$

Ceci montre que $\bar{x}$ est une solution de l'inéquation variationnelle. ■

Lorsque U est de dimension finie, nous pouvons remplacer l'hypothèse que X est compact par une hypothèse portant sur S .

Définition 1

Nous dirons que S est "fortement coercive" sur X si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \inf_{p \in S(x)} \frac{\langle p, x \rangle}{\|x\|} = +\infty \quad (6)$$

et que S est "bornée" si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \sup_{p \in S(x)} \frac{\|p\|}{\|x\|} < +\infty \quad (7)$$

Théorème 2

Supposons que X soit un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de dimension finie U et que S soit une correspondance semi-continue supérieurement, fortement coercive et bornée de X dans U^* à valeurs convexes compactes non vides. Il existe une solution $\bar{x} \in X$ de l'inéquation variationnelle.

Démonstration

Il suffit, d'après la deuxième partie de la démonstration du théorème 1, de démontrer l'existence d'une solution $\bar{x}$ de (4). Montrons d'abord que toute solution $\bar{x}$ de (4), si elle existe, demeure dans une boule de rayon a . En effet, prenons $y_0 \in X$ arbitraire. Alors $\bar{x}$ vérifie

$$0 \leq \sigma(S(\bar{x}), y_0 - \bar{x}) = \sigma(S(\bar{x}), y_0) - \inf_{p \in S(\bar{x})} \langle p, \bar{x} \rangle. \quad (8)$$

L'hypothèse (7) implique l'existence de constantes M et b telles que, si $\|x\| \geq b$, $\sigma(S(x), y_0) \leq M\|y_0\|\|x\|$. L'hypothèse (6) implique l'existence de c , telle que si $\|x\| \geq c$, $\inf_{p \in S(x)} \frac{\langle p, x \rangle}{\|x\|} \geq 2M\|y_0\|\|x\|$. Par suite, si $a = \max(b, c)$,

toute solution $\bar{x}$ de (4) a une norme inférieure à a (sinon, (8) impliquerait que $0 \leq -M\|y_0\|\|\bar{x}\|$, ce qui est impossible.) Donc, les solutions, si elles existent, appartiennent à l'ensemble convexe compact $X_a = \{x \in X \text{ tels que } \|x\| \leq a\}$. Mais de telles solutions existent d'après le théorème 1. ■

11. INEQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES

Nous allons donner dans ce paragraphe une méthode de sélection d'un point fixe d'une correspondance S .

Théorème 1

Nous supposons que

$$X \text{ est un sous-ensemble convexe compact d'un espace de Hilbert } U \quad (1)$$

et que

$$S \text{ est une correspondance h mi-continue supérieurement de } X \text{ dans } X \text{ à valeurs convexes fermées non vides} \quad (2)$$

Considérons une fonction $f: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \forall y \in X, x \mapsto f(x,y) \text{ est semi-continue inférieurement} \\ \text{(ii)} \quad \forall x \in X, y \mapsto f(x,y) \text{ est concave} \\ \text{(iii)} \quad \sup_{y \in X} f(x,y) \leq 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Supposons enfin que la correspondance S et la fonction f soient liées par la propriété

$$\{x \in X \text{ tels que } \alpha(x) = \sup_{y \in S(x)} f(x,y) \leq 0\} \text{ est fermé.} \quad (4)$$

Il existe alors $\bar{x} \in X$ solution de l'inéquation quasi-variationnelle:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \bar{x} \in S(\bar{x}) \\ \text{(ii)} \quad \sup_{y \in S(\bar{x})} f(\bar{x},y) \leq 0. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Remarque 1

Les hypothèses (1) et (2) sont celles du théorème de Kakutani et les hypothèses (1) et (3) celles du théorème 3 du paragraphe 3 (inégalité de Ky Fan). L'hypothèse (4) est une hypothèse de cohérence entre S et f .

Démonstration

Raisonnons par l'absurde. Si la conclusion est fausse, on aurait pour tout $x \in X$ ou bien $\alpha(x) > 0$ ou bien $x \notin S(x)$. Dire que $x \notin S(x)$ implique qu'il existe $p \in U^*$ tel que $\langle p, x \rangle - \sigma(S(x), p) > 0$. Posons

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad V_0 = \{x \in X \text{ tels que } \alpha(x) > 0\} \\ \text{(ii)} \quad V(p) = \{x \in X \text{ tels que } \langle p, x \rangle - \sigma(S(x), p) > 0\}. \end{array} \right\} \quad (6)$$

La négation de la conclusion s'exprime sous la forme

$$X \subset V_0 \cup \bigcup_{p \in U} V(p). \quad (7)$$

Les hypothèses (2) et (3) (i) impliquent que les ensembles V_0 et $V(p)$ sont ouverts. Puisque X est compact, on en déduit qu'il existe $p_1, \dots, p_n$ tels que

$$X \subset V_0 \cup \bigcup_{i=1}^n V(p_i) \quad (8)$$

et qu'il existe une partition continue de l'unité $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ subordonnée à ce recouvrement.

On introduit alors la fonction $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = \beta_0(x)f(x, y) + \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \langle p_i, x-y \rangle. \quad (9)$$

Cette fonction φ est semi-continue inférieurement par rapport à x (grâce à (3)(i)), concave par rapport à y (grâce à (3)(ii)). Puisque X est convexe compact (d'après (1)) et puisque $\sup_{y \in X} \varphi(y, y) = 0$ (d'après (3)(iii)), le théorème 3 du paragraphe 3 (inégalité de Ky^{Fan}) implique l'existence de $\bar{x}$ vérifiant

$$\sup_{y \in X} \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \quad (10)$$

Nous allons contredire cette inégalité en prouvant qu'il existe $\bar{y} \in X$ tel que

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) > 0. \quad (11)$$

On prend

$$\left. \begin{array}{l} \bar{y} \in S(\bar{x}) \text{ quelconque si } \alpha(\bar{x}) \leq 0 \text{ et vérifiant } f(\bar{x}, \bar{y}) \geq \frac{\alpha(\bar{x})}{2} \\ \text{si } \alpha(\bar{x}) > 0 \text{ (ce qui est loisible).} \end{array} \right\} \quad (12)$$

Puisque $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ est une partition de l'unité, $\beta_i(\bar{x}) > 0$ pour au moins un indice $i = 0, 1, \dots, n$. L'inégalité (11) résulte alors des assertions:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } \beta_0(\bar{x}) > 0 \text{ entraîne que } f(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \\ \text{(ii) } \beta_i(\bar{x}) > 0 \text{ entraîne que } \langle p_i, \bar{x} - \bar{y} \rangle > 0. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Vérifions-les. Si $\beta_0(\bar{x}) > 0$, alors $\bar{x} \in V_0$ et par suite, $\alpha(\bar{x}) > 0$. Donc $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq \frac{\alpha(\bar{x})}{2}$. Si $\beta_i(\bar{x}) > 0$, alors $\bar{x} \in V(p_i)$ et par suite, $\langle p_i, \bar{x} \rangle > \sigma(S(\bar{x}), p_i) \geq \langle p_i, \bar{y} \rangle$ car $\bar{y} \in S(\bar{x})$. Donc $\langle p_i, \bar{x} - \bar{y} \rangle > 0$. ■

Remarque 2

Il est utile de donner des conditions suffisantes impliquant l'hypothèse (4).

L'une d'elles est de dire que la fonction $\alpha: x \mapsto \alpha(x) = \sup_{y \in S(x)} f(x, y)$ est semi-continue inférieurement. Or le théorème du maximum implique que si la correspondance S est "semi-continue inférieurement", alors α est semi-continue inférieurement".

Définition 2

Nous dirons qu'une correspondance S d'un espace métrique X dans un espace métrique Y est *semi-continue inférieurement* en x_0 si pour toute suite d'éléments $x_n \in X$ convergeant vers x_0 et pour tout élément $y \in S(x_0)$, on peut trouver une

suite d'éléments $y_n \in S(x_n)$ convergeant vers y .

Proposition 1

Supposons que

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad f: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ soit semi-continue inférieurement} \\ \text{(ii)} \quad \text{La correspondance } S \text{ soit semi-continue inférieurement.} \end{array} \right\} \quad (14)$$

Alors la fonction $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\alpha(x) = \sup_{y \in S(x)} f(x, y)$ est elle-même semi-continue inférieurement.

Démonstration

Il nous faut démontrer que si une suite d'éléments $x_n \in X$ converge vers x_0 , alors $\alpha(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n)$; fixons $\varepsilon > 0$.

Il existe $y \in S(x_0)$ tel que, par définition de $\alpha(x_0)$,

$$\alpha(x_0) \leq f(x_0, y) + \varepsilon/2.$$

Puisque S est semi-continue inférieurement en x_0 , il existe une suite d'éléments $y_n \in S(x_n)$ convergeant vers y .

Puisque f est semi-continue inférieurement, on en déduit qu'il existe $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$,

$$f(x_0, y) \leq f(x_n, y_n) + \varepsilon/2.$$

Puisque $y_n \in S(x_n)$, on a $f(x_n, y_n) \leq \alpha(x_n)$. Donc les inégalités ci-dessus impliquent que $\alpha(x_0) \leq \alpha(x_n) + \varepsilon$ dès que $n \geq N(\varepsilon)$.

12. EQUILIBRES NON COOPERATIFS DE JEUX A N PERSONNES. (II)

Nous poursuivons l'étude des jeux non coopératifs à n personnes commencée au paragraphe 4. Nous supposons cette fois-ci que si la coalition adverse $\hat{i}$ choisit une multi-stratégie $x^{\hat{i}} \in \prod_{j \neq i} E^j$, le i ème joueur est contraint de choisir une stratégie x^i dans un sous-ensemble $S_i(x^{\hat{i}}) \subset E^i$, où

$$S_i \text{ est une correspondance de } \prod_{j \neq i} E^j \text{ dans } E^i. \quad (1)$$

Désignons toujours par f_i la fonction de perte du i ème joueur.

Définition 1

Nous dirons qu'une multi-stratégie $x = \{x^1, \dots, x^n\} \in \prod_{i=1}^n E^i$ est un équilibre non coopératif contraint si pour tout joueur i , on a

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad x^i \in S_i(\hat{x}^i) \\ \text{(ii)} \quad f_i(x^i, \hat{x}^i) = \min_{y^i \in S_i(\hat{x}^i)} f_i(y^i, \hat{x}^i). \end{array} \right\} \quad (2)$$

Théorème 1 (Arrow-Debreu-Nash)

Nous supposons que

$$\forall i \in N, \text{ les ensembles } E^i \text{ sont convexes compacts} \quad (3)$$

et que

$$\left. \begin{array}{l} \forall i \in N, \text{ les correspondances } S_i \text{ de } \prod_{j \neq i} E^j \text{ dans } E^i \text{ sont} \\ \text{hémi-continues supérieurement et semi-continues inférieurement} \\ \text{à valeurs convexes fermées non vides.} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Nous supposons enfin que

$$\left. \begin{array}{l} \forall i \in N, \text{ les fonctions } f_i \text{ sont continues} \\ \text{et les fonctions } y^i \mapsto f_i(y^i, \hat{x}^i) \text{ sont convexes.} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Il existe alors un équilibre non-coopératif contraint.

Démonstration

Posons

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad X = \prod E^i \\ \text{(ii)} \quad \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n (f_i(x^i, \hat{x}^i) - f_i(y^i, \hat{x}^i)) \\ \text{(iii)} \quad S(x) = \prod_{i=1}^n S_i(\hat{x}^i). \end{array} \right\} \quad (6)$$

L'ensemble X est convexe compact. La correspondance est évidemment à valeurs convexes fermées non vides, hémi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement. La fonction φ est continue, et pour tout $x \in X$ la fonction $y \mapsto \varphi(x, y)$ est concave. De plus, $\varphi(y, y) = 0$ pour tout $y \in X$.

Le théorème 1 du paragraphe 11 et la proposition 1 du paragraphe 11 impliquent l'existence de $\bar{x} \in X$ tel que

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \bar{x} &= \{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n\} \in S(\bar{x}) = \prod_{i=1}^n S_i(\bar{x}^i) \\ \text{(ii)} \quad \varphi(\bar{x}, y) &\leq 0 \text{ pour tout } y \in S(\bar{x}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

La condition (7)(i) implique évidemment les relations (2)(i). On démontre comme au paragraphe 4 que la propriété (7)(ii) implique la propriété (2)(ii). Donc $\bar{x}$ est un équilibre non coopératif contraint. ■

13. SYSTEMES DE PRIX D'EQUILIBRE WALRASIEEN (II)

Nous reprenons l'étude du modèle général d'équilibre que nous avons traité au paragraphe 5.

Le théorème que nous allons démontrer est à la base des théorèmes d'existence en théorie de l'équilibre économique. Il est commode de l'énoncer dans le cas où $U = \mathbb{R}^n$. Considérons le simplexe $M^n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

Théorème 1 (Debreu-Gale-Nikaido)

Soit S une correspondance de M^n dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs non vides. Si

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad S &\text{ est h\^emi-continue sup\^erieurement} \\ \text{(ii)} \quad \forall x \in M^n, S(x) - \mathbb{R}_+^n &\text{ est convexe ferm\^e} \\ \text{(iii)} \quad \forall x \in M^n, \sigma(S(x), x) &\geq 0 \text{ (loi de Walras)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

il existe alors $x \in M^n$ tel que $S(x) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset$.

Démonstration

On introduit la fonction φ définie sur $M^n \times M^n$ par

$$\varphi(x, y) = -\sigma(S(x), y).$$

Cette fonction est concave par rapport à y (puisque $y \rightarrow \sigma(S(x), y)$ est convexe) et semi-continue inférieurement par rapport à x (puisque, S étant h\^emi-continue sup\^erieurement, $x \rightarrow \sigma(S(x), y)$ est semi-continue inférieurement). Puisque M^n est convexe compact, le théorème de Ky Fan implique l'existence de $\bar{x} \in M^n$ tel que $\sup_{y \in M^n} \varphi(\bar{x}, y) \leq \sup_{y \in M^n} \varphi(y, y) \leq 0$ (d'après (1)(iii)), c'est-à-dire tel que

$$0 \leq \sigma(S(\bar{x}), y) \text{ pour tout } y \in M^n. \quad (3)$$

Cette condition \^equivaut \^a

$$0 \leq \sigma(S(\bar{x}) - \mathbb{R}_+^n, y) \text{ pour tout } y \in U \quad (4)$$

puisque $\sigma(-\mathbb{R}_+^n, y) = 0$ si $y \in \mathbb{R}_+^n$ et $\sigma(-\mathbb{R}_+^n, y) = +\infty$ si $y \notin \mathbb{R}_+^n$. Puisque $S(\bar{x}) - \mathbb{R}_+^n$ est convexe et fermé, (4) implique que $0 \in S(\bar{x}) - \mathbb{R}_+^n$, c'est-à-dire que $S(\bar{x}) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset$.

Exemple: Existence d'un équilibre de Walras

On considère une espace $U = \mathbb{R}^n$ représentant un espace de biens; son dual $\mathbb{R}^{n*}$ représente alors l'espace des prix et $M^n = \{p \in \mathbb{R}^{n*} \text{ tels que } \sum_{i=1}^n p^i = 1\}$ est l'ensemble des prix positifs normalisés.

On donne un sous-ensemble $Y \subset \mathbb{R}^n$ de biens disponibles, où

$$Y \text{ est un sous-ensemble convexe fermé tel que } Y = Y - \mathbb{R}_+^n. \quad (5)$$

Alors, sa fonction d'appui $r(p) = \sigma_Y(p) = \sup_{y \in Y} \langle p, y \rangle$ peut être interprétée comme la fonction de revenu maximum procuré par Y . Considérons maintenant I consommateurs $i = 1, \dots, I$, dont le problème est de trouver $x^i \in \mathbb{R}^n$ tels que la somme des consommations x^i soit disponibles, c.à.d.

$$\sum_{i=1}^I x^i \in Y. \quad (6)$$

Pour choisir une telle "allocation" $x = \{x^1, \dots, x^I\}$, nous supposons que le comportement des consommateurs est décrit de la façon suivante

(a) le revenu $r(p)$ est alloué aux I consommateurs, qui disposent donc de $r_i(p)$ où

$$r(p) = \sum_{i=1}^n r_i(p). \quad (7)$$

(b) chaque consommateur choisit un bien x^i dans l'ensemble $D_i(p)$, où D_i est la correspondance de demande associant à tout $p \in M^n$ un sous-ensemble convexe compact non-vidé contenu dans l'ensemble de budget

$$B_i(p) = \{x^i \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \langle p, x^i \rangle \leq r_i(p)\} \quad (8)$$

du consommateur.

Le problème se pose donc de vérifier s'il est possible de trouver un prix $\bar{p}$ (appelé prix d'équilibre Walrasien) tel que tout consommateur puisse trouver $\bar{x}^i \in D_i(\bar{p})$ vérifiant $\sum_{i=1}^I \bar{x}^i \in Y$.

Théorème 2

Supposons (5), (7) et

les correspondances de demande D_i sont h mi-continues supérieurement. (9)

Il existe alors un prix d'équilibre Walrasien.

Démonstration

On applique le théorème 1 avec $S(p) = - \sum_{i=1}^n D_i(p) + Y$ (où x est remplacé par p).

Alors $S(p) = S(p) - \mathbb{R}_+^n$ est convexe fermé puisque les $D_i(p)$ sont convexes compacts et $Y = Y - \mathbb{R}_+^n$ est convexe fermé. La correspondance S est évidemment h mi-continue supérieurement comme somme de correspondances h mi-continues supérieurement. Enfin, puisque $D_i(p) \subset B_i(p)$, on en déduit que la loi de Walras est satisfaite. Il existe donc $\bar{p}$ tel que $0 \in S(\bar{p}) = - \sum_{i=1}^n D_i(\bar{p}) + Y$ et par suite, des $\bar{x}_i \in D_i(\bar{p})$ tel que $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \in Y$. ■

REFERENCES

- [1] ARROW, K. et DEBREU, G., Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica* 22 (1954), 265-290.
- [2] ARROW, K. et HAHN, F., *General Competitive Analysis*. (1971), Holden-Day.
- [3] AUBIN, J.P., *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*. (1978), North-Holland.
- [4] AUBIN, J.P. et CORNET, B., Règles de décision en théorie des jeux et théorèmes de points fixes. *C.R.A.S.* 283 (1976), 11-14.
- [5] AUBIN, J.P. et SIEGEL, J., Fixed points and stationary points of dissipative multivalued maps. *Modelling Research Group, U.S.C. No. 7712* (1977).
- [6] BREZIS, H., *Op rateurs Maximaux Monotones*. (1973), North-Holland.
- [7] BREZIS, H. et BROWDER, F., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis. *Advances in Mathematics* 21 (1976), 355-364.
- [8] BREZIS, H., NIRENBERG, L. et STAMPACCHIA, G., A remark on Ky Fan's minimax principle. *Boll. U.M.I.* 6 (1973), 293-300.
- [9] BROWDER, F., *Nonlinear Operators in Banach Spaces*. (1976), *Proceedings of Symposia* (18) of AMS.
- [10] BROWDER, F., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces. *Math. Ann.* 177 (1968), 283-301.

- [11] CARISTI, J., Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 78 (1972), 186-197.
- [12] CLARKE, F. H., Generalized gradients and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* 205 (1975), 247-262.
- [13] CORNET, B., Paris avec handicaps et théorèmes de surjectivité de correspondances. *C. R. A. S.* 281 (1975), 479-482.
- [14] DEBREU, G., *Theory of value*. (1959), Wiley.
- [15] DUGUNDJI-GRANAS. Livre à paraître.
- [16] EKELAND, I., On the variational principles. *J. Math. Anal. Appl.* 47 (1974), 324-353.
- [17] KAKUTANI, S., A generalization of Browder's fixed point theorem. *Duke Math. J.* 8 (1941), 457-459.
- [18] KNASTER, B., KURATOWSKI, C. et MAZURKIEWICZ, S., Ein Beweis des Fixpunktsatzes für r -dimensionale Simplexe. *Fund. Math.* 14 (1929), 132-137.
- [19] KY FAN, A minimax inequality and applications. Dans *Inequalities (vol III)* (1973). Academic Press. Shisha, Ed.
- [20] GRANAS, A., Sur la méthode de continuité de Poincaré. *C. R. A. S.* 282 (1976), 983-986.
- [21] LASRY, J. M. et ROBERT, R., Analyse non linéaire multivoque. *Cahiers de mathématiques de la décision* 7611 (1976), Université de Paris-Dauphine.
- [22] LIONS, J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. (1969), Dunod.
- [23] MASCHLER, M. et PELEG, B., Stable sets and stable points of set valued dynamic systems and applications to game theory. *SIAM J. Control and Optimization* 14 (1976), 985-995.
- [24] NASH, J., Non cooperative games. *Ann. of Math.* 54 (1951), 286-295.
- [25] VON NEUMANN, J., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Math. Annalen*.
- [26] NIKAIKO, H., *Convex Structures and Economic Theory*. (1968), Academic Press.
- [27] NIRENBERG, L., *Topics in Nonlinear Functional Analysis*. (1974), Courant Institute, N.Y.U.
- [28] ROCKAFELLAR, R. T., *Convex Analysis*. (1970), Princeton University Press.
- [29] SCHAUDER, J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia Math.* 2 (1930), 171-180.

- [30] SCHWARTZ, J.T., *Nonlinear Functional Analysis*. (1969). Gordon and Breach
- [31] SIEGEL, J., A new proof of Caristi's fixed point theorem. A paraître.
- [32] SION, M., On general minimax theorems. *Pac.J.Math.* 8 (1958), 171-176.
- [33] YOSIDA. *Functional Analysis*. Springer Verlag (dernière édition).

Manuscrit reçu le 1er février 1977

